

ISSN 2520-6141



ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал



Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (224) 2019 год

Рубрики номера:

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

Математика

Физика

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

Моделирование процессов

и управление в технических системах

Системный анализ и обучающие системы

Обработка и передача информации

Алгоритмизация и программирование

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Физика



Минск 2019

Учреждение образования
«Белорусский государственный
технологический университет»

ТРУДЫ БГТУ

Научный журнал

Издается с июля 1993 года

Серия 3

**ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ
НАУКИ И ИНФОРМАТИКА**

№ 2 (224) 2019 год

Выходит два раза в год

Минск 2019

Учредитель – учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет»

Главный редактор журнала – Войтов Игорь Витальевич, доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь

Редакционная коллегия журнала:

Дормешкин О. Б., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Жарский И. М., кандидат химических наук, профессор (заместитель главного редактора), Республика Беларусь;
Кунтыш В. Б., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Прокопчук Н. Р., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор химических наук, профессор, Республика Беларусь;
Водопьянов П. А., член-корреспондент НАН Беларуси, доктор философских наук, профессор, Республика Беларусь;
Новикова И. В., доктор экономических наук, профессор, Республика Беларусь;
Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Торчик В. И., доктор биологических наук, Республика Беларусь;
Долгова Т. А., кандидат физико-математических наук, доцент, Республика Беларусь;
Захарук Т., доктор педагогических наук, профессор, Республика Польша;
Пайвинен Ристо, доктор наук, профессор, Финляндская Республика;
Барчик Стэфан, доктор наук, профессор, Словацкая Республика;
Жантасов К. Т., доктор технических наук, профессор, Республика Казахстан;
Харша Ратнавира, доктор наук, профессор, Королевство Норвегия;
Рангелова Е. М., доктор педагогических наук, профессор, Республика Болгария;
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;
Хассель Л. Г., доктор наук, профессор, Королевство Швеция;
Файгле В., доктор наук, профессор, Федеративная Республика Германия;
Флорик Е. А., кандидат биологических наук, доцент (секретарь), Республика Беларусь.

Редакционная коллегия серии:

Наркевич И. И., доктор физико-математических наук, профессор (главный редактор серии), Республика Беларусь;
Урбанович П. П., доктор технических наук, профессор (заместитель главного редактора серии), Республика Беларусь;
Вихренко В. С., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Колесников В. Л., доктор технических наук, профессор, Республика Беларусь;
Калинин А. И., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Сайко А. П., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Квасов Н. Т., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Минченко Л. И., доктор физико-математических наук, Республика Беларусь;
Леваков А. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Мазаник С. А., доктор физико-математических наук, профессор, Республика Беларусь;
Щекин А. К., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Российская Федерация;
Головкин М. Ф., член-корреспондент, доктор физико-математических наук, профессор, Украина;
Бартосевич Збигнев, доктор габилитованный, Республика Польша;
Шкляр Бенцион, профессор, Государство Израиль;
Аргиракис Панос, доктор наук, профессор, Греческая Республика;
Орлюкас Антанас Феликсас, доктор наук, Литовская Республика;
Горецкий Иржи, доктор габилитованный, Республика Польша;
Соловьева И. Ф., кандидат физико-математических наук, доцент (ответственный секретарь), Республика Беларусь.

Адрес редакции: ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.

Телефоны: главного редактора журнала – (+375 17) 226-14-32;

главного редактора серии – (+375 17) 399-49-60.

E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

Свидетельство о государственной регистрации средств массовой информации

№ 1329 от 23.04.2010, выданное Министерством информации Республики Беларусь.

Журнал включен в «Перечень научных изданий Республики Беларусь для опубликования результатов диссертационных исследований»

Educational institution
“Belarusian State Technological University”

PROCEEDINGS OF BSTU

Scientific Journal

Published monthly since July 1993

Issue 3

**PHYSICS
AND MATHEMATICS.
INFORMATICS**

No. 2 (224) 2019

Published biannually

Minsk 2019

Publisher – educational institution “Belarusian State Technological University”

Editor-in-chief – Voitau Ihar Vital’evich, DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus

Editorial (Journal):

Dormeshkin O. B., DSc (Engineering), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Zharskiy I. M., PhD (Chemistry), Professor (deputy editor-in-chief), Republic of Belarus;
Kuntyshev V. B., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Prokopchuk N. R., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Chemistry), Professor, Republic of Belarus;
Vodop’yanov P. A., Corresponding Member of the National Academy of Sciences of Belarus, DSc (Philosophy), Professor, Republic of Belarus;
Novikova I. V., DSc (Economics), Professor, Republic of Belarus;
Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Torchik V. I., DSc (Biology), Republic of Belarus;
Dolgova T. A., PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Republic of Belarus;
Zakharuk T., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Poland;
Paivinen Risto, DSc, Professor, Republic of Finland;
Barcik Štefan, DSc, Professor, Slovak Republic;
Zhantasov K. T., DSc (Engineering), Professor, Republic of Kazakhstan;
Harsha Ratnaweera, DSc, Professor, Kingdom of Norway;
Rangelova E. M., DSc (Pedagogics), Professor, Republic of Bulgaria;
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;
Hassel L. G., DSc, Professor, Kingdom of Sweden;
Faigle W., DSc, Professor, Federal Republic of Germany;
Flyurik E. A., PhD (Biology), Associate Professor (secretary), Republic of Belarus.

Editorial (Issue):

Narkevich I. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor (managing editor), Republic of Belarus;
Urbanovich P. P., DSc (Engineering), Professor (sub-editor), Republic of Belarus;
Vikhrenko V. S., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Kolesnikov V. L., DSc (Engineering), Professor, Republic of Belarus;
Kalinin A. I., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Sayko A. P., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Kvasov N. T., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Minchenko L. I., DSc (Physics and Mathematics), Republic of Belarus;
Levakov A. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Mazanik S. A., DSc (Physics and Mathematics), Professor, Republic of Belarus;
Shchekin A. K., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Russian Federation;
Golovko M. F., Corresponding Member, DSc (Physics and Mathematics), Professor, Ukraine;
Bartosevich Zbigniew, DSc, Republic of Poland;
Shklyar Benzion, Professor, State of Israel;
Argyris Panos, DSc, Professor, Republic of Greece;
Orlukas Antanas Feliksas, DSc, Republic of Lithuania;
Gorezki Irshi, DSc, Republic of Poland;
Solov’yeva I. F., PhD (Physics and Mathematics) (executive editor), Republic of Belarus.

Contact: 13a, Sverdlova str., 220006, Minsk.
Telephones: editor-in-chief (+375 17) 226-14-32;
managing editor (+375 17) 399-49-60.
E-mail: root@belstu.by, <http://www.belstu.by>

УДК 517.935.2+519.71

И. М. Борковская, О. Н. Пыжкова

Белорусский государственный технологический университет

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯТОРОВ ПО ТИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ СТАБИЛИЗАЦИИ И УПРАВЛЯЕМОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Применение линейной обратной связи позволяет проводить исследования таких качественных свойств систем управления, как стабилизируемость, модальная управляемость, реконструируемость, расцепимость. В работе рассмотрены виды регуляторов, построение которых основано на принципе обратной связи. Они применяются при решении задач стабилизации, модального управления для систем, которые описывают процессы, носящие неоднородный характер. В частности, приведены примеры построения регуляторов, стабилизирующих системы с запаздыванием, дескрипторные системы, дискретно-непрерывные системы. Представлен расчет стабилизирующего регулятора разностного типа для реальной системы. Результаты могут быть полезны при синтезе управляющих воздействий в системах управления.

Ключевые слова: регуляторы по типу обратной связи, стабилизация, модальное управление, системы с запаздыванием, дискретно-непрерывные системы.

I. M. Borkovskaya, O. N. Pyzhkova

Belarusian State Technological University

THE CONSTRUCTION OF REGULATORS ON TYPE OF FEEDBACK FOR SOLVING THE PROBLEMS OF STABILIZATION AND CONTROLLABILITY OF DYNAMIC SYSTEMS

The use of linear feedback allows one to study such qualitative properties of control systems as stabilizability, modal controllability, reconstructibility, and decoupling. The paper considers the types of regulators, the construction of which is based on the principle of feedback, used in solving problems of stabilization, modal control for systems describing processes that are heterogeneous in nature. In particular, examples of constructing regulators stabilizing systems with delay, descriptor systems, discrete-continuous systems are considered. The calculation of a stabilizing regulator of a difference type for a real system is presented. The results can be useful in the synthesis of control actions in the control systems.

Key words: regulators on type of feedback, stabilization, modal control, delay systems, discrete-continuous systems.

Введение. Важную роль в качественной теории управления играет принцип обратной связи, когда управление формируется в виде $u(x), x \in R^n$, функции от текущего состояния $x^*(t), t \in T$, объекта исследуемого процесса. Принцип обратной связи, по словам Р. Калмана [1], составляет «основу всей автоматики» и включает «наиболее важную идею теории управления». Принцип обратной связи пропа-

гандировал Р. Беллман [2]. Следует отметить работы А. М. Летова по аналитическому конструированию регуляторов [3].

Обратная связь – основа основ современной техники. Трудно назвать какую-либо ее область, где бы не нашла применения обратная связь. Регуляторы температуры поддерживают нужную температуру, регуляторы давления – заданное давление, регуляторы скорости – требуемое чис-

ло оборотов вала, регуляторы напряжения – постоянство напряжения в электросети.

Обратная связь используется для стабилизации и управления положением движущихся в пространстве объектов. Ее применение позволило расширить исследования в области таких качественных свойств систем управления, как модальная управляемость, реконструируемость, расцепимость.

Система

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t > 0,$$

где A – постоянная $n \times n$ -матрица; $x(t)$ – n -вектор состояния системы; B – постоянная $n \times r$ -матрица; $u(t)$ – r -вектор управления, называется стабилизируемой обратной связью по состоянию, если существует такой регулятор вида $u(t) = Qx(t)$ (Q – постоянная $r \times n$ -матрица), при которой замкнутая система

$$\dot{x}(t) = (A + BQ)x(t)$$

асимптотически устойчива. Критерий стабилизируемости системы состоит в следующем: система стабилизируема тогда и только тогда, когда неустойчивые движения принадлежат управляемой части, что эквивалентно требованию

$$\text{rank}[\lambda I - A, B] = n$$

для любых комплексных чисел λ , $\text{Re } \lambda \geq 0$ (I – единичная матрица размера $n \times n$).

Так как решение задачи стабилизации не единственно, то на линейную обратную связь по состоянию можно накладывать дополнительные ограничения, например, требовать ее оптимальность по заданному критерию качества. Задача возможности стабилизации системы при воздействии дискретных регуляторов подробно изучалась В. И. Зубовым [4]. Исследовалась также стабилизируемость математических моделей (с малым параметром) конкретных физических процессов, а также изучалась задача построения стабилизирующих регуляторов по выходу для систем с неполной информацией.

Проблема модального управления или управления спектром является обобщением задачи стабилизации. Теория модального управления имеет множество практических приложений. Она развивалась совместно с другими разделами, например, с теорией аналитического конструирования регуляторов. Система называется модально управляемой (управляемой спектром), если для произвольного наперед заданного допустимого набора комплексных чисел существует такая линейная обратная связь, что спектр замкнутой системы совпадает с этим набором. Истоки проблемы модального управления лежат в классической теории регулирования. Современная история этой задачи начи-

нается с первой ее строгой постановки и обоснования Уонэмом [5]. Задача была решена для систем обыкновенных дифференциальных уравнений при наличии полной информации о состоянии.

Для систем с неполной информацией о состоянии были предложены различные способы построения регуляторов, обеспечивающих требуемый спектр в замкнутой системе.

В литературе получены необходимые и достаточные условия существования интегрального регулятора, решающего задачу модального управления при наличии возмущений. Исследовались различные аспекты построения динамических регуляторов: регуляторы минимального порядка, чувствительность, дискретные регуляторы, регуляторы в частотной области. Рассматривалась задача частичного модального управления, когда задается область расположения желаемого спектра. Исследовались дифференциально-разностные системы с точки зрения их модальной управляемости дифференциально-разностными регуляторами по типу обратной связи.

В данной работе изучены виды регуляторов, построение которых основано на принципе обратной связи. Они решают задачи стабилизации, модального управления для систем с запаздыванием, дескрипторных систем и в общем для систем, описывающих процессы, носящие неоднородный характер, – гибридных динамических систем.

Основная часть. Рассмотрим виды обратной связи, использующиеся при исследовании различных свойств систем с последствием.

В связи с проблемами стабилизации и модального управления системы с запаздывающим аргументом вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u(t) \in R, \quad x(t) \in R^n, \quad b \in R^n, \quad A_i \in R^{n \times n}, \quad i = 0, 1,$$

где h – постоянное запаздывание, исследовалась интегральная обратная связь в форме

$$u(t) = \int_{-h}^0 [dQ(s)]x(t+s), \quad t > 0,$$

где $Q(s)$ – $(1 \times n)$ -матрица-функция, компонентами которой являются функции ограниченной вариации на интервале $[-h, 0]$, а также более общая обратная связь

$$u(t) = \int_{-\theta}^0 [dQ(s)]x(t+s), \quad t > 0,$$

где $\theta \geq h$ подлежит определению. В случае, когда мера Стильбеса является дискретной и сосредоточена в точках $-jh, j = 0, \dots, N$, при-

ходим к линейной обратной связи в виде разностного регулятора

$$u(t) = \sum_{j=0}^N q'_j x(t - jh).$$

Такой регулятор более удобен с точки зрения его практической реализации. Частным случаем указанного выше регулятора является регулятор вида

$$u(t) = q'_0 x(t) + q'_1 x(t - h), \quad (2)$$

$$q_0, q_1 \in R^n,$$

не выводивший систему за пределы рассматриваемого класса.

Также для решения задач стабилизации систем с последействием находит применение регулятор вида

$$\sum_{j=0}^N p_j u(t - jh) = \sum_{j=0}^N q'_j x(t - jh)$$

и обобщающий его интегральный регулятор.

В статье [6] рассматривается возможность стабилизации двумерных динамических систем с запаздывающим аргументом с помощью регуляторов разностного типа, реализация которых существенно проще регуляторов интегрального типа. Представлены конструктивные алгоритмы построения регуляторов разностного типа, не требующие знания характеристических значений. В случае, когда вопрос о существовании разностного регулятора, стабилизирующего исходную систему, остается открытым, предлагается метод построения интегрального регулятора, основанный на теореме Винера – Пэли из теории целых функций конечной степени. Таким образом, показано, что в случае разрешимости системы относительно производной для $n=2$ и при условии выполнения представленных достаточных условий стабилизируемости, можно осуществить стабилизацию системы регуляторами разностного типа.

Рассмотрим систему с запаздывающим аргументом (1) и присоединим к системе регулятор типа обратной связи вида (2), не выводивший систему за пределы заданного класса. Систему назовем стабилизируемой, если существует регулятор вида (2) такой, что корни характеристического уравнения замкнутой системы имеют отрицательные действительные части. Исследуем систему (1) при $n=2$. Необходимое для стабилизации системы (1) условие

$$\text{rank}[\lambda I - A_0 - e^{-\lambda h} A_1, b] = n, \\ \forall \lambda \in C, \text{Re} \lambda \geq 0,$$

будем предполагать выполненным.

В случае $\det[b, A_1 b] = 0$ преобразование $x = Ty$, $T = [d, b]$ с произвольным вектором d таким, что $\det T \neq 0$, приводит систему к следующему виду:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} y(t) + \\ + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ \alpha_{21}^1 & \alpha_{22}^1 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),$$

где α_{11} , α_{21} , α_{22} , α_{11}^1 , α_{21}^1 , α_{22}^1 – некоторые действительные числа.

Если $\det[b, A_1 b] = 0$, $\det[b, A_0 b] = 0$, то система (1) стабилизируема регулятором (2) тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{11}, -\alpha_{11}^1)$ принадлежит области устойчивости Ω , граница которой описывается линиями

$$\beta = -\alpha \quad \text{и} \quad \begin{cases} \alpha + \beta \cos(hg) = 0, \\ g - \beta \sin(hg) = 0, \end{cases} \quad 0 < g < \frac{\pi}{h}.$$

Если $\det[b, A_1 b] = 0$, $\det[b, A_0 b] \neq 0$, то возможно дальнейшее упрощение системы

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \\ + \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Тогда система (1) стабилизируема обратной связью (2) при любом запаздывании h , $h > 0$.

В случае $\det[b, A_1 b] \neq 0$ после преобразования системы получаем:

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) + \\ + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t).$$

Тогда система (1) стабилизируема регулятором (2), если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ принадлежит области, которая ограничена линиями $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{12} = -1$, $\alpha_{12} = \alpha_{11} h - 1$. Если точка $(\alpha_{11}, \alpha_{12})$ не принадлежит указанной области, то вопрос о стабилизируемости системы остается открытым. Но если $e^{-\alpha_{11} h} + \alpha_{12} \neq 0$ для $\alpha_{11} > 0$, то существует интегральный регулятор, решающий проблему стабилизации. В силу теоремы Винера – Пэли с учетом вида

регулятора его коэффициенты в операторной форме достаточно искать в классе линейных комбинаций многочленов первой степени по отношению к e^{-ph} и целых функций, квадратично интегрируемых вдоль мнимой оси. Тогда, возвращаясь к оригиналам, получим искомым регулятор. Стабилизирующий регулятор имеет вид

$$v(t) = \frac{-\alpha_{11}r_1 - \alpha_{11} - r_2}{\alpha_{12} + e^{-\alpha_{11}h}} y_1(t) - (r_1 + \alpha_{11})y_2(t) + \int_{-h}^0 q_2(-\mu)y_2(t+\mu)d\mu.$$

Рассмотрим дискретно-непрерывную систему [7]:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h); \quad (3)$$

$$y(kh+h) = A_{21}x(kh) + A_{22}y(kh) + Bu(kh), \quad (4)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

В формулах (3), (4) $x(t) \in R^n$, $y(kh) \in R^m$, $u(kh) \in R^r$, $h > 0$, $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B$ – постоянные матрицы соответствующих размеров с начальными условиями

$$x(0) = x(+0) = x_0; \quad y(0) = y_0.$$

Для ее стабилизации в работе [7] используется регулятор вида

$$u(kh) = Q_1 x(kh) + Q_2 y(kh), \quad k = 0, 1, \dots,$$

где Q_1 и Q_2 – постоянные матрицы размеров $r \times n$ и $r \times m$ соответственно. Замкнутая система имеет вид

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(kh), \quad t \in [kh, (k+1)h);$$

$$y(kh+h) = (A_{21} + BQ_1)x(kh) + (A_{22} + BQ_2)y(kh).$$

Показано, что система (1), (2) является стабилизируемой указанным дискретным регулятором тогда и только тогда, когда

$$\text{rank}[\lambda I_{n+m} - \sum_h, \Delta] = n + m$$

для всех комплексных чисел λ , таких что $|\lambda| \geq 1$.

Рассмотрим теперь такой класс систем, как гибридные системы с многомерным (2D-мерным) временем [8, 9]:

$$\dot{x}_1(t, k) = A_{11}x_1(t, k) + A_{12}x_2(t, k) + B_1u(t, k), \quad (5)$$

$$t \in [0, +\infty);$$

$$x_2(t, k+1) = A_{21}x_1(t, k) + A_{22}x_2(t, k) + B_2u(t, k), \quad (6)$$

$$k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\dot{x}_1(t, k) = \frac{\partial x_1(t, k)}{\partial t}$; $x_1(t, k) \in R^{n_1}$; $x_2(t, k) \in R^{n_2}$;

$x_1(t, k), x_2(t, k)$ – n_1 - и n_2 -векторы состояния системы; $u(t, k) \in R^r$ – вектор управляющего воздействия, $t \geq 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$; $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2$ – постоянные матрицы соответствующих размеров с граничными (начальными) условиями

$$x_1(0, k) = x_1(k), \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x_2(t, 0) = x_2(t), \quad t \in [0, +\infty).$$

Присоединим к системе (5), (6) регулятор, не выводящий ее за пределы заданного класса:

$$u(t, k) = Q_1 x_1(t, k) + Q_2 x_2(t, k), \quad (7)$$

где Q_1 – матрица $r \times n_1$; Q_2 – матрица $r \times n_2$.

Систему (5), (6) назовем стабилизируемой (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (7), если найдутся такие матрицы Q_1, Q_2 , что замкнутая система (5), (6), (7) является сильно асимптотически устойчивой. Для того чтобы система (5), (6) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле сильной асимптотической устойчивости) регулятором (7), достаточно [8], чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < 1;$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} < 0.$$

Чтобы система (5), (6) в скалярном случае была стабилизируема (в смысле (α, γ) -устойчивости) регулятором (7), достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий

$$1) \left| a_{22} - \frac{b_2 a_{12}}{b_1} \right| < \gamma;$$

$$2) a_{11} - \frac{b_1 a_{21}}{b_2} \leq -\alpha.$$

Отметим возможность построения стабилизирующих регуляторов в применении к такому важному классу систем управления, как дескрипторные системы с запаздывающим аргументом [6] вида

$$S\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + bu(t), \quad t > 0, \quad (8)$$

$$u(t) \in R, \quad x(t) \in R^n, \quad S, A_i \in R^{n \times n}, \quad i = 0, 1,$$

при воздействии линейной обратной связи

$$u(t) = q'_0 x(t) + q'_1 x(t-h), \quad (9)$$

$$q_0, q_1 \in R^n.$$

Такие системы достаточно достоверно описывают в физически реальных переменных работу систем автоматического управления и технологические процессы.

Систему (8), где $\det S = 0$, но S – ненулевая, назовем $Sx(t)$ -стабилизируемой регулятором вида (9), если существует регулятор (9) такой, что замкнутая система (8), (9) является $Sx(t)$ -асимптотически устойчивой.

Обратную связь (9) запишем в операторной форме

$$u(t) = [\beta_1(e^{-ph}); \beta_2(e^{-ph})]x(t);$$

$$\beta_1(e^{-ph}) = \beta_{10} + \beta_{11}e^{-ph};$$

$$\beta_2(e^{-ph}) = \beta_{20} + \beta_{21}e^{-ph};$$

$$[\beta_{10}, \beta_{20}] = q'_0; [\beta_{11}, \beta_{21}] = q'_1;$$

$$\beta_{ij} \in R, i = 1, 2, j = 0, 1,$$

где e^{-ph} – оператор запаздывания; $e^{-ph}x(t) = x(t-h)$, $p = d/dt$.

Используя канонические формы для систем с запаздывающим аргументом, проведем анализ возможности построения стабилизирующего регулятора в двумерном случае.

Пусть $\det[b, Sb] \neq 0$. Тогда найдется такая матрица D , $\det D \neq 0$, что преобразование $x = Dy$ приведет исходную систему (8) к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t). \quad (10)$$

Дальнейшее преобразование системы в случае $\alpha_{11} \neq 0$ приводит ее к следующему виду:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = z_1(t) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} z_1(t) + \beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \\ + \beta_{21} z_2(t-h). \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем:

$$z_1(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} (\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h)),$$

тогда

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{1}{\beta_{10}} (\beta_{11} z_1(t-h) + \beta_{20} z_2(t) + \beta_{21} z_2(t-h)) + \alpha_1 z_1(t-h) + \alpha_2 z_2(t-h).$$

Выбирая β_{11}, β_{10} таким образом, чтобы $\beta_{11} = \beta_{10} \alpha_1$, имеем:

$$\dot{z}_2(t) = -\frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} z_2(t) + \left(-\frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} + \alpha_2 \right) z_2(t-h).$$

Для обеспечения асимптотической устойчивости последнего уравнения определим условия, при которых отрицательны действительные части корней характеристического уравнения

$$\lambda + \frac{\beta_{20}}{\beta_{10}} - \left(\alpha_2 - \frac{\beta_{21}}{\beta_{10}} \right) e^{-\lambda h} = 0. \quad (11)$$

Корни уравнения

$$\lambda + \alpha + \beta e^{-\lambda h} = 0$$

имеют только отрицательные действительные части в том и только в том случае, если точка (α, β) принадлежит области устойчивости Ω , описанной ранее. В случае, когда точка с координатами $(\beta_{20}/\beta_{10}, \beta_{21}/\beta_{10} - \alpha_2)$ принадлежит области устойчивости Ω , корни уравнения (11) будут иметь отрицательные действительные части. При соответствующем выборе коэффициентов регулятора всегда можно обеспечить попадание точки в требуемую область, а следовательно, и система (8) в этом случае является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Пусть $\alpha_{11} = 0$. Тогда система имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{11}^1 & \alpha_{12}^1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} y(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t);$$

$$\begin{cases} \dot{y}_2(t) = \alpha_{12} y_2(t) + \alpha_{11}^1 y_1(t-h) + \alpha_{12}^1 y_2(t-h), \\ 0 = \beta_{10} y_1(t) + \beta_{11} y_1(t-h) + \beta_{20} y_2(t) + \beta_{21} y_2(t-h). \end{cases}$$

При $\alpha_{11}^1 = 0$ первое уравнение системы устойчиво тогда и только тогда, когда точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1)$ принадлежит вышеуказанной области устойчивости Ω .

Если $\alpha_{11}^1 \neq 0$, то перейдем при помощи невырожденного преобразования к системе вида

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{z}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t) +$$

$$+ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} z(t-h) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v(t),$$

из которой получаем:

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = \alpha_{12}z_2(t) + z_1(t-h), \\ 0 = \beta_{10}z_1(t) + \beta_{11}z_1(t-h) + \\ + \beta_{20}z_2(t) + \beta_{21}z_2(t-h). \end{cases}$$

Пусть $\beta_{10} = 0$, $\beta_{11} = 1$, тогда

$$0 = z_1(t-h) + \beta_{21}z_2(t-h) + \beta_{20}z_2(t).$$

Имеем:

$$\dot{z}_2(t) = (\alpha_{12} - \beta_{20})z_2(t) - \beta_{21}z_2(t-h). \quad (12)$$

Выбирая β_{20}, β_{21} так, чтобы точка $(-\alpha_{12} + \beta_{20}, \beta_{21})$ попадала в область устойчивости Ω , обеспечим асимптотическую устойчивость уравнения (12). Исходная система является $Sx(t)$ -стабилизируемой.

Таким образом, для $Sx(t)$ -стабилизируемости системы (8) регулятором вида (9) достаточно, чтобы выполнялось условие $\det[b, Sb] \neq 0$ и при этом α_{11} из (10) было отлично от нуля. В случае $\det[b, Sb] \neq 0$, $\alpha_{11} = 0$ систему можно стабилизировать либо если $\alpha_{11}^1 = 0$ и точка $(-\alpha_{12}, -\alpha_{12}^1) \in \Omega$, либо если $\alpha_{11}^1 \neq 0$. В процессе обоснования утверждения получены коэффициенты стабилизирующего регулятора.

Проиллюстрируем построение стабилизирующего регулятора на примере реальной системы. Рассмотрим систему управления числом Маха в аэродинамической трубе [10]. Линеаризованная модель управления числом Маха представляет собой систему трех уравнений с запаздыванием в одной из переменных состояния. В установившемся режиме (постоянной скорости вентилятора, степени впрыска жидкого азота, степени входа газового азота) отклик отклонения числа Маха δM на малое изменение угла поворота привода $\delta\theta_A$ описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \tau \delta \dot{M}(t) + \delta M(t) &= k \delta \theta(t-h); \\ \delta \dot{\theta}(t) + 2\psi \omega \delta \theta(t) &= \omega^2 \delta \theta_A(t), \end{aligned}$$

где $\delta\theta(t)$ – угол поворота привода; τ, k, h, ψ, ω – параметры, предполагаемые постоянными, когда отклонения $\delta M, \delta\theta, \delta\theta_A$ малы. Уравнения могут быть записаны в форме с переменными состояния:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -ax_1 + kax_2(t-h); \\ \dot{x}_2 &= x_3; \\ \dot{x}_3 &= -\omega^2 x_2 - 2\psi\omega x_3 + \omega^2 u, \end{aligned}$$

где $a = 1/\tau$, $x_1 = \delta M$, $x_2 = \delta\theta$, $x_3 = \delta\dot{\theta}$, $u = \delta\theta_A$.

Введем управление по типу обратной связи:

$$u(t) = q'x(t) = [q_1, q_2, q_3]x(t).$$

Присоединим его к системе и рассмотрим задачу стабилизации исходной системы управления. Система станет асимптотически устойчивой, если действительные части корней ее характеристического уравнения будут отрицательны. Характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$\det \begin{bmatrix} \lambda + a & \lambda - kae^{-\lambda h} & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -q_1 & -q_2 + \omega^2 & \lambda - q_3 + 2\psi\omega \end{bmatrix} =$$

$$= (\lambda + a)\lambda(\lambda - q_3 + 2\psi\omega) + q_1(\lambda - kae^{-\lambda h}) + (-q_2 + \omega^2)(\lambda + a) = 0.$$

Положим $q_1 = 0$. Имеем:

$$(\lambda + a)(\lambda(\lambda - q_3 + 2\psi\omega) + (-q_2 + \omega^2)) = 0.$$

Корень $\lambda = -a$ лежит в левой полуплоскости. Пусть $\lambda^2 + \lambda(2\psi\omega - q_3) + (\omega^2 - q_2) = 0$.

Решая систему

$$\begin{aligned} 2\psi\omega - q_3 &= 2a, \\ \omega^2 - q_2 &= a^2, \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} q_2 &= \omega^2 - a^2, \\ q_3 &= 2\psi\omega - 2a. \end{aligned}$$

Тогда характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$(\lambda + a)(\lambda + a)^2 = 0,$$

где $a > 0$. Таким образом, при помощи разностного регулятора удалось решить задачу стабилизации.

Заключение. В работе проведен анализ возможностей применения регуляторов, построенных по типу обратной связи, для решения задач качественной теории управления для систем, описывающих процессы, носящие неоднородный характер. В частности, рассмотрены примеры построения регуляторов, стабилизирующих системы с запаздыванием, дискретно-непрерывные системы. Результаты могут быть полезны при синтезе управляющих воздействий в реальных системах управления.

Литература

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. М.: Мир, 1971. 400 с.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

3. Летов А. М. Аналитическое конструирование регуляторов // *АиТ*. 1961. № 4. С. 425–435.
4. Зубов В. И. Лекции по теории управления. М.: Наука, 1975. 495 с.
5. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1967. Vol. AC-12. P. 660–665.
6. Борковская И. М. Достаточные условия стабилизируемости дескрипторных систем с запаздыванием в двумерном случае // *Труды БГТУ*. 2010. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 27–30.
7. Марченко В. М., Борковская И. М. Устойчивость и стабилизация линейных гибридных дискретно-непрерывных стационарных систем // *Труды БГТУ*. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 7–10.
8. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. О стабилизации некоторых видов гибридных динамических систем // *Труды БГТУ*. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 5–10.
9. Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Задачи управления и стабилизации для гибридных динамических систем // *Труды БГТУ*. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 5–9.
10. Manitius A. Z. Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation // *IEEE Trans. Automat. Control*. 1984. Vol. AC-29. P. 1058–1068.

References

1. Kalman R., Falb P., Arbib M. *Ocherki po matematicheskoy teorii system* [Essays on the mathematical theory of systems]. Moscow, Mir Publ., 1971. 400 p.
2. Bellman R., Kuk K. L. *Differentsial'no-raznostnyye uravneniya* [Differential-difference equations]. Moscow, Mir Publ., 1967. 548 p.
3. Letov A. M. Analytical Design of Regulators. *AiT* [Automation and Remote Control], 1961, no. 4, pp. 425–435 (In Russian).
4. Zubov V. I. *Lektsii po teorii upravleniya* [Lectures on control theory]. Moscow, Nauka Publ., 1975. 495 p.
5. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable linear systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1967, vol. AC-12, pp. 660–665.
6. Borkovskaya I. M. Sufficient conditions for the stabilization of descriptor systems with a delay in the two-dimensional case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2010, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 27–30 (In Russian).
7. Marchenko V. M., Borkovskaya I. M. Stability and stabilization of the linear hybrid discrete-continues stationary systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 7–10 (In Russian).
8. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. On the stabilization of some kinds of hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 5–10 (In Russian).
9. Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The problems of control and stabilization for hybrid dynamic systems. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2, pp. 5–9 (In Russian).
10. Manitius A. Z. Feedback controllers for a wind tunnel model involving a delay: analytical design and numerical simulation. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1984, vol. AC-29, pp. 1058–1068.

Информация об авторах

Борковская Инна Мечиславовна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Пыжкова Ольга Николаевна – кандидат физико-математических наук, заведующая кафедрой высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Information about the authors

Borkovskaya Inna Mechislavovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: borkovskaia@gmail.com

Pyzhkova Olga Nikolaevna – PhD (Physics and Mathematics), Head of the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olga.pyzhkova@gmail.com

Поступила 10.05.2019

УДК 519.624

И. Ф. Соловьева

Белорусский государственный технологический университет

**ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ МАЛОГО ПАРАМЕТРА
НА РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С ПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ**

В данной работе исследуются двухточечные граничные задачи с малым параметром при старшей производной. Для их решения предлагается модификация метода дифференциальной ортогональной прогонки. Идея метода заключается в переходе от исходной граничной задачи к совокупности трех задач Коши. Две задачи Коши решаются в прямом направлении, а третья задача – в обратном. Поскольку малый параметр, стоящий при старшей производной, очень мал, то решение вблизи граничных точек начинает быстро расти, и поэтому возникают пограничные или внутренние переходные слои. Чтобы замедлить рост решения и особенно рост градиента решения, в зонах пограничных слоев вводятся регулирующие множители, нейтрализующие профили пограничных слоев вблизи граничных точек. В работе изучается влияние малого параметра на решение граничной задачи с пограничным слоем, наглядная демонстрация которого представлена в виде графического решения примера с различным малым параметром при старшей производной. На графиках показано, как изменяется решение при уменьшении параметра. Решение примера получено при использовании пакета Mathcad.

Ключевые слова: малый параметр, пограничный слой, двухточечные граничные задачи.

I. F. Solov'yeva

Belarusian State Technological University

**STUDY OF THE INFLUENCE OF A SMALL PARAMETER
ON THE SOLUTION OF BOUNDARY PROBLEMS WITH A BOUNDARY LAYER**

This paper studies two-point boundary value problems with a small parameter with the highest derivative. To solve them, a modification of the method of differential orthogonal sweep is proposed. The idea of the method is to move from the initial boundary problem to the totality of three Cauchy problems. Two Cauchy problems are solved in the forward direction, and the third problem is in the opposite direction. Since the small parameter standing at the highest derivative is very small, the solution near the boundary points starts to grow rapidly, and therefore, boundary or internal transition layers appear. In order to slow down the growth of the solution, and especially the growth of the gradient of the solution, regulating factors are introduced in the zones of the boundary layers, neutralizing the profiles of the boundary layers near the boundary points. The paper studies the effect of a small parameter on the solution of a boundary problem with a boundary layer, a visual demonstration of which is presented in the form of a graphical solution of an example with a different small parameter with the highest derivative. The graphs show how the solution changes as the parameter decreases. The solution is obtained using the Mathcad package.

Key words: small parameter, boundary layer, two-point boundary value problems.

Введение. Граничные задачи с малым параметром при старшей производной являются математическими моделями с очень сложным характером поведения решений. Решение такого рода задач быстро меняется вблизи граничных точек, т. е. здесь мы наблюдаем наличие пограничных слоев [1].

Открытие теории пограничного слоя принадлежит Людвигу Прандтлю. Он сформулировал и обосновал большую часть ее развития. Самым простым случаем пограничного слоя является пример простой твердой стенки, вдоль которой протекает жидкая или газообразная среда, в непосредственной близости от которой стенка захватывает «тонкий» слой. Это и есть пограничный слой. Он образуется за счет вязкости анализируемой среды [1].

Рассмотрим движение частицы массой m , закрепленной на линейной пружине с коэффи-

циентом жесткости k и испытывающей сопротивление среды, коэффициент вязкости которой равен μ .

Применяя второй закон Ньютона, получим обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$mu''(t) + \mu u'(t) + ku(t) = 0,$$

где $u(t)$ – смещение частицы; t – время. Если частица начинает движение без начальной скорости, т. е. из состояния покоя, описываемого координатой u_0 , то начальные значения будут следующими: $u(0) = u_0$, $u'(0) = 0$. Представим, что смещение $u(t)$ – безразмерная величина. В качестве характерной длины можно взять начальное смещение u_0 , а в качестве характерного масштаба времени принять величину, обрат-

ную собственной частоте системы, т. е. $w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда уравнение, учитывающее начальные условия, примет вид

$$mw_0^2 y'' + \mu y' + mw_0 y = 0, \\ y(0) = 1, y'(0) = 0, x > 0.$$

Здесь $mw_0 \ll 1$. Полученная задача – задача с малым параметром при старшей производной.

Рассмотрим случай, когда упругая сила пружины задана в виде нелинейной функции:

$$f = k_1 u + k_2 u^2.$$

Тогда уравнение с малым параметром при старшей производной примет следующий вид:

$$mw_0^2 y'' + \mu w_0 y' + k_1 u_0 y + k_2 u_0^2 y^2 = 0.$$

Явление нелинейности данного уравнения характеризуется наиболее полно величиной $\frac{k_2}{k_1} u_0 = \varepsilon$. Малый параметр ε оказывает очень сильное влияние на решение граничных задач. Особенно его влияние проявляется в узких зонах вблизи граничных точек. Здесь решение начинает очень быстро расти, и процесс его нахождения становится затруднительным.

Постановка задачи. Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной вида [2]

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Задача (1) является задачей с одним пограничным слоем, а задача (2) – задачей с двумя пограничными слоями.

Задачи вида (1), (2) являются математическими моделями диффузионно-конвективных процессов и называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудностей решения задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости данного численного процесса и быстром росте решения и градиента решения вблизи граничных точек.

Для численного решения граничных задач с пограничным слоем вида (1), (2) предлагается модификация метода дифференциальной орто-

гональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев соответствующих регулирующих множителей, стабилизирующих поведение решения и его градиента. Этот метод позволяет применить единый подход к решению граничных задач с одним и двумя пограничными слоями.

1. Рассмотрим, например, граничную задачу вида (2), т. е. задачу с двумя пограничными слоями и с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной. Представим ее в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -\frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{b(x)}{\varepsilon} y_1, \quad 0 < x < 1, \quad \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (3)$$

с заданными граничными условиями:

$$y_1(0) = A, \quad y_2(0) = B. \quad (4)$$

2. Введем в полученную систему обыкновенных дифференциальных уравнений (3) множители $m_2(x, \varepsilon) > 0$, $m_1(x, \varepsilon) > 0$, регулирующие поведение функций $y(x)$ и $y'(x)$, т. е. самого решения и градиента решения вблизи пограничных слоев, где, как правило, решение и его градиент быстро растут. При выборе этих множителей нужно учитывать, чтобы произведения $m_1(x, \varepsilon)y_1(x)$, $m_2(x, \varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы [2].

3. Рассмотрим вспомогательную функцию $Q(x)$ и новые неизвестные функции $u(x)$ и $v(x)$. Получим выражение для $y(x)$ и $y'(x)$:

$$\begin{aligned} m_1(x, \varepsilon)y_1(x) &= \sin Q(x)u(x) + \cos Q(x)v(x), \\ m_2(x, \varepsilon)y_2(x) &= \cos Q(x)u(x) - \sin Q(x)v(x). \end{aligned} \quad (5)$$

4. Исходную граничную задачу представим в виде совокупности трех соответствующих задач Коши для функций $Q(x)$, $u(x)$, $v(x)$. При решении задач Коши для функций $Q(x)$ и $u(x)$ применим прямой ход дифференциальной ортогональной прогонки:

$$Q' = \frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2'}{2m_2} \sin 2Q - \left(\frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} + \frac{m_1}{m_2} \right) \cos^2 Q, \quad (6)$$

$$Q(0) = \frac{\pi}{2},$$

$$\begin{aligned} u' &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q + \frac{m_2'}{m_2} \cos^2 Q \right] u - \\ &\quad - m_2 \frac{f}{\varepsilon} \cos Q, \quad (7) \\ u(0) &= Am_1(0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Получив численные значения для нахождения функций $Q(x)$ и $u(x)$ в каждой точке заданного отрезка, будем осуществлять обратный ход метода прогонки.

Обратный ход прогонки для решения задачи Коши и нахождения функции $v(x)$ иллюстрируют формулы (8). При этом движение идет с конца отрезка, в котором начальные условия уже получены с учетом значений $Q(1)$ и $u(1)$ за счет прямого хода прогонки.

Учитывая эти значения функции на правом конце интервала как начальные и осуществляем обратный ход метода дифференциальной ортогональной прогонки, используя следующие формулы:

$$v' = \left[-\frac{m_2'}{m_2} \sin 2Q + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \cos 2Q + 2 \frac{m_1}{m_2} \cos^2 Q - \frac{m_1}{m_2} \right] u + \left[\frac{m_2'}{m_2} \sin^2 Q - \frac{1}{2} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2 b}{m_1 \varepsilon} \right) \sin 2Q \right] v + m_2 \frac{f}{\varepsilon} \sin Q, \quad (8)$$

$$v(1) = \frac{1}{\cos Q(1)} [B - \sin Q(1)] u(1), \quad \cos Q(1) = 0.$$

Полученные задачи Коши являются благоприятными в вычислительном отношении. При этом каждая задача Коши вида (6)–(8) решается по формулам известных численных методов, например, Рунге – Кутта, а также В-устойчивых и Д-устойчивых методов [3].

Проследим на примере, как малый параметр влияет на решение граничной задачи [4]. Будем придавать параметру ε различные значения, начиная с достаточно больших и заканчивая малыми значениями, и увидим, как меняется при этом решение граничной задачи.

Пример. Методом дифференциальной ортогональной прогонки получить решение граничной задачи с различными значениями малого параметра ε :

$$\varepsilon y'' + (1+x^2)y'(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 y(x) = -(x^2 + \exp(x)),$$

$$0 < x < 1, y(0) = -1, y(1) = 0.$$

Для решения данной задачи методом дифференциальной ортогональной прогонки воспользуемся математическим пакетом Mathcad, главными достоинствами которого являются простота использования, возможность создания таблиц и графиков. Поэтому решение представим в виде графиков.

Для первого решения задачи положим достаточно большое значение для малого параметра. Пусть $\varepsilon = 2$ (рис. 1).

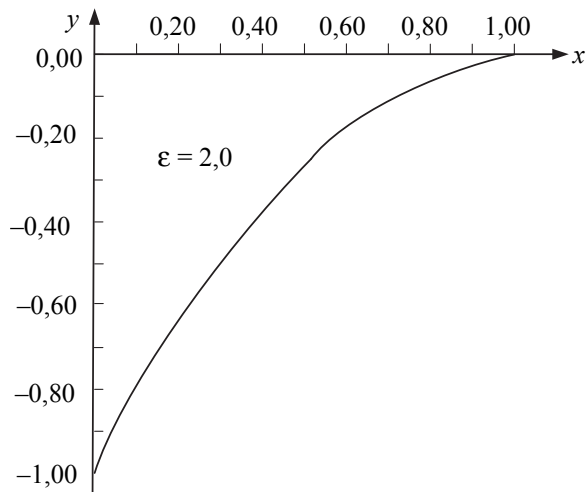


Рис. 1. Малый параметр $\varepsilon = 2$

Уменьшим значение малого параметра ε и проследим за полученными результатами решения (рис. 2).

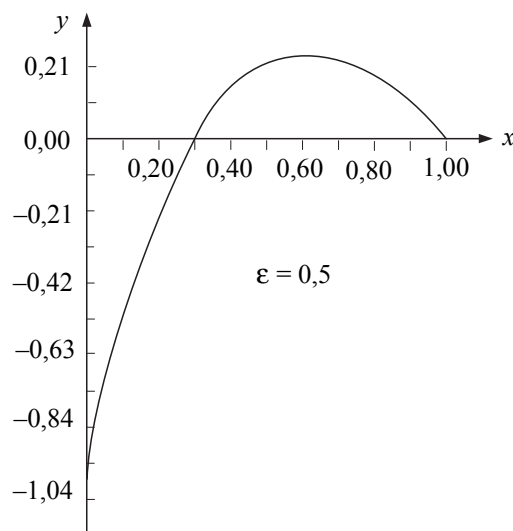


Рис. 2. Малый параметр $\varepsilon = 0,5$

Видно, что решение изменилось. На достаточно большом участке от 0,30 до 1,00 оно приняло положительные значения.

Далее, уменьшая малый параметр при старшей производной, получили практически совершенно новое решение, принимающее нулевые или положительные значения на всем рассматриваемом участке (рис. 3).

На рис. 1–3 видно, как изменяется решение одной и той же задачи в зависимости от малого параметра, стоящего при старшей производной.

Математики шутят, что малый параметр породил большую теорию. Ведь это правда. Задачи с малым параметром не теряют своего значения и в наши дни. В связи с быстро растущим техническим прогрессом появляется

очень много прикладных задач, математическими моделями которых становятся граничные задачи с малым параметром при старшей производной [5].

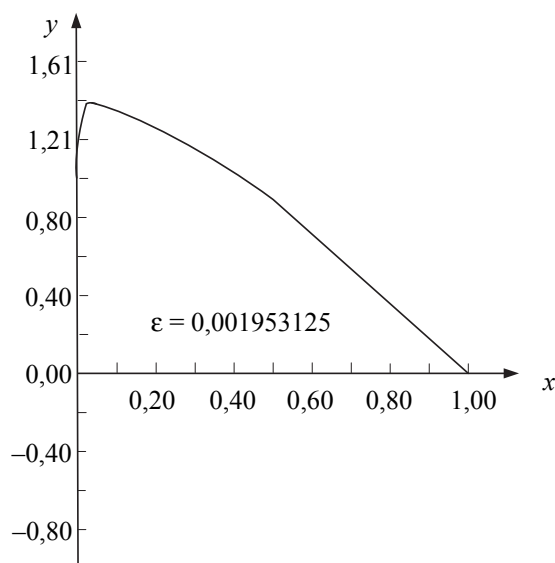


Рис. 3. Малый параметр $\varepsilon \approx 0,002$

Такие задачи широко распространены в механике, магнитодинамике, динамике жидкостей, в физике и других областях науки и техники. В качестве примеров задач с малым параметром при старшей производной можно привести задачи о течениях Навье – Стокса с большими числами Рейнольдса, задачи магнитной гидродинамики с большими числами Хартмана и т. д.

Пограничный слой является очень тонким слоем. Например, при полете птиц, бабочек, самолетов толщина пограничного слоя будет вычисляться в миллиметрах; у пароходов толщина пограничного слоя будет оцениваться в сантиметрах. Зато пограничный слой ветра над водой или сушей измеряется уже в метрах.

Задачи с пограничными слоями очень сложны в вычислительном отношении, а так как область их применения постоянно расширяется, то интерес к их решению неуклонно возрастает. Нужно не только применить численный метод решения задачи, но и реализовать выбранный алгоритм, используя тот или иной математический пакет. Большие сложности при решении данных задач возникают вблизи граничных точек, т. е. в зонах пограничных слоев, где наблюдается неограниченный рост решения, и особенно градиентов решения.

Проследим влияние пограничного слоя на решение задач на следующем примере.

Пример. Рассмотрим двухточечную граничную задачу с одним пограничным слоем:

$$\varepsilon y'' + y'(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \quad y(1) = 1,$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, стоящий при старшей производной.

Решим ее сначала как обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка. Составим характеристическое уравнение

$$\varepsilon \lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Общее решение получим в виде

$$y(x) = C_1 + C_2 e^{-\frac{x}{\varepsilon}}.$$

С учетом граничных условий ее частное решение примет вид

$$y(x) = \frac{1 - e^{-\frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}}.$$

Найдем $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y(x) = \tilde{y}(x)$. Понятно, что

$$\tilde{y}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Функция $\tilde{y}(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$. Решение представим в виде графика (рис. 4).

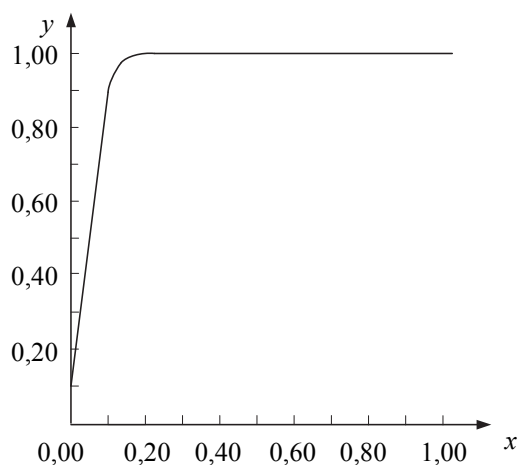


Рис. 4. Влияние пограничного слоя

Предположим, что в условии примера $\varepsilon = 0$. Тогда первое слагаемое обращается в 0, и получаем редуцированную задачу для заданного уравнения вида

$$y'(x) = 0, \quad 0 < x < 1, \quad y(1) = 1.$$

Ее решение: $y_0(x) \equiv 1$. Если $\varepsilon \rightarrow 0$, то функция $y(x) \rightarrow y_0(x)$, за исключением малой окрестности вблизи точки $x = 0$. Здесь функция $y(x)$ быстро изменяется в связи с выполнением

левого граничного условия $y(0)=0$. Это возможно осуществить только при быстром возрастании $y(x)$ в окрестности точки $x=0$, следовательно, мы наблюдаем возникновение пограничного слоя. Это хорошо видно на рис. 4. Пограничный слой находится вблизи окрестности левой граничной точки $x=0$. На малом участке заданного отрезка от точки $x=0$ до точки $x=0,2$ наблюдается быстрый рост решения. Оно изменяется от значения функции $y=0$ до $y=1$. На оставшемся отрезке значение функции остается постоянным.

Вместе с решением вблизи левого граничного условия неограниченно быстро растет градиент решения. Ширина пограничного слоя очень мала, примерно порядка ε . На правом граничном условии при $x=1$ пограничный слой отсутствует, так как $y_0(1)=\bar{y}(1)$.

Заключение. Любая математическая модель, описывающая реальные процессы в терминах дифференциальных уравнений, обязательно будет включать в себя различные параметры. Значения этих параметров в обычной

ситуации известны лишь приближенно с заданной точностью. Поэтому вопрос о характере поведения решений дифференциальных уравнений при малом изменении величины входящего в уравнение параметра всегда представляет принципиальный интерес.

Природа математических моделей такого рода задач объясняется сущностью процессов и явлений, которые описываются данными уравнениями.

Предложенный метод дифференциальной ортогональной прогонки наглядно продемонстрировал влияние малого параметра на решение граничных задач. Он достаточно прост и перспективен для решения граничных задач с пограничными слоями. Здесь не нужно решать громоздких систем уравнений. Регулирующие множители, стоящие перед решением и градиентом, нейтрализуют их рост непосредственно в зонах пограничных слоев. На рис. 1–3 видно изменение решения при изменении ε . Реализация метода с помощью пакета Mathcad доступна, удобна в обращении и легко представляется графиками.

Литература

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974. 712 с.
2. Соловьева И. Ф. Влияние пограничных слоев на решение граничных задач с малым параметром при старшей производной // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 12–14.
3. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем. М.: Мир, 1983. 186 с.
4. Холл Дж., Уатт Дж. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
5. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге – Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1983. 200 с.

References

1. Schlikhting G. *Teoriya pogranichnogo sloya* [Theory of the boundary layer]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 712 p.
2. Solov'yeva I. F. The influence of boundary layers on the solution of boundary problems with a small parameter with the highest derivative. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 12–14 (In Russian).
3. Dulan E., Miller Dzh., Shilders U. *Ravnomernyye chislennyye metody resheniya zadach s pogranichnym sloyem* [Uniform numerical methods for solving problems with initial and boundary layer]. Moscow, Mir Publ., 1983. 186 p.
4. Holl Dzh., Uatt Dzh. *Sovremennyye chislennyye metody resheniya obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy* [Modern numerical methods for solving ordinary differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1979. 312 p.
5. Dekker K., Verwer Ya. *Ustoychivost' metodov Runge – Kutta dlya zhestkikh nelineynykh differentsial'nykh uravneniy* [Stability of Runge – Kutta methods for stiff nonlinear differential equations]. Moscow, Mir Publ., 1983. 200 p.

Информация об авторе

Соловьева Ирина Федоровна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ira1234568@tut.by

Information about the author

Solov'yeva Irina Fedorovna – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ira1234568@tut.by

Поступила 27.04.2019

УДК 517.977

А. А. Якименко

Белорусский государственный технологический университет

ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА С СОИЗМЕРИМЫМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

В публикации рассмотрено достаточное условие модальной управляемости для стационарной динамической системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями. Дано определение задачи модального управления для исследуемой системы. Получено новое легко проверяемое условие модальной управляемости. Показано, что при выполнении этого условия регуляторы, решающие задачу модального управления, могут быть выбраны в классе дифференциально-разностных регуляторов. В статье получены такие регуляторы, как элементарные функции параметров исходной системы. Приведен пример решения задачи модального управления для рассматриваемой системы.

Ключевые слова: системы нейтрального типа, модальное управление, дифференциально-разностные регуляторы, обратная связь, запаздывание.

A. A. Yakimenka

Belarusian State Technological University

SUFFICIENT CONDITION OF MODAL CONTROLLABILITY FOR NEUTRAL TYPE SYSTEMS WITH COMMENSURATE DELAYS

The publication considers a sufficient modal controllability condition for a stationary dynamical system with a delayed argument of a neutral type with one input and commensurate delays. The definition of the modal control problem for the system under study is given. A new, easily verifiable condition of modal controllability is obtained. It is shown that when this condition is fulfilled, the regulators that solve the modal control problem can be selected in the class of difference-differential regulators. The article has obtained such regulators as elementary functions of the parameters of the original system. An example of solving the modal control problem for the system under consideration is given.

Key words: neutral type systems, modal control, differential-difference regulators, feedback control, delay.

Введение. Задача модального управления является одной из основных задач теории управления. Такая задача хорошо изучена для систем без запаздывания. Для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа [1–9] решение задачи модального управления значительно сложнее. Это обусловлено тем, что пространство состояний таких систем, как правило, бесконечномерно. Для систем запаздывающего типа в [4] получено достаточное условие решения задачи модального управления в классе дифференциально-разностных регуляторов. В данной статье получено обобщение этих результатов на системы нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями.

Основная часть. Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом нейтрального типа с одним входом и соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^N (A_j x(t-jh) + D_j \dot{x}(t-jh) + b_j u(t-jh)), \quad t > 0, \quad (1)$$

где $N \in \mathbb{N}$, $A_j, D_j, j=0, 1, \dots, N$ – постоянные $(n \times n)$ -матрицы, $D_0 = 0$; $h > 0$ – постоянное запаздывание; $b_j, j=0, 1, \dots, N$ – ненулевые n -векторы; u – скалярное управление.

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det \left[\lambda \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right) - \sum_{j=0}^N A_j e^{-j\lambda h} \right] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{nN} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0, \quad (2)$$

где $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h} x(t) \equiv x(t-jh)$), $\alpha_{n0} = 1$.

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} x^{(i)}(t-jh), \quad (3)$$

где $M \in \mathbb{N}$, $L \in \mathbb{Z}$, $L \geq 0$, q_{00}, q_{ij} – n -векторы;

$$x^{(i)}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^i}{dt^i} x(t); \quad x^{(0)}(t) \equiv x(t).$$

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (2), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}, i=0, 1, \dots, n; j=0, 1, \dots, nN; \tilde{\alpha}_{n0}=1$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (2) будет иметь следующий вид (ср. с (2)):

$$\det \left[\lambda \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right) - \sum_{j=0}^N A_j e^{-j\lambda h} - \sum_{j=0}^N b_j \left(q'_{00} + \sum_{i=0}^L \sum_{j=1}^M q'_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} \right) \right] \equiv \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{nN} \tilde{\alpha}_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} = 0.$$

Система (1) в операторной форме примет вид

$$\begin{aligned} & \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right) \dot{x}(t) = \\ & = \sum_{j=0}^N A_j e^{-j\lambda h} x(t) + \sum_{j=0}^N b_j e^{-j\lambda h} u(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Пусть выполнено условие

$$\det \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right) \equiv \text{const} \neq 0. \quad (5)$$

Умножим обе части системы (4) слева на матрицу $\left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right)^{-1}$. Тогда система (4) переписывается в виде

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^K \left(\tilde{A}_j e^{-j\lambda h} x(t) + \tilde{b}_j e^{-j\lambda h} u(t) \right), \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^K \tilde{A}_j e^{-j\lambda h} &= \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right)^{-1} \sum_{j=0}^N A_j e^{-j\lambda h}, \\ \sum_{j=0}^K \tilde{b}_j e^{-j\lambda h} &= \left(I_n - \sum_{j=1}^N D_j e^{-j\lambda h} \right)^{-1} \sum_{j=0}^N b_j e^{-j\lambda h}. \end{aligned}$$

Введем обозначения

$$m = e^{-\lambda h}, \quad \tilde{A}(m) = \sum_{j=0}^K \tilde{A}_j m^j, \quad \tilde{b}(m) = \sum_{j=0}^K \tilde{b}_j m^j.$$

Тогда система (6) переписывается в виде

$$\dot{x}(t) = \tilde{A}(m)x(t) + \tilde{b}(m)u(t). \quad (7)$$

Пусть выполнено условие

$$\det \left[\tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), \dots, \left(\tilde{A}(m) \right)^{n-1} \tilde{b}(m) \right] \equiv \text{const} \neq 0. \quad (8)$$

Из (8) следует, что имеет место соотношение

$$\left(\tilde{A}(m) \right)^n \tilde{b}(m) = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i(m) \left(\tilde{A}(m) \right)^i \tilde{b}(m), \quad (9)$$

где $\alpha_i(m)$ – многочлены переменной m .

Рассмотрим матрицу

$$T(m) = \left[t_1(m), t_2(m), \dots, t_n(m) \right],$$

где

$$\begin{aligned} t_n(m) &= \tilde{b}(m); \\ t_{n-1}(m) &= \tilde{A}(m)\tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\tilde{b}(m); \\ t_{n-2}(m) &= \left(\tilde{A}(m) \right)^2 \tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\tilde{A}(m)\tilde{b}(m) - \\ & \quad - \alpha_{n-2}(m)\tilde{b}(m); \\ & \quad \vdots \\ t_{n-j}(m) &= \left(\tilde{A}(m) \right)^j \tilde{b}(m) - \alpha_{n-1}(m)\left(\tilde{A}(m) \right)^{j-1} \tilde{b}(m) - \\ & \quad - \alpha_{n-2}(m)\left(\tilde{A}(m) \right)^{j-2} \tilde{b}(m) - \dots - \alpha_{n-j}(m)\tilde{b}(m); \\ & \quad j = 0, 1, \dots, n-1, \end{aligned}$$

где $\alpha_i(m), i=0, 1, \dots, n-1$ определены в (9).

Очевидно, что

$$\det T(m) = \det \left[\tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), \dots, \left(\tilde{A}(m) \right)^{n-1} \tilde{b}(m) \right] \equiv \text{const} \neq 0.$$

Введем новый вектор переменных y по формуле $x = T(m)y$. Несложно убедиться, что с новыми переменными система (7) переписывается в эквивалентной форме

$$\dot{y}(t) = \tilde{A}_1(m)y + \tilde{b}_1(m)u(t), \quad (10)$$

где $\tilde{A}_1(m) = T^{-1}(m)\tilde{A}(m)T(m)$; $\tilde{b}_1(m) = T^{-1}(m)\tilde{b}(m)$.

Нетрудно проверить, что эти матрицы имеют вид

$$\tilde{b}_1(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{A}_1(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{bmatrix},$$

где $\alpha_i = \alpha_i(m)$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ определены в (9).

Возьмем произвольные числа $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0, 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, nN$; $\tilde{\alpha}_{n0} = 1$ и присоединим к системе (1) регулятор

$$u(t) = [\eta_0 \ \eta_1 \ \dots \ \eta_{n-1} + \lambda \eta_n] y(t), \quad (11)$$

где $\eta_i = -\alpha_i(m) - \sum_{j=0}^{nN} \tilde{\alpha}_{ij} m^j$, $i = 0, 1, \dots, n-1$,

$$\eta_n = -\sum_{j=1}^{nN} \tilde{\alpha}_{nj} m^j.$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что регулятор (11) решает задачу модального управления для системы (10). Выполним в системе (10) обратную замену переменных $y = T^{-1}(m)x$. Тогда, очевидно, регулятор

$$u(t) = [\eta_0 \ \eta_1 \ \dots \ \eta_{n-1} + \lambda \eta_n] T^{-1}(m)x(t) \quad (12)$$

решает задачу модального управления для системы (7). Умножим обе части системы (7) слева на матрицу $I_n - \sum_{j=1}^N D_j m^j$ и перейдем от системы (7) к системе (4), которая в операторном виде эквивалентна системе (1). Следовательно, регулятор (12) решает задачу модального управления для системы (1). Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема. Если для системы (1) выполнены условия (5) и (8), то она модально управляема дифференциально-разностным регулятором (12).

Пример. Рассмотрим систему (1) с матрицами

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_{11}(m) & a_{12}(m) & a_{13}(m) \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) & a_{23}(m) \\ a_{31}(m) & a_{32}(m) & a_{33}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} a_{11}(m) &= -3 + 3m - 4m^2 + 3m^3 - m^4 + m^5, \\ a_{12}(m) &= 4 + m + 9m^2 - 3m^3 + 5m^4 - m^5 + m^6, \\ a_{13}(m) &= -1 - 10m - m^2 - 11m^3 + 2m^4 - 3m^5 + m^6, \\ a_{21}(m) &= m + 4m^2 - 4m^3 + m^4 - m^5 + m^6, \\ a_{22}(m) &= -m^2 + 6m^3 - 3m^4 + 3m^5 - m^6 + m^7, \\ a_{23}(m) &= 1 + m + 6m^3 - 7m^4 - 3m^6 + m^7, \\ a_{31}(m) &= -2 - 8m - 7m^2 + 2m^3 + 5m^4 + m^5, \\ a_{32}(m) &= 3 + 11m + 14m^2 + 6m^3 + 4m^4 + 5m^5 + m^6, \\ a_{33}(m) &= -3 - 13m - 27m^2 + 30m^3 - 11m^4 + 3m^5 + m^6, \end{aligned}$$

$$D(m) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ -m & -2m & 2m \\ -1 & 1 & 3+3m \end{bmatrix},$$

$$b(m) = \begin{bmatrix} -3 + m - m^2 \\ -m + m^2 - m^3 \\ -2 - 5m - m^2 \end{bmatrix}.$$

Тогда матрица $I_3 - D(m)$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ m & 1+2m & -2m \\ 1 & -1 & -2-3m \end{bmatrix}.$$

Ее определитель равен 1, следовательно, условие (5) выполнено. После перехода от системы (1) к системе (4) и умножения обеих частей системы (4) слева на матрицу $(I_3 - D(m))^{-1}$ приходим к системе (7) с матрицами

$$\tilde{A}(m) = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{11}(m) & \tilde{a}_{12}(m) & \tilde{a}_{13}(m) \\ \tilde{a}_{21}(m) & \tilde{a}_{22}(m) & \tilde{a}_{23}(m) \\ \tilde{a}_{31}(m) & \tilde{a}_{32}(m) & \tilde{a}_{33}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{11}(m) &= -4m^2 + m^4 + m^5, \\ \tilde{a}_{12}(m) &= 1 + m + 6m^2 + m^3 + 2m^4 + m^5 + m^6, \\ \tilde{a}_{13}(m) &= -3m - 3m^2 - 11m^3 - 5m^4 - m^5 + m^6, \\ \tilde{a}_{21}(m) &= 3m - m^4, \\ \tilde{a}_{22}(m) &= -3m - 2m^3 - m^5, \\ \tilde{a}_{23}(m) &= 1 + m + 7m^2 + 3m^3 + 2m^4 - m^5, \\ \tilde{a}_{31}(m) &= 1 + m - m^3, \\ \tilde{a}_{32}(m) &= -1 - 2m - m^2 - m^4, \\ \tilde{a}_{33}(m) &= 1 + 3m + 4m^2 + 2m^3 - m^4, \end{aligned}$$

$$\tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} -m - m^2 \\ m \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\tilde{A}(m)\tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} -2m - 2m^2 - m^3 \\ 1 + m + m^2 \\ 1 + m \end{bmatrix},$$

$$(\tilde{A}(m))^2 \tilde{b}(m) = \begin{bmatrix} 1 - m + 2m^2 + 2m^3 + m^4 \\ 1 - m - m^2 - m^3 \\ -m - m^2 \end{bmatrix},$$

а определитель матрицы $\begin{bmatrix} \tilde{b}(m), \tilde{A}(m)\tilde{b}(m), (\tilde{A}(m))^2\tilde{b}(m) \end{bmatrix}$ равен -1 .

Таким образом выполнено условие (8), следовательно, рассматриваемая система модально управляема.

Столбцы матрицы $T(m) = [t_1(m), t_2(m), t_3(m)]$ имеют вид

$$t_1(m) = \begin{bmatrix} 1 + 3m^2 + 3m^3 + m^4 \\ -m - 2m^2 - m^3 \\ -2m - m^2 \end{bmatrix},$$

$$t_2(m) = \begin{bmatrix} -m - m^2 - m^3 \\ 1 + m^2 \\ m \end{bmatrix},$$

$$t_3(m) = \begin{bmatrix} -m - m^2 \\ m \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\tilde{A}_1(m) = T^{-1}(m)\tilde{A}(m)T(m)$ в (10) имеет следующий вид:

$$\tilde{A}_1(m) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда регулятор, решающий задачу модального управления для системы (10), приобретает вид

$$u(t) = [\eta_0 \quad \eta_1 \quad \eta_2 + \lambda\eta_3]y(t),$$

где

$$\eta_0 = -1 - \sum_{j=0}^6 \tilde{\alpha}_{0j}m^j,$$

$$\eta_1 = 1 - \sum_{j=0}^6 \tilde{\alpha}_{1j}m^j,$$

$$\eta_2 = -1 - \sum_{j=0}^6 \tilde{\alpha}_{2j}m^j,$$

$$\eta_3 = -\sum_{j=0}^6 \tilde{\alpha}_{3j}m^j.$$

Для исходной системы искомый регулятор имеет следующий вид:

$$u(t) = [\eta_0 \quad \eta_1 \quad \dots \quad \eta_{n-1} + \lambda\eta_n]T^{-1}(m)x(t),$$

где

$$T^{-1}(m) = \begin{bmatrix} 1 & m & m \\ m & 1 + m^2 & m + m^2 \\ 2m & m + 2m^2 & 1 + 3m^2 \end{bmatrix}.$$

Заключение. В статье получен способ преобразования системы с запаздывающим аргументом нейтрального типа в систему запаздывающего типа. При выполнении описанных условий (5), (8) для такой системы получен регулятор, решающий задачу модального управления. Этот регулятор принадлежит к классу дифференциально-разностных регуляторов, который является наиболее простым в реализации. Также рассмотрен иллюстративный пример.

Литература

1. Марченко В. М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Доклады Академии наук БССР. 1978. № 5. С. 401–404.
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London: Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems // IEEE Trans. Automat. Contr. 1967. Vol. AC-12, no. 6. P. 660–665.
4. Кириллова Ф. М., Марченко В. М. Функциональные преобразования и некоторые канонические формы в линейных системах с запаздывающим аргументом. Минск, 1978. 28 с. (Препринт / Акад. наук БССР, № 7 (39)).
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circuits Systems Signal Process. 1986. Vol. 5, no. 1. P. 69–84.
6. Якименко А. А. Модальное управление одной запаздывающей системой // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 3–7.
7. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 18–21.
8. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 25–27.
9. Якименко А. А. Модальное управление одной системой нейтрального типа в общециклическом случае при кратных корнях // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 1. С. 5–8.

References

1. Marchenko V. M. On problem of modal control in linear systems with delay. *Doklady Akademii nauk BSSR* [Reports of the BSSR Academy of Science], 1978, no. 5, pp. 401–404 (In Russian).
2. Salamon D. Control and Observation of Neutral Systems. London, Pitman Press, 1984. 362 p.
3. Wonham W. M. On pole assignment in multi-input controllable systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 1967, vol. AC-12, no. 6, pp. 660–665.
4. Kirillova F. M., Marchenko V. M. *Funktsional'nyye preobrazovaniya i nekotoryye kanonicheskiye formy v lineynykh sistemakh s zapazdyvayushchim argumentom* [Functional transforms and some canonical forms for linear retarded systems]. Minsk, 1978. 28 p.
5. Spong M. W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems. *Circuits Systems Signal Process*, 1986, vol. 5, no. 1, pp. 69–84.
6. Yakimenka A. A. Modal control for one delayed system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 3–7 (In Russian).
7. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 18–21 (In Russian).
8. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 25–27 (In Russian).
9. Yakimenka A. A. Modal control for one neutral type system in general cyclic case with double roots. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).

Информация об авторе

Якименко Андрей Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yakimenko@belstu.by

Information about the author

Yakimenka Andrei Aliksandravich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Higher Mathematics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yakimenko@belstu.by

Поступила 14.05.2019

УДК 514.76

Н. П. Можей

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

СПЕЦИАЛЬНО РЕДУКТИВНЫЕ ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В общем случае задача исследования многообразий различных типов является достаточно сложной. Поэтому естественно рассматривать данную задачу в более узком классе многообразий, например, в классе однородных многообразий. В работе приведены результаты по исследованию трехмерных специально редуктивных однородных пространств. Определены основные понятия – изотропно-точная пара, редуктивное пространство, каноническое разложение, аффинная связность, тензоры кривизны и кручения, специально редуктивное пространство, алгебра голономии, форма Киллинга. Локальное изучение однородных пространств равносильно исследованию пар, состоящих из алгебры Ли и ее подалгебры. В статье описаны трехмерные специально редуктивные однородные пространства; для каждого такого пространства найдены в явном виде формы Киллинга, выписаны стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Ключевые слова: специально редуктивное пространство, группа преобразований, аффинная связность, тензор Риччи.

N. P. Mozhey

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

SPECIALLY REDUCTIVE HOMOGENEOUS SPACES

In general, the purpose of the research of manifolds of various types is rather complicated. Therefore, it is natural to consider this problem in a narrower class of manifolds, for example, in the class of homogeneous manifolds. The article presents the results of research of three-dimensional specially reductive homogeneous spaces. The basic notions, such as an isotropically-faithful pair, a reductive space, a canonical decomposition, an affine connection, curvature and torsion tensors, a specially reductive space, a holonomy algebra, Killing form are defined. The local study of homogeneous spaces is equivalent to the investigation of pairs consisting of Lie algebra and its subalgebra. The paper describes three-dimensional specially reductive homogeneous spaces. For each such space, Killing forms, standard homogeneous pseudo-Riemannian metrics, Levi-Chivita connections, curvature tensors, holonomy algebras, scalar curvatures, Ricci tensors have been found, it has been determined whether the Ricci-flat, Einstein, Ricci-parallel, locally symmetric, conformally flat space. The results obtained can find applications in mathematics and physics, since many fundamental problems in these fields are reduced to the study of invariant objects on homogeneous spaces.

Key words: specially reductive space, transformation group, affine connection, Ricci tensor.

Введение. П. К. Рашевский ввел в рассмотрение класс пространств аффинной связности с кручением, у которых при параллельном переносе сохраняются как тензор кривизны, так и тензор кручения; эти пространства он назвал симметрическими пространствами с кручением [1]. Соответствующий класс однородных пространств, получивших название «редуктивных пространств», изучается в дифференциальной геометрии и ее приложениях. Такие пространства, широко обобщающие римановы глобально симметрические пространства, обладают тем свойством, что все геодезические на них являются однородными [2]. М. Берже [3] изучал компактные однородные пространства с инвари-

антной римановой метрикой, которые являются естественно редуктивными. Естественно редуктивны также большинство примеров инвариантных Эйнштейновых метрик на компактных однородных пространствах (см. обзор [4]). Каждое односвязное стандартное однородное риманово пространство разложимо в прямое риманово произведение симметрического и специально редуктивного пространства [5, 6]. Поэтому, например, для изучения стандартных Эйнштейновых многообразий достаточно рассмотреть специально редуктивные пространства, которые и описываются в данной работе.

Основная часть. Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно

действует группа \bar{G} , $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется *изотропно-точной*, если точно изотропное представление \mathfrak{g} . Там, где это не будет вызывать разночтения, будем отождествлять подпространство, дополнительное к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$, и фактор-пространство $\mathfrak{m} = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$. Если подгруппа G связна, то однородное пространство G/G *редуктивно* при существовании разложения $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$, $\mathfrak{g} \cap \mathfrak{m} = 0$; $[\mathfrak{g}, \mathfrak{m}] \subset \mathfrak{m}$, а само разложение $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{m}$ называется *каноническим* [2]. Такое разложение определяет на однородном пространстве геодезически полную линейную связность с ковариантно постоянными тензорами кривизны и кручения. Обратное, односвязное многообразие с полной линейной связностью, имеющей ковариантно постоянные тензоры кривизны и кручения, является редуктивным однородным пространством относительно группы автоморфизмов этой связности (см. [7]).

Аффинной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется отображение $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{m})$ такое, что его ограничение на \mathfrak{g} – изотропное представление подалгебры, а все отображение является \mathfrak{g} -инвариантным. Если пространство допускает инвариантную аффинную связность, то оно является изотропно-точным [7]. Редуктивные пространства всегда допускают инвариантную аффинную связность. Тензор кручения $T \in \text{Inv}T_2^1(\mathfrak{m})$ и тензор кривизны $R \in \text{Inv}T_3^1(\mathfrak{m})$ имеют вид

$$T(x_m, y_m) = \Lambda(x)y_m - \Lambda(y)x_m - [x, y]_m,$$

$$R(x_m, y_m) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Редуктивное однородное пространство $M = G/G$ с разложением $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ называется *специально редуктивным*, если пространство \mathfrak{m} с умножением

$$x * y = [x, y]_m$$

не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением.

Одной из важнейших характеристик связности является группа голономии. *Алгебра Ли* \mathfrak{h}^* группы *голономии* инвариантной связности $\Lambda : \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ – это подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$ вида $V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots$, где V – подпространство, порожденное множеством $\{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}$. В случае специально редуктивного однородного риманова многообразия, которое является голономно неприводимым относительно римановой

связности (односвязное псевдориманово пространство является голономно неприводимым относительно канонической связности без кручения тогда и только тогда, когда алгебра \mathfrak{m} проста), алгебра голономии порождается преобразованиями вида $L_x : y \mapsto 1/2[x, y]_m$, $x, y \in \mathfrak{m}$ и действует неприводимо на \mathfrak{m} [8].

Будем описывать пару $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ при помощи таблицы умножения $\bar{\mathfrak{g}}$ с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$, $n = \dim \bar{\mathfrak{g}}$ и полагать, что \mathfrak{g} порождается e_1, \dots, e_{n-3} , а $\{u_1 = e_{n-2}, u_2 = e_{n-1}, u_3 = e_n\}$ – базис \mathfrak{m} . Для нумерации подалгебр используем запись $d.n$, для нумерации пар – $d.n.m$, здесь d – размерность подалгебры; n – номер подалгебры в $\mathfrak{gl}(3, \mathbb{R})$; m – номер пары $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Будем описывать связность через образы базисных векторов $\Lambda(u_1), \Lambda(u_2), \Lambda(u_3)$, тензор кривизны R – через $R(u_1, u_2), R(u_1, u_3), R(u_2, u_3)$, а тензор кручения T – через $T(u_1, u_2), T(u_1, u_3), T(u_2, u_3)$.

Теорема. Любое трехмерное специально редуктивное однородное пространство имеет следующий вид:

1.8.2	e_1	u_1	u_2	u_3
e_1	0	0	u_1	u_2
u_1	0	0	u_1	u_2
u_2	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

2.21.4	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3
e_1	0	e_2	u_1	0	$-u_3$
e_2	$-e_2$	0	0	u_1	u_2
u_1	$-u_1$	0	0	u_1	u_2
u_2	0	$-u_1$	$-u_1$	0	u_3
u_3	u_3	$-u_2$	$-u_2$	$-u_3$	0

Замечание. Здесь предполагается, что $\mathfrak{g} \neq \{0\}$. Для $\mathfrak{g} = \{0\}$ получаем следующие однородные пространства:

0.1.6	u_1	u_2	u_3
u_1	0	$2u_2$	$-2u_3$
u_2	$-2u_2$	0	u_1
u_3	$2u_3$	$-u_1$	0

0.1.7	u_1	u_2	u_3
u_1	0	u_3	$-u_2$
u_2	$-u_3$	0	u_1
u_3	u_2	$-u_1$	0

Действительно, трехмерные редуктивные однородные пространства с ненулевой подалгеброй \mathfrak{g} изучаются, например, в [9, 10]. Выбираем из них пространства, такие, что \mathfrak{m} не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением (в данном случае одномерных идеалов либо двумерных коммутативных идеалов).

Рассмотрим, например, случай 1.8.2. Очевидно, что \mathfrak{m} не содержит нетривиальных

идеалов с нулевым умножением. Обозначив через tr след эндоморфизма векторного пространства, рассмотрим билинейную форму

$$K(x, y) = \text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y), \quad x, y \in \bar{\mathfrak{g}}.$$

Форма K называется формой Киллинга алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$. Если форма Киллинга не вырождена, то она отрицательно определена. В случае 1.8.2 форма Киллинга имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Можно рассмотреть скалярное произведение $B(x, y) = -\text{tr}(\text{ad } x \circ \text{ad } y)$ алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ и ортогональное разложение алгебры $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$. Пара $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ редуцирна относительно данного разложения, т. е. $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ – прямая сумма, а ограничение скалярного произведения на \mathfrak{m} индуцирует G -инвариантную риманову метрику на однородном пространстве G/G . В случае 1.8.2 получаем, что стандартная однородная псевдориманова метрика принимает вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Риманова (псевдориманова) связность, соответствующая форме B , находится из соотношения

$$\Lambda(x)y_{\mathfrak{m}} = \frac{1}{2}[x, y]_{\mathfrak{m}} + u(x, y),$$

$$2B(u(x, y), z) = B(x, [z, y]_{\mathfrak{m}}) + B([z, x]_{\mathfrak{m}}, y)$$

для всех $x, y, z \in \mathfrak{m}$. Существует единственная риманова связность без кручения, называемая *Леви-Чивита связностью*. Тогда связность Леви-Чивита примет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

а тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии \mathfrak{h}^* имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тензор Риччи определяется через тензор кривизны следующим образом:

$$\text{Ric}(x, y) = \text{tr}\{z \rightarrow R(z, x)y\},$$

где x, y, z – произвольные касательные векторы на многообразии, в рассматриваемом случае

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С тензором Риччи связано несколько геометрических свойств многообразия. Многообразие называется *Риччи-плоским*, если тензор Риччи тождественно равен нулю. Более общее условие – многообразие является *Эйнштейновым*, если $\text{Ric} = \lambda B$ для некоторой константы λ . Условие *Риччи-параллельности* – ковариантная производная тензора Риччи равна нулю. Если ковариантная производная тензора кривизны равна нулю, т. е. $\Lambda(R) = 0$, многообразие называется *локально симметрическим*. Тензор Коттона (тензор Схоутена – Вейля) задается как тензор 3-го ранга, определяемый с помощью метрики:

$$C(x, y, z) = \nabla_z \text{Ric}(x, y) - \nabla_y \text{Ric}(x, z) + \\ + \frac{1}{2(n-1)} (\nabla_y RB(x, z) - \nabla_z RB(x, y)),$$

где $x, y, z \in \mathfrak{m}$, а R – скалярная кривизна. В размерности $n = 3$ равенство нулю тензора Коттона является необходимым и достаточным условием того, что многообразие будет *конформно-плоским*.

Пространство 1.8.2 не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), является Эйнштейновым (поскольку $\text{Ric} = \lambda B$ при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным (так как

ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально симметрическим (поскольку $\Lambda(R) = 0$), конформно-плоским (так как тензор Коттона равен нулю), а скалярная кривизна $R = 3/4$.

Рассмотрим теперь случай 2.21.4. Очевидно, что m не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением. Форма Киллинга имеет вид

$$K = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а ограничение формы Киллинга на подалгебру –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Стандартная однородная псевдориманова метрика примет вид

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

при этом тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии \mathfrak{h}^* имеет вид

$$\left\{ \begin{pmatrix} s_2 & s_1 & 0 \\ s_3 & 0 & s_1 \\ 0 & s_3 & -s_2 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тензор Риччи –

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство не является Риччи-плоским (так как тензор Риччи не равен нулю), является Эйнштейновым (поскольку $\text{Ric} = \lambda B$ при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным (так как ковариантная производная тензора Риччи равна нулю), локально симметрическим ($\Lambda(R) = 0$), конформно-плоским (поскольку тензор Коттона равен нулю), а $R = 3/4$.

В случае 0.1.6 m не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением, форма Киллинга –

$$K = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

стандартная однородная псевдориманова метрика имеет вид

$$B = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии –

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & s_2 & s_1 \\ -2s_1 & s_3 & 0 \\ -2s_2 & 0 & -s_3 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\},$$

а тензор Риччи –

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пространство не является Риччи-плоским, является Эйнштейновым (при $\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским, а $R = 3/4$.

Для случая 0.1.7 m не содержит нетривиальных идеалов с нулевым умножением, форма Киллинга –

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

тогда стандартная однородная псевдориманова метрика –

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а связность Леви-Чивита –

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кривизны –

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/4 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \\ 0 & -1/4 & 0 \end{pmatrix},$$

тензор кручения нулевой.

Алгебра голономии –

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & s_1 & s_2 \\ -s_1 & 0 & s_3 \\ -s_2 & -s_3 & 0 \end{pmatrix} \mid s_1, s_2, s_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Тогда тензор Риччи –

$$\text{Ric} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix},$$

пространство не является Риччи-плоским, является Эйнштейновым ($\lambda = 1/4$), Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским ($R = 3/4$).

Прямыми вычислениями для всех трехмерных редуцированных однородных пространств получаем, что других специально редуцированных трехмерных однородных пространств нет. В частности, не существует специально редуцированных трехмерных однородных пространств со стабилизатором размерности более двух.

Заключение. Описаны трехмерные специально редуцированные однородные пространства. Для каждого такого пространства найдены в явном виде формы Киллинга, их ограничение на подалгебру, выписаны стандартные однородные псевдоримановы метрики, связности Леви-Чивита, тензоры кривизны, алгебры голономии, скалярные кривизны, тензоры Риччи, определено, является ли пространство Риччи-плоским, Эйнштейновым, Риччи-параллельным, локально симметрическим, конформно-плоским. Полученные результаты могут найти приложения в математике и физике, поскольку многие фундаментальные задачи в этих областях сводятся к изучению инвариантных объектов на однородных пространствах.

Литература

1. Рашевский П. К. Симметрические пространства аффинной связности с кручением // Труды семинара по векторному и тензорному анализу. 1969. Вып. 8. С. 82–92.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К. Основы дифференциальной геометрии: в 2 т. М.: Наука, 1981. 2 т.
3. Berger M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive // Ann. Sci. Ecole Norm. Super. 1961. Vol. 15. P. 179–246.
4. Никоноров Ю. Г., Родионов Е. Д., Славский В. В. Геометрия однородных римановых многообразий // Современная математика и ее приложения. 2006. Т. 37. С. 1–78.
5. Родионов Е. Д. Односвязные компактные стандартные однородные Эйнштейновы многообразия с группой голономии $SO(n)$ // Известия Алтайского государственного университета. 1997. № 1. С. 7–10.
6. Фляйшер А. Алгебры инвариантных псевдоримановых связностей на однородных пространствах // Ученые записки Тартуского университета. 1988. Вып. 803. С. 132–142.
7. Картан Э. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. М.: Иностранная литература, 1949. 384 с.
8. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces // J. math. and mech. 1967. Vol. 16, no. 12. P. 1381–1394.

9. Можей Н. П. Трехмерные редуцируемые пространства разрешимых групп Ли // Известия Гомельского государственного университета имени Франциска Скорины. 2016. № 6. С. 74–81.

10. Можей Н. П. Трехмерные редуцируемые пространства неразрешимых групп Ли // Доклады Национальной академии наук Беларуси. 2017. Т. 61, № 1. С. 7–17.

References

1. Rashevskiy P. K. Symmetric spaces of affine connection with torsion. *Trudy seminar po vektornomu i tenzornomu analizu* [Proceedings of the seminar on vector and tensor analysis], 1969, issue 8, pp. 82–92 (In Russian).

2. Kobayasi Sh., Nomidzu K. *Osnovy differentsial'noy geometrii: v 2 tomakh* [Foundations of differential geometry: in 2 vol.]. Moscow, Nauka Publ., 1981. 2 vol.

3. Berger M. Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive. *Ann. Sci. Ecole Norm. Super.*, 1961, vol. 15, pp. 179–246.

4. Nikonorov Yu. G., Rodionov E. D., Slavskiy V. V. Geometry of homogeneous Riemannian manifolds. *Sovremennaya matematika i ee prilozheniya* [Modern Mathematics and Its Applications], 2006, vol. 37, pp. 1–78 (In Russian).

5. Rodionov E. D. Compact simply connected standard homogeneous Einstein manifolds with holonomy group $SO(n)$. *Izvestiya Altayskogo gosudarstvennogo universiteta* [Proceedings of the Altai State University], 1997, no. 1, pp. 7–10 (In Russian).

6. Flyaysher A. Algebras of invariant pseudo-Riemannian connections on homogeneous spaces. *Uchenyye zapiski Tartuskogo universiteta* [Scientific notes of the University of Tartu], 1988, issue 803, pp. 132–142 (In Russian).

7. Kartan E. *Geometriya grupp Li i simmetricheskiye prostranstva* [Geometry of Lie groups and symmetric spaces]. Moscow, Inostrannaya literatura Publ., 1949. 384 p.

8. Sagle A. On anticommutative algebras and homogeneous spaces. *J. math. and mech.*, 1967, vol. 16, no. 12, pp. 1381–1394.

9. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive spaces of solvable Lie groups. *Izvestiya Gomel'skogo gosudarstvennogo universiteta imeni Frantsiska Skoriny* [Proceedings of the Francis Skaryna Gomel State University], 2016, no. 6, pp. 74–81 (In Russian).

10. Mozhey N. P. Three-dimensional reductive spaces of insoluble Lie groups. *Doklady Natsional'noy akademii nauk Belarusi* [Reports of the National Academy of Sciences of Belarus], 2017, vol. 61, no. 1, pp. 7–17 (In Russian).

Информация об авторе

Можей Наталья Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры программного обеспечения информационных технологий. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Information about the author

Mozhey Natalya Pavlovna – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Software for Information Technologies. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki st., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: mozheynatalya@mail.ru

Поступила 29.03.2019

УДК 536.758

И. И. Наркевич

Белорусский государственный технологический университет

СТАТИСТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ПРЕДСКАЗАННОГО БРАЗОВСКИМ ПЕРЕХОДА ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ИЗ ОДНОРОДНОГО СОСТОЯНИЯ В НЕОДНОРОДНОЕ

Ранее с помощью двухуровневого молекулярно-статистического метода [1] было проведено изучение микроструктуры и термодинамических характеристик одиночных сферических кристаллических наночастиц. Получено уравнение для радиального дискретного профиля чисел заполнения n_l элементарных ячеек метода условных распределений, которые определяют локальную концентрацию частиц в окрестности любой из ячеек, центры которых образуют координационные сферы с номерами l ($l = 1, 2, \dots, L$) для гранецентрированной кубической (ГЦК) решетки. Разработана методика численного расчета унарных и бинарных функций распределения атомов или молекул в окрестности узлов кристаллической решетки. С их помощью рассчитаны радиальные смещения узлов деформированной ГЦК решетки и среднеквадратичные отклонения атомов (молекул) от новых положений узлов для наночастиц разных размеров ($L = 1-6$) при температуре $\theta = kT/\epsilon$ (ϵ – энергетический параметр потенциала Леннард-Джонса), которая меньше температуры тройной точки $\theta_{тр} = 0,7$ для простых молекулярных макроскопических систем. В данной статье разработанный для молекулярных систем двухуровневый статистический метод обобщается с целью описания структуры и термодинамических характеристик коллоидных систем с конкурирующими взаимодействиями притяжения и отталкивания.

Ключевые слова: наночастица, коллоидная система, двухуровневый статистический метод, коррелятивные функции, потенциалы средних сил, функционалы свободной энергии и энтропии.

I. I. Narkevich

Belarusian State Technological University

STATISTICAL JUSTIFICATION OF THE PREDICTED BRAZOVIAN TRANSITION OF A COLLOIDAL SOLUTION FROM A UNIQUE CONDITION TO A INHOMOGENEOUS

Previously, using the two-level molecular statistical method [1], the microstructure and thermodynamic characteristics of single spherical crystalline nanoparticles have been studied. An equation is obtained for the radial discrete profile of the filling numbers of n_l elementary cells of the conditional distributions method, which determine the local concentration of particles in the vicinity of any of the cells whose centers form coordination spheres with numbers l ($l = 1, 2, \dots, L$) for the face-centered cubic lattice (fcc lattice). A method for the numerical calculation of the unary and binary distribution functions of atoms or molecules in the vicinity of the lattice sites has been developed. With their help, the radial displacements of the nodes of the deformed fcc lattice and the standard deviations of atoms (molecules) from new sites of nanoparticles of different sizes ($L = 1-6$) have been calculated at a temperature $\theta = kT/\epsilon$ (ϵ is the energy parameter of Lennard-Jones potential), which is less than the triple point temperature $\theta_{tr} = 0.7$ for simple molecular macroscopic systems. In this article, the two-level statistical method developed for molecular systems is generalized to describe the structure and thermodynamic characteristics of colloidal systems with competing interactions of attraction and repulsion.

Key words: nanoparticle, colloid system, two-level statistical method, correlative functions, potentials of average forces, functionals of free energy and entropy.

Введение. Применение двухуровневого статистического метода [1] для описания структуры и термодинамических характеристик неоднородных молекулярных систем, в частности, сфе-

рических кристаллических наночастиц [2, 3], позволило установить зависимость температуры плавления $\theta_{пл}$ наночастиц от их размера, которая согласуется с экспериментальными дан-

ными (рис. 1). Полученные этим методом вариационные уравнения оказываются конечно-разностными аналогами интегрального уравнения Эйлера – Лагранжа, которое использовалось в работе [4] для описания фазовых переходов в терминах мезоскопических объемных фракций для систем, в которых мезоскопические неоднородности наблюдаются на масштабах, значительно превышающих размеры молекул.

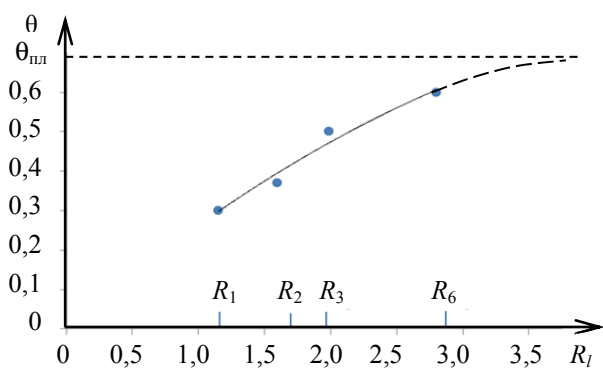


Рис. 1. Зависимость температуры плавления $\theta_{пп}$ сферических наночастиц от их радиуса R

Эти новые результаты для систем заряженных частиц с конкурирующими взаимодействиями притяжения и отталкивания согласуются с предсказаниями феноменологического подхода Бразовского [5] к описанию фазового перехода изотропной системы в неоднородное состояние.

В работе [6] на границе с ионным кристаллом в объеме ионной жидкости обнаружено затухающее пространственное колебание плотности, при этом амплитуда и длина затухания за счет учета флуктуационного вклада имеют качественно иное поведение, чем их аналоги в приближении среднего поля (MF).

В работе [7] для интеркаляционных систем статистически рассчитаны равновесные характеристики подсистемы подвижных зарядов. В случае достаточно малых электрических полей распределения заряда и концентрации частиц описываются линейным дифференциальным уравнением четвертого порядка.

Основная часть. В данной работе выполнено численное исследование функционала свободной энергии $F\{n_l\}$ неоднородной коллоидной системы с использованием потенциала SALR (Short-range Attraction and Long-rang Repulsion) для описания взаимодействия между коллоидными частицами в водном растворе ($l = 1, 2, \dots, M$; M – общее число элементарных ячеек, на которые разделен весь макроскопический объем V , т. е. $M = V / \omega$, ω – объем одной ячейки; n_l – числа заполнения ячеек с номерами l , т. е. концентрация коллоидных частиц в окрестности ячейки ω_l). Установлено, что большой

термодинамический функционал $\Omega\{n_l\} = F\{n_l\} - \mu \sum n_l$ таких систем в состоянии равновесия в соответствующей области термодинамических параметров имеет несколько минимумов, соответствующих разным значениям волновых чисел χ в системе с одномерным гармоническим, т. е. неоднородным, распределением плотности. Для одного из волновых чисел значение функционала $\Omega\{n_l\}$ меньше, чем для однородного изотропного состояния ($\chi = 0$). В расчетах использовался потенциал SALR в виде суммы двух членов: потенциала Леннард-Джонса и экранированного потенциала Кулона, которые записывались в безразмерной форме ($A = 1,27$; $\alpha = 0,5$):

$$U(r) = 4(r^{-12} - r^{-6}) + Ar^{-1}e^{-\alpha r}. \quad (1)$$

Здесь и далее расстояния и потенциалы рассчитываются соответственно в единицах линейного (σ) и энергетического (ϵ) параметров потенциала Леннард-Джонса.

В дальнейших расчетах используется система интегральных уравнений для потенциалов средних сил ϕ_{ij} , которая в случае однокомпонентной системы с неоднородным полем чисел заполнения n_l ($i, j, l = 1, 2, \dots, M$) имеет следующий вид [1, 2]:

$$f_{ij}(\bar{q}_i, \{n_l\}) = \frac{n_{ij}^{aa}}{n_i} f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\}) + \frac{n_{ij}^{av}}{n_i} f_{ij}^{(a)}\{n_l\}. \quad (2)$$

Здесь $n_{ij}^{\mu\nu}$ – двухъячеечные числа заполнения всевозможных пар ячеек объемами ω_i и ω_j , определяющие вероятность нахождения частицы сорта μ в ячейке ω_i и частицы сорта ν в ячейке ω_j ($\mu, \nu = a, v$; a – для реальных частиц; v – для не взаимодействующих квазичастиц, отвечающих за состояния с вакантными ячейками). Функционал $f_{ij}(\bar{q}_i, \{n_l\}) = \exp\{-\beta \phi_{ij}(\bar{q}_i, \{n_l\})\}$, а вспомогательные функционалы $f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\})$ и $f_{ij}^{(a)}\{n_l\}$ находятся в результате усреднения с помощью вспомогательных нормированных на единицу унарных функций $\hat{F}_{11}^*(\bar{q}_j, \{n_l\})$ и $\hat{F}_{11}^*(\bar{q}_i, \{n_l\})$ соответственно ($\beta = 1 / \theta$ – обратная безразмерная температура, $\theta = kT$):

$$f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\}) = \int_{\omega_j} \exp\{-\beta U(|\bar{q}_i - \bar{q}_j|)\} \hat{F}_{11}^*(\bar{q}_j, \{n_l\}) d\bar{q}_j, \quad (3)$$

$$f_{ij}^{(a)}\{n_l\} = \int_{\omega_i} f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\}) \hat{F}_{11}^*(\bar{q}_i, \{n_l\}) d\bar{q}_i, \quad (4)$$

где

$$\hat{F}_{11}^*(\bar{q}_j, \{n_l\}) = \frac{\exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \varphi_{jk}(\bar{q}_j, \{n_l\})\right\}}{\int_{\omega_j} \exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \varphi_{jk}(\bar{q}_j, \{n_l\})\right\} d\bar{q}_j}, \quad (5)$$

$$\hat{F}_{11}^*(\bar{q}_i, \{n_l\}) = \frac{\exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \varphi_{ik}(\bar{q}_i, \{n_l\})\right\}}{\int_{\omega_i} \exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \varphi_{ik}(\bar{q}_i, \{n_l\})\right\} d\bar{q}_i}. \quad (6)$$

В интегральных уравнениях (2) числа заполнения n_{ij}^{aa} и n_{ij}^{av} являются функционалами поля одноячеечных чисел заполнения n_l , определяющих локальную концентрацию частиц:

$$n_{ij}^{av} \{n_l\} = \frac{1}{2A_{ij}} \left\{ [(n_i - n_j)A_{ij} - 1] + \sqrt{[(n_i - n_j)A_{ij} - 1]^2 + 4n_i(1 - n_j)A_{ij}} \right\}, \quad (7)$$

$$n_{ij}^{aa} \{n_l\} = n_i - n_{ij}^{av} \{n_l\}, \quad A_{ij} = f_{ij}^{(a)} \{n_l\} - 1. \quad (8)$$

Из физических соображений ясно, и это подтверждается структурой уравнений (2)–(7), что в связи с короткодействующим экранированным потенциалом (1) потенциалы средних сил φ_{ij} должны наиболее сильно зависеть от локальной концентрации в ближайших ячейках, окружающих выделенную пару ячеек ω_i и ω_j . В связи с этим в численных расчетах достаточно учесть зависимость потенциалов $\varphi_{ij}(\bar{q}_i, \{n_l\})$ только от чисел заполнения в ячейках ω_i , ω_j и воспользоваться ранее разработанной [2] методикой усреднения в выражениях (3), (4). В соответствии с этой методикой запишем аппроксимированные выражения для вспомогательной нормированной на единицу унарной \hat{F}_{11}^* функции и бинарной $F_{11}^{(1)}$ функции, описывающих распределения центров тяжести коллоидных частиц внутри сфер с радиусами b_i , центры которых совпадают с узлами используемой решетки ($v_i = 4\pi b_i^3 / 3$, $v_j = 4\pi b_j^3 / 3$, $n_{ij} = n_{ij}^{aa}$):

$$\hat{F}_{11}^* \approx \frac{1}{v_i}, \quad F_{11}^{(1)} \approx \frac{n_{ij}}{Q_{ij}} \exp\{-\beta U(r)\}, \quad (9)$$

где нормирующий множитель

$$Q_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \int_{v_i} d\mathbf{v}_i \int_{v_j} e^{-\beta U(r)} d\mathbf{v}_j = \int_{v_i} I_{ij}(\rho_i, b_j) d\mathbf{v}_i, \quad (10)$$

$$I_{ij}(\rho_i, b_j) = \int_{v_j} e^{-\beta U(r)} d\mathbf{v}_j. \quad (11)$$

Здесь ρ_i – расстояние от центра коллоидной частицы до узла с номером i , а ρ_{ij} – расстояние между узлами i и j .

С помощью бинарной функции $F_{11}^{(1)}$, описывающей распределения центров коллоидных частиц в объемах v_i и v_j , рассчитаем среднее значение их энергии взаимодействия:

$$\langle U_{ij} \rangle = \int_{v_i} \int_{v_j} U(r) F_{11}^{(1)}(r) d\mathbf{v}_i d\mathbf{v}_j = n_{ij} U_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j). \quad (12)$$

Здесь

$$U_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \frac{\int_{v_i} U_{ij}^a(\rho_i, b_j) I_{ij}(\rho_i, b_j) d\mathbf{v}_i}{\int_{v_i} I_{ij}(\rho_i, b_j) d\mathbf{v}_i}, \quad (13)$$

$$U_{ij}^a(\rho_i, b_j) = \frac{\int_{v_j} U(r) e^{-\beta U(r)} d\mathbf{v}_j}{I_{ij}(\rho_i, b_j)}. \quad (14)$$

Далее запишем аппроксимированные выражения для функционалов $f_{ij}^{(a)}$ из уравнений (2):

$$f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\}) \approx f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) = \frac{I_{ij}(\rho_i, b_j)}{v_j}, \quad (15)$$

$$f_{ij}^{(a)} \{n_l\} \approx f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \frac{1}{v_i} \int_{v_i} f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) d\mathbf{v}_i. \quad (16)$$

Введем функцию $g_{ij} = n_{ij} / (n_i n_j)$, которая является дискретным аналогом радиальной функции $g(r)$ для однородных систем и определяется уравнениями (7), (8) с учетом (16):

$$g_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i n_j} = \frac{n_i - n_{ij}^{av}}{n_i n_j} = \frac{1}{n_j} - \frac{n_{ij}^{av}}{n_i n_j}, \quad (17)$$

$$n_{ij}^{av} = 0,5B_{ij} + 0,5\sqrt{B_{ij}^2 + 4n_i(1 - n_j)A_{ij}^{-1}}, \quad (18)$$

$$B_{ij} = (n_i - n_j) - A_{ij}^{-1}, \quad A_{ij} = f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) - 1. \quad (19)$$

В результате интегральное уравнение (2) перепишем в следующем виде:

$$f_{ij}(\rho_i, b_j) = n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j) f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) + (1 - n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j)) f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j). \quad (20)$$

Здесь $f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) = \exp\{-\beta\Phi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j)\}$, а $\Phi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j)$ – потенциал средней силы, действующий на молекулу в ячейке ω_i со стороны молекулы, равномерно распределенной внутри сферы радиуса b_j в ячейке ω_j .

Численные расчеты выполнены для коллоидных систем с полем плотности, которое изменяется в направлении, совпадающим с направлением осей элементарных ячеек гексагональной решетки, так что одномерное поле чисел заполнения зависит от номера p монослоев, образованных наборами из Z ячеек с одинаковыми числами заполнения n_p ($p = 1, 2, \dots, P$).

Функционалы энтропии S , внутренней энергии U , свободной энергии F и химического потенциала μ рассчитывались по формулам

$$S\{n_p\} = M(s_1\{n_p\} + s_2\{n_p\}), \quad M = ZP, \quad (21)$$

$$s_1\{n_p\} = -\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P (n_p \ln n_p + (1-n_p) \ln(1-n_p)), \quad (22)$$

$$s_2\{n_p\} = -\frac{1}{P} \sum_{p=1}^P n_p \sum_{j \neq p}^J n_j g_{pj} \ln g_{pj}, \quad (23)$$

$$U\{n_p\} = Z \sum_{p=1}^P n_p \sum_{j \neq p}^J (n_j g_{pj} U_{pj}(b_p, r_{pj}, b_j)) = Mu\{n_p\}, \quad (24)$$

$$F\{n_p\} = U\{n_p\} - \theta S\{n_p\} = Mf\{n_p\}, \quad (25)$$

$$\mu_i\{n_p\} = \frac{\partial f\{n_p\}}{\partial n_i}. \quad (26)$$

В формулах (23), (24) суммирование по $j \neq p$ выполняется по узлам j , принадлежащим плоским монослоям с номерами p ; J – число узлов, принадлежащих сфере с центром, совпадающим с центром ячейки ω_p в слое с номером p и радиусом R , который равен радиусу действия сил отталкивания в потенциале SALR (формула (1)). В формуле (21) для энтропии S функционал $s_1\{n_p\}$ учитывает вклад неоднородности поля унарной плотности, а функционал $s_2\{n_p\}$ учитывает аналогичный вклад неоднородного распределения частиц в окрестностях ячеек ω_p , описываемого функцией g_{pj} .

На рис. 2–4 изображены зависимости энтропии $s = S/M$, внутренней энергии $u = U/M$, свободной энергии $f = F/M$, а также химического потенциала $\mu = df/dn$ от концентрации n однородной коллоидной системы при безразмерной температуре $\theta = 5$.

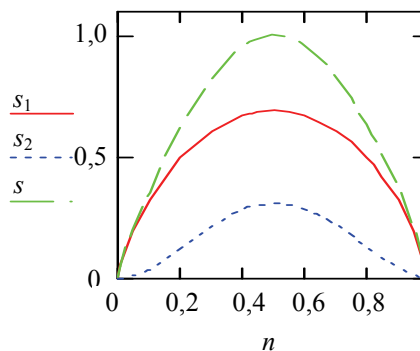


Рис. 2. Зависимости вкладов s_1 и s_2 в энтропию $s = s_1 + s_2$ от концентрации n

Из рис. 2, 3 видно, что в области малых концентраций ($n < 0,3$) энтропия s растет быстрее, чем внутренняя энергия u , так что свободная энергия f уменьшается в этой области концентраций. При концентрациях $n > 0,3$ энтропия s растет медленнее, а затем уменьшается. В результате на графике свободной энергии появляется минимум, а химический потенциал μ монотонно возрастает от $-\infty$ при $n \rightarrow 0$ до $+\infty$ при $n \rightarrow 1$, что указывает на отсутствие фазового перехода первого рода газ – жидкость с промежуточной гетерогенной областью, как это обычно происходит в молекулярных системах.

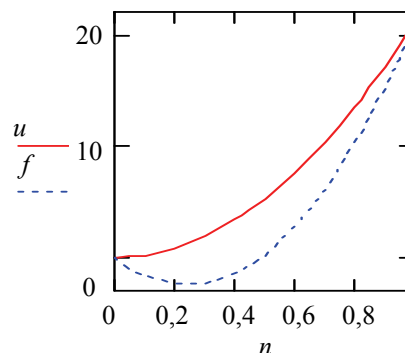


Рис. 3. Зависимости u и f от концентрации n

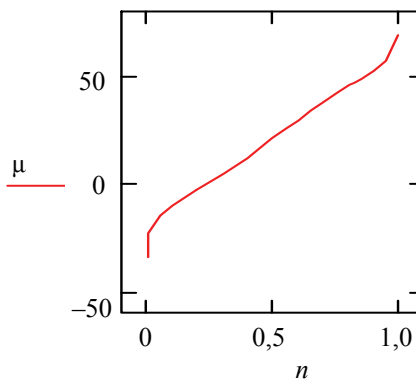


Рис. 4. Зависимость μ от концентрации n

На рис. 5 приведены графики зависимостей относительной вариации $\epsilon_{\Omega} = \Delta\Omega\{n_p\} / |\Omega(n)|$ функционала $\Omega\{n_p\} = F\{n_p\} - \mu \sum n_p$ от волнового числа $\chi = 2\pi / \lambda$ для разных значений средней концентрации n коллоидной системы при безразмерной температуре $\theta = 5$. В расчетах амплитуда B гармонической неоднородности поля чисел заполнения $n_p = n + B \cos(\chi x_p)$ с волновым числом χ принималась равной 10% от средней концентрации n .

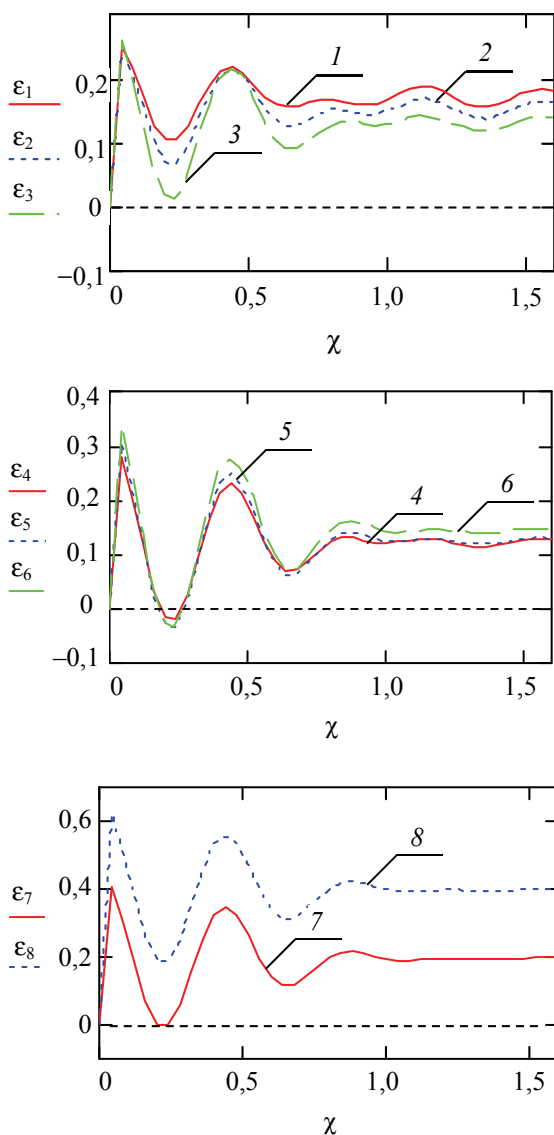


Рис. 5. Зависимости вариации ϵ_{Ω} функционала Ω от волнового числа χ при температуре $\theta = 5$ для разных значений средней концентрации n , равной числам заполнения ячеек гексагональной решетки с параметрами $a = b = c = 1$ в единицах линейного параметра σ потенциала Леннард-Джонса:
 1 – $n = 0,25, B = 0,025$; 2 – $n = 0,30, B = 0,03$;
 3 – $n = 0,40, B = 0,04$; 4 – $n = 0,50, B = 0,05$;
 5 – $n = 0,60, B = 0,06$; 6 – $n = 0,70, B = 0,07$;
 7 – $n = 0,80, B = 0,08$; 8 – $n = 0,90, B = 0,09$

Из рис. 5 видно, что положения двух первых минимумов с волновыми числами χ_1 и χ_2 практически не зависят от средней концентрации частиц коллоидной системы ($\chi_1 \approx 0,22$; $\lambda_1 \approx 28,5$ ($\chi_2 \approx 0,66$; $\lambda_2 \approx 9,5$). Расчеты показывают, что их значения зависят от радиуса R сферы, определяющей область, на которую распространяется действие сил отталкивания между коллоидными частицами.

Из рис. 5 также видно, что гармоническая неоднородность поля плотности с волновым числом χ_1 и длиной волны λ_1 при увеличении концентрации n приводит к уменьшению значения функционала ϵ_{Ω} в точке минимума.

В результате коллоидная система с мезоскопическими неоднородностями λ_1 оказывается термодинамически более устойчивой в интервале концентрации n от $n_1 \approx 0,42$ до $n_2 \approx 0,81$ по сравнению с однородной системой.

Аналогичные расчеты при других температурах θ позволили построить теоретическую фазовую диаграмму температура θ – плотность ρ (рис. 6, $\rho = n / \omega$) для перехода системы из однородного состояния в неоднородное, который является фазовым переходом второго рода.

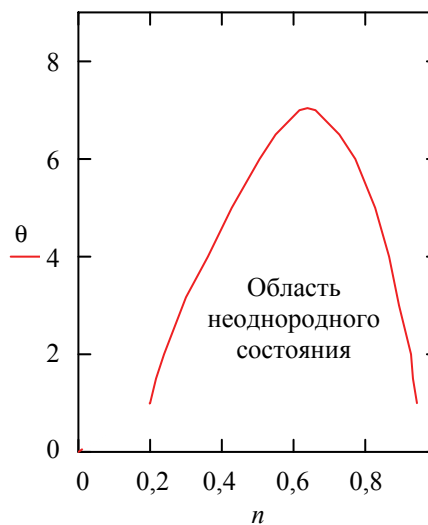


Рис. 6. Фазовая диаграмма перехода коллоидного раствора из однородного состояния в неоднородное с одномерным гармоническим распределением плотности с длиной волны $\lambda_1 = 2\pi / \chi_1 \approx 28$ (в единицах линейного параметра σ потенциала Леннард-Джонса)

Заключение. Исследования выполнены в рамках Международного проекта CONIN научной программы Евросоюза HORIZON-2020. Автор благодарен координатору проекта А. Цях за выбор направления исследований, а также доктору физико-математических наук А. В. Пацаган за плодотворное обсуждение результатов проведенных расчетов.

Литература

1. Наркевич И. И. Двухуровневый статистический метод описания неоднородных систем. Нордерштедт: LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 с.
2. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 61–65.
3. Наркевич И. И., Фарафонтובה Е. В., Липай Н. А. Численно-аналитический расчет равновесных характеристик наночастиц в рамках двухуровневого молекулярно-статистического метода // Наноструктуры в конденсированных средах: сб. науч. ст. Минск: ИТМО им. А. В. Лыкова НАН Беларуси, 2018. С. 124–130.
4. Ciach A., Gozdz W. T. Density functional theory for systems with mesoscopic inhomogeneities // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2016. Vol. 28. P. 244004.
5. Brazovskii S. A. Phase transition of an isotropic system to a nonuniform state // *Sov. Phys. JETP*. 1975. Vol. 41, no. 1. P. 85.
6. Patsahan O., Ciach A. Correlation functions in an ionic liquid at coexistence with an ionic crystal: results of the Brazovskii-type field theory // *J. Phys.: Condens. Matter*. 2007. Vol. 19. P. 236203.
7. Бокун Г. С., Ди Каприо Д. Распределение потенциала и концентрации носителей заряда в твердотельном электролите между плоскими электродами // Журн. Белорус. гос. ун-та. Физика. 2018. № 2. С. 71–80.

References

1. Narkevich I. I. *Dvufurovnevyy statisticheskiy metod opisaniya neodnorodnykh system* [Two-level statistical method for describing inhomogeneous systems]. Norderstedt, LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2019. 114 p.
2. Narkevich I. I., Kvasov N. T., Kozich E. Yu. Two-level molecular-statistical description of the structure and thermodynamic characteristics of homogeneous macroscopic systems and spherical nanoparticles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 61–65 (In Russian).
3. Narkevich I. I., Farafontova E. V., Lipay N. A. Numerical and analytical calculation of the equilibrium characteristics of nanoparticles in the framework of a two-level molecular-statistical method. *Nanostrukturny v kondensirovannykh sredakh* [Nanostructures in condensed matter: a collection of scientific articles]. Minsk, ITMO imeni A. V. Lykova NAN Belarusi Publ., 2018, pp. 124–130 (In Russian).
4. Ciach A., Gozdz W. T. Density functional theory for systems with mesoscopic inhomogeneities. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2016, vol. 28, p. 244004.
5. Brazovskii S. A. Phase transition of an isotropic system to a nonuniform state. *Sov. Phys. JETP*, 1975, vol. 41, no. 1, p. 85.
6. Patsahan O., Ciach A. Correlation functions in an ionic liquid at coexistence with an ionic crystal: results of the Brazovskii-type field theory. *J. Phys.: Condens. Matter*, 2007, vol. 19, p. 236203.
7. Bokun G. S., Di Caprio D. Potential distribution and charge carrier concentration in a solid-state electrolyte between flat electrodes. *Zhurnal Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta* [Journal Belarusian State University], series Physics, 2018, no. 2, pp. 71–80 (In Russian).

Информация об авторе

Наркевич Иван Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Narkevich@belstu.by

Information about the author

Narkevich Ivan Ivanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Narkevich@belstu.by

Поступила 03.05.2019

УДК 531.19; 538.911

И. И. Наркевич, Е. В. Фарафонтова

Белорусский государственный технологический университет

РАЗРАБОТКА КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ РАСЧЕТА СТРУКТУРНЫХ И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИСТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ РАЗНЫХ РАЗМЕРОВ

В работе используются статистические уравнения и формулы для неоднородных многокомпонентных молекулярных систем, полученные в рамках двухуровневого статистического метода, который является симбиозом метода коррелятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных распределений Ротта и метода термодинамических функционалов плотности. На основе общих статистических уравнений и соотношений составлена замкнутая система уравнений, описывающих микро- и макроструктуру, а также термодинамические характеристики кристаллических неоднородных систем, решение которой определяет одночастичные потенциалы средних сил. Эти потенциалы, к которым относятся одиночные наночастицы, либо системы из наночастиц разных размеров являются функционалами искомого поля унарной плотности.

В данной работе на основе ранее разработанной методики усреднения потенциала Леннарда-Джонса составлена полная система интегральных и алгебраических уравнений, позволяющая статистически рассчитать энтропию, внутреннюю энергию и свободную энергию сферических наночастиц, которые являются функционалами искомого радиального профиля унарной плотности. На ее основе разработана компьютерная программа расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллических сферических наночастиц с заданным неоднородным радиальным профилем плотности и проведены расчеты их параметров при заданной температуре.

Ключевые слова: двухуровневый молекулярно-статистический подход, потенциал средних сил, неоднородная система, наночастица.

I. I. Narkevich, E. V. Farafontova

Belarusian State Technological University

DEVELOPMENT OF A COMPUTER PROGRAM FOR THE CALCULATION OF THE STRUCTURAL AND THERMODYNAMIC CHARACTERISTICS OF CRYSTALLINE NANOPARTICLES OF DIFFERENT SIZES

The paper uses statistical equations and formulas for heterogeneous multicomponent molecular systems obtained in the framework of the two-level statistical method. This method is based on the Bogolyubov – Born – Green – Kirkwood – Ivon (BBGKI) method of correlation, the Rott conditional distributions method, and the density thermodynamic functionals method. Based on general statistical equations and ratios, a closed system of equations is compiled that describes the micro-, macrostructure, and thermodynamic characteristics of crystalline heterogeneous systems. Its solution determines the single-particle potentials of average forces. The potentials in the case of inhomogeneous systems, such as nanoparticles or systems of nanoparticles, are functionals of the desired unary density field.

On the basis of the developed method of averaging the Lennard-Jones potential, a complete system of integral and algebraic equations has been compiled, whose solution allows calculating the entropy functionals, the internal and free energies of spherical nanoparticles. A computer program has been developed for calculating the structural and thermodynamic characteristics of a crystalline spherical nanoparticle with the desired inhomogeneous radial density profile, and its parameters are calculated at a given temperature.

Key words: two-level molecular-statistical approach, mean force potential, inhomogeneous system, nanoparticle.

Введение. Двухуровневый статистический метод [1, 2], который ранее применялся для описания равновесных свойств однородных макроскопических систем, в данной работе используется для разработки компьютерной программы расчета структурных и термодинамических параметров неоднородных систем, в частности сферических наночастиц. Он базируется на совместном использовании метода кор-

релятивных функций Боголюбова – Борна – Грина – Кирквуда – Ивона (ББГКИ), метода условных распределений Ротта [3] и метода термодинамических потенциалов, которые в случае неоднородных систем являются функционалами поля плотности среды. Двухуровневый молекулярно-статистический подход позволяет реализовать учет неоднородного распределения чисел заполнения n_i микрочаек

объемами ω_i ($i = 1, 2, \dots, M$), на которые в соответствии с основной идеей метода условных распределений Л. А. Ротта мысленно разделен весь объем V системы. Эти ячейки образуют гипотетическую кристаллическую решетку, причем их форма и размеры претерпевают существенные изменения вблизи границ наночастиц. При этом используется F_{11} -приближение, учитывающее множество наиболее вероятных состояний конденсированной системы из N молекул в объеме V , где в каждой микроячейке может содержаться не более одной частицы. Количество микроячеек M превышает число N частиц в наночастице так, что некоторые микроячейки с определенной вероятностью могут быть вакантными. В результате средние числа заполнения ячеек меньше единицы, а поле их распределения по объему отражает неоднородность распределения плотности наночастицы.

В процессе последовательной реализации двухуровневого статистического подхода ранее получена замкнутая система интегральных уравнений, решение которой определяет одночастичные потенциалы средних сил Φ_{ij} , которые описывают взаимодействие выделенной молекулы конденсированной среды в ячейке ω_i с другими молекулами, статистически распределенными в ячейках ω_j . Центры этих ячеек образуют соответствующую гипотетическую кристаллическую решетку – регулярную для однородных и нерегулярную для неоднородных макроскопических систем или систем из малого числа атомов или молекул (кластеров), представителями которых и являются наночастицы. В случае неоднородных систем одночастичные потенциалы Φ_{ij} являются функциями радиус-векторов \vec{q}_i и одновременно функционалами по отношению к унарному полю чисел заполнения n_k , т. е. $\Phi_{ij} = \Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_k\})$ ($i, j, k = 1, 2, \dots, M$).

Основная часть. В работах [4, 5] изложены результаты, которые получены в предположении, что заполнение ячеек ω_i и ω_j молекулами или коллоидными частицами системы происходит независимо друг от друга, т. е. двухъячеечные числа заполнения $n_{ij} \approx n_i n_j$. В данной работе и последующих расчетах будем учитывать корреляцию при заполнении всевозможных пар ячеек в объеме сферических наночастиц. Потенциалы средних сил таких наночастиц являются функционалами от искомого радиального поля унарной плотности, т. е. чисел заполнения n_l (l – номер координационной сферы относительно центра наночастицы, $l = 1, 2, \dots, L$).

Для наночастицы, являющейся однокомпонентной системой с вакансиями, интегральное уравнение для потенциалов средних сил запишем в следующем виде:

$$f_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \frac{n_{ij}^{aa}}{n_i} f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\}) + \frac{n_{ij}^{av}}{n_i} f_{ij} \{n_l\}. \quad (1)$$

Здесь $f_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \exp\{-\beta\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})\}$, $\beta = 1/\theta$, $\theta = kT$, n_{ij}^{uv} – двухъячеечные числа заполнения пар ячеек с номерами i и j , которые определяют вероятность того, что частица сорта μ гипотетической двухкомпонентной системы, состоящей из реальных молекул и вакансий, находится в ячейке с номером i , а другая частица сорта ν находится в ячейке с номером j ($i, j = 1, 2, \dots, M$), $\mu, \nu = a, v$ (a – для реальных молекул, v – для вакантных ячеек, в которых находятся квазичастицы, не взаимодействующие между собой и с реальными молекулами сорта a).

Вспомогательные функционалы $f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\})$ и $f_{ij} \{n_l\}$ из выражения (1) рассчитываются в результате усреднения, выполняемого с помощью вспомогательных унарных функций $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_j)$ и $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i)$ соответственно:

$$f_{ij}^{(a)}(\vec{q}_i, \{n_l\}) = \int_{\omega_j} \exp\{-\beta\Phi(\|\vec{q}_i - \vec{q}_j\|)\} \hat{F}_{11}^*(\vec{q}_j) d\vec{q}_j, \quad (2)$$

$$f_{ij} \{n_l\} = \int_{\omega_i} \exp\{-\beta\Phi_{ij}(\vec{q}_i, \{n_l\})\} \hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i) d\vec{q}_i, \quad (3)$$

где $\Phi(\|\vec{q}_i - \vec{q}_j\|)$ – парный потенциал взаимодействия двух частиц, находящихся в двух разных ячейках с номерами i и j (\vec{q}_i и \vec{q}_j – радиус-векторы частиц). Вспомогательная нормированная на единицу унарная функция $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i)$ распределения молекулы в ячейке ω_i выражается через искомые одночастичные потенциалы средних сил Φ_{ik} и определяется следующим выражением:

$$\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_i) = \frac{\exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{ik}(\vec{q}_i, \{n_l\})\right\} d\vec{q}_i}{\int_{\omega_i} \exp\left\{-\beta \sum_{k \neq i, j}^M \Phi_{ik}(\vec{q}_i, \{n_l\})\right\} d\vec{q}_i}. \quad (4)$$

Функция $\hat{F}_{11}^*(\vec{q}_j)$ рассчитывается аналогично. Двухъячеечные числа заполнения всевозможных пар ячеек определяются следующими соотношениями [2]:

$$n_{ij}^{aa} \{n_l\} = n_i - n_{ij}^{av} \{n_l\}, \quad (5)$$

$$n_{ij}^{av} \{n_l\} = \frac{1}{2A_{ij}} \left\{ \left[(n_i - n_j) A_{ij} - 1 \right] + \sqrt{\left[(n_i - n_j) A_{ij} - 1 \right]^2 + 4n_i(1 - n_j) A_{ij}} \right\}, \quad (6)$$

$$A_{ij} = f_{ij}^{(a)} \{n_l\} - 1, \quad (7)$$

$$f_{ij}^{(a)} \{n_l\} = \int_{\omega} f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_l\}) \hat{F}_{11}^*(\bar{q}_i) d\bar{q}_i. \quad (8)$$

Из физических соображений ясно, и это подтверждается структурой уравнений (1), что в связи с короткодействующим межмолекулярным потенциалом $\Phi(\bar{q}_i - \bar{q}_j)$ все потенциалы средних сил φ_{ij} в неоднородной среде должны наиболее сильно зависеть от плотности в ближайших ячейках, окружающих выделенную пару ячеек ω_i и ω_j . Вследствие этого достаточно учесть зависимость потенциалов $\varphi_{ij}(\bar{q}_i, \{n_l\})$ только от чисел заполнения в ячейках ω_i, ω_j , а в численных расчетах при выполнении суммирования по $k \neq i, j$ в формуле (4) можно ограничиться вкладом от взаимодействия с ячейками, принадлежащими первым трем концентрическим координационным сферам ($l = 1, 2, 3$) с центрами в центре ячейки ω_i .

Преобразование системы интегральных уравнений для последующего численного решения. На основе общих статистических уравнений и соотношений (1)–(8), полученных в рамках двухуровневого статистического метода описания свойств неоднородных систем, составим замкнутую систему уравнений, описывающих микро-, макроструктуру и термодинамические характеристики кристаллической наночастицы с искомым неоднородным радиальным профилем плотности. Поле плотности в используемом методе задается соответствующим полем чисел заполнения ячеек, принадлежащих координационным сферам с центрами, совпадающими с центром сферической наночастицы. Основная трудность практической реализации этого подхода связана с тем обстоятельством, что функционал свободной энергии неоднородной системы зависит от искомого профиля плотности, т. е. набора чисел заполнения n_l неявно, через посредство потенциалов средних сил φ_{ij} , которые можно рассчитать только численно, в процессе решения достаточно сложной системы интегральных уравнений (1)–(8). Поэтому далее воспользуемся предложенной ранее методикой усреднения парного межмолекулярного потенциала Леннарда-Джонса (уравнение (2)) и других потенциалов (выражения (3), (8)) для системы в кристаллическом состоянии [4], для которого вспомогательные унарные функции распределения \hat{F}_{11}^* имеют четко выраженную локализацию в окрестности узлов кристаллической решетки. Суть этой методики состоит в том, чтобы усреднение соответствующих функций проводить по областям локализации функций распределения в виде шаров с радиусами b_l , внутри которых аппроксимированные унарные функции \hat{F}_{11}^* считаются постоянными. Эти ра-

диусы связаны со среднеквадратичными отклонениями σ_p молекул от узлов, принадлежащих координационным сферам с номерами p относительно центра наночастицы ($p = 1, 2, \dots, P$). В результате макроструктура сферической наночастицы с неоднородным радиальным профилем плотности описывается дискретными наборами чисел заполнения n_p и радиусов b_p сфер. Поэтому искомые потенциалы средних сил φ_{ij} окажутся зависящими от значений чисел n_p и радиусов b_p сфер в ячейках, центры которых принадлежат соответствующим координационным сферам. Учитывая вышесказанное, выпишем все соотношения и уравнения, образующие замкнутую систему интегральных и алгебраических уравнений, для решения которой разработана компьютерная программа с привлечением пакета Mathcad.

Все формулы и уравнения далее записаны в безразмерном виде, когда геометрические размеры определены в единицах линейного параметра σ потенциала Леннарда-Джонса, а все величины, имеющие размерность энергии, найдены в единицах энергетического параметра ϵ этого же потенциала:

$$\Phi(\rho) = 4\epsilon \left(\frac{\sigma^{12}}{\rho^{12}} - \frac{\sigma^6}{\rho^6} \right). \quad (9)$$

В безразмерной форме выражение (9) примет следующий вид:

$$U(r) = \frac{\Phi(\rho)}{\epsilon} = 4 \left(\frac{1}{r^{12}} - \frac{1}{r^6} \right), \quad r = \frac{\rho}{\sigma}. \quad (10)$$

Учитывая вышеизложенное, запишем аппроксимированные формулы для унарной F_{11} и бинарной $F_{11}^{(1)}$ функций, описывающих равномерное распределение молекул внутри всех сфер с радиусами b_i , центры которых совпадают с узлами кристаллической решетки наночастицы ($v_i = 4\pi b_i^3 / 3$, $v_j = 4\pi b_j^3 / 3$, $n_{ij} \equiv n_{ij}^{aa}$):

$$F_{11} = n_i \hat{F}_{11}^* \approx \frac{n_i}{v_i}, \quad F_{11}^{(1)} \approx \frac{n_{ij}}{Q_{ij}} \exp\{-\beta U(r)\}. \quad (11)$$

Здесь Q_{ij} – нормирующий множитель бинарной функции $F_{11}^{(1)}$, которая нормирована так, чтобы интеграл от $F_{11}^{(1)}$ по объемам сфер радиусов b_i и b_j был равен n_{ij} , т. е.

$$Q_{ij} = \int_{v_i} d\mathbf{v}_i \int_{v_j} e^{-\beta U(r)} d\mathbf{v}_j = \int_{v_i} I_{ij}(\rho_i, b_j) d\mathbf{v}_i. \quad (12)$$

Здесь и далее ρ_i – безразмерное расстояние от молекулы в объеме v_i до центра объема v_j , а интеграл

$$I_{ij}(\rho_i, b_j) = \int_{v_j} e^{-\beta U(r)} d\mathbf{v}_j. \quad (13)$$

С помощью бинарных функций распределения двух молекул в объемах v_i и v_j рассчитаем среднее значение их энергии взаимодействия внутри этих объемов:

$$\begin{aligned} \langle U_{ij} \rangle &= \int_{v_i} \int_{v_j} U(r) F_{11}^{(1)}(r) dv_i dv_j = \\ &= \frac{n_{ij}}{Q_{ij}} \int_{v_i} dv_i \int_{v_j} U(r) e^{-\beta U(r)} dv_j = \\ &= n_{ij} \frac{\int_{v_i} \varphi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) I_{ij}(\rho_i, b_j) dv_i}{\int_{v_i} I_{ij}(\rho_i, b_j) dv_i}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) &= \frac{\int_{v_j} U(r) e^{-\beta U(r)} dv_j}{\int_{v_j} e^{-\beta U(r)} dv_j} = \\ &= \frac{\int_{v_j} U(r) e^{-\beta U(r)} dv_j}{I_{ij}(\rho_i, b_j)}. \end{aligned} \quad (15)$$

В результате получим, что

$$\langle U_{ij} \rangle = n_{ij} \langle \varphi^{(a)}(\rho_i, b_j) \rangle_i = n_{ij} \psi(b_i, \rho_{ij}, b_j), \quad (16)$$

где ρ_{ij} – безразмерное расстояние между центрами объемов v_i и v_j , а среднее значение для функции $\varphi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j)$ получается в результате ее усреднения, выполненного с помощью $I_{ij}(\rho_i, b_j)$:

$$\psi(b_i, \rho_{ij}, b_j) = \frac{\int_{v_i} \varphi_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) I_{ij}(\rho_i, b_j) dv_i}{\int_{v_i} I_{ij}(\rho_i, b_j) dv_i}. \quad (17)$$

Переходя к расчету потенциалов средних сил φ_{ij} , запишем выражения для функционалов (2), (3), которые входят в правую часть интегрального уравнения (1) и рассчитываются с учетом аппроксимированных функций \hat{F}_{11}^* (формулы (11)):

$$\begin{aligned} f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) &= \frac{I_{ij}(\rho_i, b_j)}{v_j}, \\ f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) &= \frac{1}{v_i v_j} \int_{v_i} f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) dv_i. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее учтем, что средние значения функций $f_{ij}(\bar{q}_i, \{n_i\})$ и $f_{ij}^{(a)}(\bar{q}_i, \{n_i\})$ равны [2]:

$$\langle f_{ij}(\rho_i, b_j) \rangle = \langle f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) \rangle = f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j). \quad (19)$$

Здесь $f_{ij}(\rho_i, b_j) = e^{-\beta \varphi_{ij}(\rho_i, b_j)}$, а $\varphi_{ij}(\rho_i, b_j)$ – потенциал средней силы, действующий на молекулу в ячейке ω_i со стороны молекулы, равномерно распределенной внутри сферы радиуса b_j в ячейке ω_j , а g_{ij} – аналог радиальной функции для кристаллической наночастицы, которая усреднена по объемам v_i и v_j :

$$g_{ij} = \frac{n_{ij}}{n_i n_j}, \quad n_{ij} = n_i - n_{ij}^{av}, \quad (20)$$

$$B_{ij} = (n_i - n_j) - \frac{1}{A_{ij}}, \quad A_{ij} = f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j) - 1, \quad (21)$$

$$n_{ij}^{av} = 0,5 B_{ij} + 0,5 \sqrt{B_{ij}^2 + 4 n_i (1 - n_j) A_{ij}^{-1}}. \quad (22)$$

С учетом соотношений (19)–(22) интегральное уравнение (1) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} f_{ij}(\rho_i, b_j) &= n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j) f_{ij}^{(a)}(\rho_i, b_j) + \\ &+ (1 - n_j g_{ij}(b_i, \rho_{ij}, b_j)) f_{ij}^{(a)}(b_i, \rho_{ij}, b_j). \end{aligned} \quad (23)$$

Решение системы уравнений (23) относительно набора радиусов b_p сферической наночастицы при заданном наборе чисел заполнения n_p для ячеек, принадлежащих координационным сферам с номерами p ($p = 1, 2, \dots, P$), находится методом итераций. Для этого по заданному набору пробных значений b_p в правой части (23) рассчитываются значения функции $f_{ij}(\rho_i, b_j)$. С их помощью находятся нормированные на единицу унарные функции \hat{F}_{11} распределения молекул в ячейках, принадлежащих координационным сферам с номерами p , а затем рассчитываются радиальные смещения Δr_p узлов и среднеквадратичные отклонения σ_p молекул от смещенных узлов, принадлежащих сферам с номерами p :

$$\Delta r_p = \sqrt{\Delta X_p^2 + \Delta Y_p^2 + \Delta Z_p^2}, \quad (24)$$

где

$$\Delta X_p = \int_{v_i} (x - X_p) \hat{F}_{11}(x, y, z) dv_i, \quad (25)$$

$$\Delta Y_p = \int_{v_i} (y - Y_p) \hat{F}_{11}(x, y, z) dv_i, \quad (26)$$

$$\Delta Z_p = \int_{v_i} (z - Z_p) \hat{F}_{11}(x, y, z) dv_i, \quad (27)$$

$$\sigma_p = \left(\int_{\omega_p} r^2 \hat{F}_{11}(x, y, z) d\omega_p \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{5}} b_p. \quad (28)$$

Здесь унарная функция распределения частиц в ячейке ω_p определяется выражением

$$\hat{F}_{11}(x, y, z) = \frac{\exp\left\{-\beta \sum_{j \neq p}^M \varphi_{pj}(\rho_p, b_j)\right\}}{\int_{v_p} \exp\left\{-\beta \sum_{j \neq p}^M \varphi_{pj}(\rho_p, b_j)\right\} dv_p}. \quad (29)$$

По полученным значениям среднеквадратичных отклонений σ_p с помощью формулы (28) находятся новые значения радиусов b_p^H ($b_p^H = \sqrt{5/3} \sigma_p$). Итерации продолжаются до тех пор, пока новые значения не совпадут с заданной относительной погрешностью с предыдущими значениями.

Функционалы энтропии S , внутренней энергии U и свободной энергии F сферической наночастицы определяются по следующим формулам:

$$S\{n_p\} = -\sum_{p=1}^P Z_p (n_p \ln n_p + (1 - n_p) \ln(1 - n_p) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^J n_p n_j g_{pj} \ln g_{pj}), \quad (30)$$

$$U\{n_p\} = \sum_{p=1}^P Z_p \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq p}}^J (n_p n_j g_{pj} \psi(b_p, r_{pj}, b_j)), \quad (31)$$

$$F\{n_p\} = U\{n_p\} - \theta S\{n_p\}. \quad (32)$$

Здесь Z_p – число узлов, принадлежащих координационной сфере с номером p ; $J = 42$ – число узлов, принадлежащих трем координационным сферам с центрами, совпадающими с центром ячейки ω_p , по узлам которых выполняется суммирование в уравнениях (30), (31).

В табл. 1 приведены полученные после выполнения итераций с относительной погрешностью $\varepsilon = 10^{-3}$ результаты расчетов параметров сферической наночастицы, состоящей из 201 узла, принадлежащего десяти координационным сферам ($P = 10$), при температуре $\theta = 0,6$. Значения функционалов энтропии s , внутренней u и свободной f энергий, приходящиеся на одну молекулу, представлены в табл. 2.

Литература

1. Наркевич И. И. Молекулярно-статистическая теория неоднородных конденсированных сред: дис. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1993. 223 с.
2. Наркевич И. И. Интегральное уравнение для потенциалов средних сил и свободная энергия однокомпонентной неоднородной системы в рамках двухуровневого молекулярно-статистического метода // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 32–38.
3. Ротт Л. А. Статистическая теория молекулярных систем. М.: Наука, 1979. 280 с.
4. Наркевич И. И., Квасов Н. Т., Козич Е. Ю. Двухуровневое молекулярно-статистическое изучение структуры и термодинамических характеристик однородных макроскопических систем и сферических наночастиц // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 61–65.

Таблица 1

Среднеквадратичные отклонения σ_p и радиальные смещения Δr_p для разных координационных сфер с номерами p для наночастицы при температуре $\theta = 0,6$

Номер координационной сферы p	n_p	σ_p	σ_p^H	Δr_p	Δr_p^H
0	0,99	0,103	0,106	0	0
1	0,99	0,105	0,106	0,086	0,008
2	0,95	0,109	0,110	0,117	0,129
3	0,85	0,106	0,106	0,136	0,140
4	0,80	0,106	0,108	0,165	0,160
5	0,70	0,113	0,110	0,198	0,178
6	0,50	0,123	0,119	0,181	0,176
7	0,30	0,115	0,114	0,190	0,186
8	0,20	0,130	0,132	0,209	0,223
9	0,15	0,125	0,151	0,214	0,252
10	0,10	0,138	0,138	0,220	0,251

Таблица 2

Значения функционалов энтропии s , внутренней u и свободной f энергий наночастицы при температуре $\theta = 0,6$

s	u	f	F	N
0,432	-4,228	-3,969	-368,164	93

Заключение. С помощью двухуровневого статистического метода составлена полная система интегральных и алгебраических уравнений, решение которой позволяет рассчитывать структурные характеристики, функционалы энтропии, внутренней и свободной энергий сферических кристаллических наночастиц с заданным радиальным профилем плотности. На основе разработанной методики итерационного решения системы интегральных уравнений для потенциалов средних сил написана компьютерная программа расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллической сферической наночастицы с искомым неоднородным радиальным профилем плотности. Проведен расчет параметров наночастицы при температуре $\theta = 0,6$.

5. Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В., Зубрицкий Д. Е. Численно-аналитический расчет микроскопического распределения центров коллоидных частиц в макроскопически однородном водном растворе // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 47–51.

References

1. Narkevich I. I. *Molekulyarno-statisticheskaya teoriya neodnorodnykh kondensirovannykh sred. Dis. dokt. fiz.-mat. nauk* [Molecular-statistical theory of the non-homogeneous condensed matter. Doct. Diss.]. St. Petersburg, 1993. 223 p.
2. Narkevich I. I. Integral equation for potentials forces and free energy inhomogeneous one-component system within two-level molecular-statistical methods. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 32–38 (In Russian).
3. Rott L. A. *Statisticheskaya teoriya molekulyarnykh system* [Statistical theory of molecular systems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 280 p.
4. Narkevich I. I., Kvasov N. T., Kozich E. Yu. Two-level molecular-statistical description of the structure and thermodynamic characteristics of homogeneous macroscopic systems and spherical nanoparticles. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 61–65 (In Russian).
5. Narkevich I. I., Farafontova E. V., Zubrytski D. E. Numerical-analytical calculation of microscopic distribution of colloid particle centers in a macroscopically homogeneous aqueous solution. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2018, no. 2, pp. 47–51 (In Russian).

Информация об авторах

Наркевич Иван Иванович – доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Narkevich@belstu.by

Фарафонтова Елена Валерьевна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: farafontova@belstu.by

Information about the authors

Narkevich Ivan Ivanovich – DSc (Physics and Mathematics), Professor, Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Narkevich@belstu.by

Farafontova Elena Valer'yevna – PhD (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: farafontova @belstu.by

Поступила 15.05.2019

УДК 536.24:66.045

Т. Б. Карлович, А. Б. Сухоцкий, Е. С. Данильчик
Белорусский государственный технологический университет

**ТЕМПЕРАТУРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ В СЛОЕ ЗАГРЯЗНЕНИЯ
ОРЕБРЕННОЙ ТРУБЫ С УЧЕТОМ НЕРАВНОМЕРНОГО
НАГРЕВА ТЕПЛООТДАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Рассмотрена стационарная задача теплопроводности в кольцевом слое загрязнения конечной толщины, плотно прилегающем к основанию оребренной трубы в межреберном пространстве. В решении задачи учитывается неравномерность нагрева ребристой поверхности. Получено аналитическое решение для температурной зависимости внутри загрязнителя, рассчитана средняя температура на его поверхности. Проведено сравнение температурного распределения в цилиндрическом слое загрязнения для случая постоянной температуры на реберной поверхности и для случая ее линейного уменьшения по высоте ребра.

Ключевые слова: теплообменник, оребренная труба, коэффициент теплопередачи, теплопроводность, теплоотдача, функции Бесселя, функции Ломмеля.

T. B. Karlovich, A. B. Sukhotskii, E. S. Danilchik
Belarusian State Technological University

**TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE CONTAMINATION LAYER
OF THE FINNED PIPE TAKING INTO ACCOUNT THE UNEVEN HEATING
OF THE HEAT-RELEASE SURFACE**

The paper considers the problem of heat conduction in an annular layer of contamination of finite thickness, tightly adjoining the base of the finned pipe in the intercostal space. In the solution of the problem, the uneven heating of the ribbed surface is taken into account. An analytical solution was obtained for the temperature dependence inside the pollutant, the average temperature on its surface was calculated. The temperature distribution in the cylindrical layer of pollution is compared for the case of a constant temperature along the height of the rib and for the case of its linear decrease.

Key words: heat transfer, finned pipe, heat transfer coefficient, heat conductivity, heat transfer, Bessel functions, Lommel functions.

Введение. Оребренные трубы являются основным элементом различных теплообменников, предназначенных для охлаждения технологических жидкостей. Оребрение используется для увеличения площади теплоотдающей поверхности и отведения максимального количества теплоты от охлаждаемой жидкости. Часто оребренные трубы формируются в трубные пучки различных компоновок, что еще в большей степени способствует интенсификации процесса теплообмена. Основной характеристикой теплообменного аппарата является коэффициент теплопередачи, который, однако, не остается постоянным в течение всего времени эксплуатации теплообменника и имеет тенденцию к снижению из-за всевозможного рода загрязнений межреберного пространства. Так, в аппаратах воздушного охлаждения (АВО), широко применяемых в химической и нефтегазовой промышленности, вместо охлаждающей жидкости используется атмосферный воздух. АВО, находящиеся на открытом воздухе, с течением времени загрязняются пылью, пылью растений, пухом, насекомыми и др., что приво-

дит к увеличению потребления электрической энергии на привод вентилятора, разгоняющего поток воздуха до определенной скорости, и снижению экономичности работы АВО. На сегодняшний день существует ряд методик, учитывающих степень загрязнения межреберного пространства [1–3]. Часть из них использует модель равномерного тонкого слоя загрязнения по всей ребристой поверхности теплообменника, что, однако, не соответствует реальному распределению загрязнения в межреберном пространстве. В методиках [4, 5] рассматривается кольцевой слой загрязнения, прилегающий к поверхности оребренной трубы, и равномерный тонкий слой загрязнения на остальной оребренной поверхности. Однако в этих методиках теплопроводность материала ребер предполагается бесконечной величиной, вследствие чего температура остается постоянной на всей поверхности ребра. В многочисленных экспериментальных исследованиях обтекания воздухом как одиночных труб [6–8], так и трубных пучков [9–11] было показано, что температура у основания ребристой трубы и на вершине ребер

может значительно отличаться. Это связано, по крайней мере, с двумя причинами: уменьшением температуры вследствие конечной теплопроводности материала ребер и разной скорости течения воздуха в межреберном пространстве. Скорость воздуха между ребрами зависит не только от расположения трубного пучка (горизонтальный, вертикальный или наклонный), но и от расстояния между ребрами. В случае свободной конвекции и тесного расположения ребер пограничный слой воздуха будет препятствовать нарастанию скорости потока. Поэтому температура поверхности ребра будет резко изменяться только на вершинах ребер. В то же время для разреженных ребер нарастание скорости воздушного потока будет происходить более плавно из-за более равномерного течения воздуха в межреберном пространстве.

Основная часть. В настоящей работе мы воспользуемся линейным приближением для описания температурного поля на ребристой поверхности трубы. Также будем предполагать, что ребра представляют собой круглые диски с достаточно большими расстояниями между ними для свободного прохода охлаждающего воздуха.

Расчет коэффициента теплопередачи. Для расчета коэффициента теплопередачи удобно использовать методику [4], основанную на применении электротепловой аналогии для моделирования тепловых потоков через многослойную поверхность. При этом учитывается равномерный тонкий слой загрязнения внутри трубы и цилиндрический слой загрязнения конечной толщины, прилегающий снаружи к основанию трубы вместе с тонким равномерным слоем загрязнения на всей оставшейся поверхности оребренной трубы.

Общий тепловой поток Q , отводимый от теплоносителя, складывается из трех независимых составляющих: теплового потока от торцов ребер Q' , теплового потока с наружной поверхности кольцевого слоя загрязнения Q'' и теплового потока с боковой поверхности ребер Q''' (рис. 1):

$$Q = Q' + Q'' + Q''' = Fk(t_1 - t_2), \quad (1)$$

где F – площадь чистой наружной поверхности незагрязненной ребристой трубы, m^2 ; t_1 – температура теплоносителя внутри трубы, $^{\circ}C$; t_2 – температура окружающего воздуха, $^{\circ}C$; k – коэффициент теплопередачи, $Вт/(m^2 \cdot K)$, определяемый по формуле

$$k = \frac{\varphi' + \varphi'''}{1/\alpha_2 + \delta_2/\lambda_2} + \alpha_2 \theta_{f2} \varphi'', \quad (2)$$

здесь $\varphi' = F'/F$ – отношение площади торцевой поверхности загрязненного ребра к площади незагрязненной поверхности оребрения; $\varphi'' =$

$= F''/F$ – отношение площади контакта ребер и основания с кольцевым слоем загрязнения к площади незагрязненной поверхности оребрения; $\varphi''' = F'''/F$ – отношение площади плоской боковой поверхности загрязненного ребра к площади незагрязненной поверхности оребрения; α_2 – коэффициент теплоотдачи охлаждающего воздуха, $Вт/(m^2 \cdot K)$; δ_2 – толщина тонкого слоя загрязнения, m ; λ_2 – теплопроводность внешнего загрязнителя, $Вт/(m \cdot K)$; θ_{f2} – средняя безразмерная температура на поверхности цилиндрического слоя загрязнителя, равная

$$\theta_{f2} = \frac{t_{f2} - t_2}{t_{f1} - t_2}, \quad (3)$$

где t_{f1} – температура основания ребристой трубы, $^{\circ}C$.

Средняя температура на поверхности кольцевого слоя t_{f2} может быть рассчитана на основе температурного распределения внутри слоя загрязнения t путем усреднения по осевой координате.

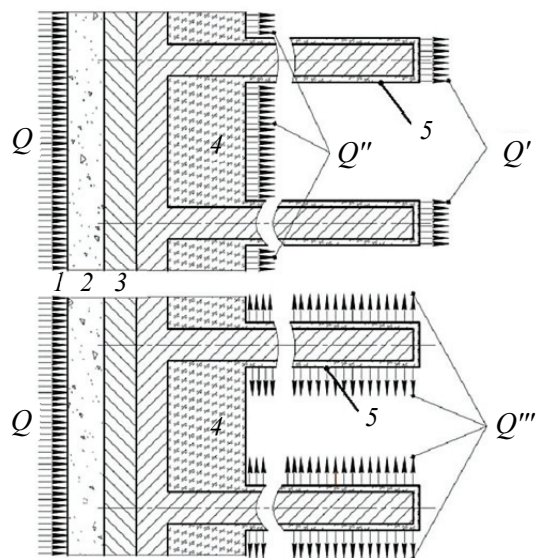


Рис. 1. Схема тепловых потоков для загрязненной ребристой трубы:
1 – слой внутреннего загрязнения;
2 – несущая труба; 3 – ребристая оболочка;
4 – кольцевой слой загрязнения;
5 – тонкий слой загрязнения

Задача теплопроводности в слое загрязнения. Температурное распределение в кольцевом слое загрязнителя удовлетворяет стационарному уравнению теплопроводности, записанному в цилиндрических координатах r (радиальная координата) и z (осевая координата):

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0. \quad (4)$$

Граничные условия для полого ограниченного цилиндра с нулевой температурой на поверхности трубы в межреберном пространстве имеют вид

$$t = -\kappa(r - r_0) \text{ при } z = 0, r_0 \leq r \leq r_1, \quad (5)$$

$$t = -\kappa(r - r_0) \text{ при } z = z_1, r_0 \leq r \leq r_1, \quad (6)$$

$$t = 0 \text{ при } r = r_0, 0 \leq z \leq z_1, \quad (7)$$

$$-\lambda_2 \frac{\partial t}{\partial r} = \alpha_2 (t + t_{f1} - t_2) \text{ при } r = r_1, 0 \leq z \leq z_1, \quad (8)$$

где κ – коэффициент линейной зависимости температуры вдоль поверхности ребра, °С/м; r_0, r_1 – минимальное и максимальное значения радиальной координаты соответственно, м; z_1 – максимальное значение осевой координаты, м.

Убывающее линейное температурное распределение по высоте ребра выбрано для упрощения записи граничных условий (5) и (6). В общем случае оно определяется из модели для разреженных чистых ребер, описанной в [12].

Решение задачи (4)–(8) можно искать в виде неоднородного периодического ряда по координате z с неоднородностью, повторяющей температурное распределение вдоль поверхности ребра:

$$t(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi z}{z_1} \varphi_n(r) - \kappa(r - r_0), \quad (9)$$

где суммирование осуществляется только по нечетным n . В этом случае граничные условия (5) и (6) выполняются автоматически. Подставляя разложение (9) в уравнение (4), получаем неоднородное уравнение для функции $\varphi_n(r)$:

$$\varphi_n''(r) + \frac{1}{r} \varphi_n'(r) - \left(\frac{n\pi}{z_1} \right)^2 \varphi_n(r) - \frac{4\kappa}{n\pi r} = 0. \quad (10)$$

Замена переменной

$$r = \frac{z_1}{n\pi} x \quad (11)$$

приводит уравнение (10) к неоднородному модифицированному уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 \varphi_n}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\varphi_n}{dx} - \varphi_n - \frac{z_1}{(n\pi)^2} \frac{4\kappa}{x} = 0, \quad (12)$$

а замена переменной и функции

$$x = i\xi, \quad \varphi_n = \frac{4i\kappa z_1}{(n\pi)^2} y_n \quad (13)$$

позволяет записать уравнение (12) в виде неоднородного уравнения Бесселя:

$$\frac{d^2 y_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy_n}{d\xi} + y_n = \frac{1}{\xi}. \quad (14)$$

Частным решением уравнения (14) является функция Ломмеля нулевого порядка $s_{0,0}(\xi)$ [13]. Функция Ломмеля связана с обобщенной гипергеометрической функцией ${}_1F_2$ следующим соотношением:

$$s_{0,0}(\xi) = \xi \cdot {}_1F_2 \left(1; \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\xi^2 \right). \quad (15)$$

Общее решение неоднородного уравнения (14) представимо в виде суммы частного решения (15) и общего решения однородного уравнения Бесселя:

$$y_n = s_{0,0}(\xi) + c_{1n} J_0(\xi) + c_{2n} H_0(\xi), \quad (16)$$

где в качестве двух линейно независимых решений выступают J_0 и H_0 – соответственно полиномы Бесселя и Ханкеля нулевого порядка; c_{1n} и c_{2n} – произвольные постоянные.

С учетом введенных обозначений (11), (13) для функции $\varphi_n(r)$ будет справедливо разложение

$$\varphi_n(r) = \frac{4i\kappa}{A_n} \frac{z_1}{(n\pi)^2} \left[s_{0,0} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r \right) + C_{1n} I_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r \right) + C_{2n} K_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r \right) \right], \quad (17)$$

где C_{1n} и C_{2n} – произвольные мнимые постоянные; I_0 и K_0 – линейно независимые модифицированные функции Бесселя.

Несмотря на то, что постоянный множитель в формуле (17) является мнимой величиной, в целом функция $\varphi_n(r)$ будет принимать действительные значения, так как функция Ломмеля $s_{0,0}$ мнимого аргумента также будет мнимой функцией.

Постоянные C_{1n} и C_{2n} могут быть определены из граничных условий (7) и (8). Граничное условие (7) с учетом (9) трансформируется в равенство

$$s_{0,0} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_0 \right) + C_{1n} I_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_0 \right) + C_{2n} K_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_0 \right) = 0. \quad (18)$$

Воспользовавшись рекуррентными соотношениями для функций Ломмеля и модифицированных функций Бесселя:

$$s'_{0,0}(z) = -s_{-1,1}(z), \quad I'_0(z) = I_1(z), \quad K'_0(z) = -K_1(z), \quad (19)$$

из граничного условия (8) имеем:

$$\begin{aligned} & i \left[is_{-1,1} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) + C_{1n} I_1 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) \right] - \\ & - i \left[C_{2n} K_1 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) \right] - 1 = \frac{\alpha_2}{\lambda_2 \kappa} (t_2 - t_{f1}) + \\ & + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} (r_1 - r_0) - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \frac{iz_1}{n\pi} \left[s_{0,0} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) \right] + \\ & + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \frac{iz_1}{n\pi} \left[C_{1n} I_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) + C_{2n} K_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) \right]. \end{aligned} \quad (20)$$

Объединяя равенство (18) и (20) в систему уравнений для постоянных C_{1n} и C_{2n} , получаем следующее матричное соотношение:

$$\begin{bmatrix} b_{11n} & b_{12n} \\ b_{21n} & b_{22n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{1n} \\ d_{2n} \end{bmatrix} \quad (21)$$

с коэффициентами

$$\begin{aligned} b_{11n} &= I_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_0 \right), \quad b_{12n} = K_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_0 \right), \\ b_{21n} &= \frac{iz_1}{n\pi} \frac{\alpha_2}{\lambda_2} I_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) + i I_1 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right), \\ b_{22n} &= \frac{iz_1}{n\pi} \frac{\alpha_2}{\lambda_2} K_0 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) - i K_1 \left(\frac{n\pi}{z_1} r_1 \right), \\ d_{1n} &= -s_{0,0} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_0 \right), \\ d_{2n} &= -\frac{iz_1}{n\pi} \frac{\alpha_2}{\lambda_2} s_{0,0} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) + s_{-1,1} \left(-i \frac{n\pi}{z_1} r_1 \right) + \\ & + \frac{\alpha_2}{\lambda_2 \kappa} (t_2 - t_{f1}) + \frac{\alpha_2}{\lambda_2} (r_1 - r_0) + 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Тогда постоянные C_{1n} и C_{2n} определяются из обратного матричного соотношения

$$\begin{bmatrix} C_{1n} \\ C_{2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11n} & b_{12n} \\ b_{21n} & b_{22n} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_{1n} \\ d_{2n} \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Средняя температура на поверхности загрязнения t_{f2} находится путем интегрирования по осевой координате z :

$$t_{f2} = \frac{1}{z_1} \int_0^{z_1} t(r=r_1, z) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\pi} \varphi_n(r_1) - \kappa(r_1 - r_0). \quad (24)$$

Таким образом, решение задачи теплопроводности в цилиндрическом слое загрязнения в случае линейного убывания температуры вдоль поверхности ребра может быть получено в аналитическом виде с использованием функций Ломмеля и модифицированных функций Бесселя. На рис. 2 представлена зависимость температуры от радиальной и осевой координаты для случая постоянной температуры вдоль поверхности ребра и линейно убывающей температуры. Из рис. 2 следует, что снижение температуры по высоте ребра влечет за собой уменьшение и минимальной температуры, достигаемой на поверхности между ребрами, равноудаленной от соседних ребер.

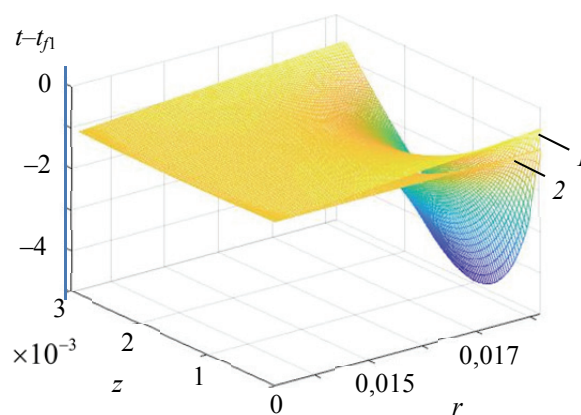


Рис. 2. Распределение температуры в цилиндрическом слое загрязнения: 1 – без учета температурного распределения вдоль ребра; 2 – с учетом температурного распределения вдоль ребра.

Параметры: $\kappa = 100$; $r_0 = 0,013$ м; $r_1 = 0,018$ м; $z_1 = 0,003$ м; $\alpha_2 = 10$ Вт/(м² · К); $\lambda_2 = 0,05$ Вт/(м · К)

Заключение. В работе получено аналитическое решение для задачи теплопроводности в кольцевом слое загрязнения для ребристых труб в случае редкого расположения ребер. Показано, что уменьшение температуры вдоль поверхности ребра от основания к вершине по линейному закону приводит к снижению температуры в слое загрязнения по сравнению с равномерным температурным распределением вдоль ребра. Также определена средняя температура на поверхности загрязнения, позволяющая рассчитывать коэффициент теплопередачи для теплообменников с учетом загрязнения.

Литература

1. Müller-Steinhagen H. Heat Exchanger Fouling. Mitigation and Cleaning Technologies. Essen: PUBLICO Publications, 2000. 382 p.
2. Дифференцированный учет термического сопротивления внешнего загрязнителя оребрения труб шахматных пучков в тепловом расчете воздухоохлаждаемых теплообменников / А. Б. Сухоцкий [и др.] //

XV Минский международный форум по тепло- и массообмену: тез. докл. и сообщ., Минск, 23–26 мая 2016 г.: в 3 т. / ИТМО имени А. В. Лыкова НАН Беларуси. Минск, 2016. Т. 3. С. 424–426.

3. Исследование теплопроводности внешних загрязнителей теплообменных секций аппаратов воздушного охлаждения / В. Б. Кунтыш [и др.] // Химическая техника. 2013. № 11. С. 40–43.

4. Карлович Т. Б. Теплопередача круглых ребристых труб при неравномерном эксплуатационном загрязнении межреберного пространства // Инженерно-физический журнал. 2018. Т. 91, № 5. С. 1278–1286.

5. Дударев В. В., Филатов С. О., Карлович Т. Б. Методика расчета и анализ коэффициента теплопередачи биметаллических ребристых труб аппаратов воздушного охлаждения с неравномерным внешним загрязнением // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. 2017. Т. 60, № 3. С. 237–255.

6. Kayansayan N. Thermal characteristics of fin-and-tube heat exchanger // Exp. Therm. Fluid Sci. 1993. Vol. 7. P. 177–188.

7. Hahne E., Zhu D. Natural convection heat transfer on finned tubes in air // Int. J. Heat Mass Transf. 1994. Vol. 37. P. 59–63.

8. Chen H.-T., Hsu W.-L. Estimation of heat transfer coefficient on the fin of annular-finned tube heat exchangers in natural convection for various fin spacing // Int. J. Heat Mass Transf. 2007. Vol. 50. P. 1750–1761.

9. Study on free convection heat transfer in a finned tube array / R. Katsuki [et al.] // Int. J. Air-Condition. Refrig. 2015. Vol. 23. P. 1–9.

10. Unger S., Krepper E., Hampel U. Numerical analysis of heat exchanger designs for passive spent fuel pool cooling to ambient air // Nucl. Eng. Des. 2018. Vol. 333. P. 224–234.

11. Влияние внешнего загрязнения на эффективность теплообменных аппаратов воздушного охлаждения / В. И. Володин [и др.] // XIV Минский международный форум по тепло- и массообмену: тез. докл. и сообщ. Минск, 10–13 сент. 2012 г.: в 3 т. / ИТМО имени А. В. Лыкова НАН Беларуси. Минск, 2012. Т. 3. С. 315–317.

12. Керн Д., Краус А. Развитие поверхности теплообмена. М.: Энергия, 1977. 464 с.

13. Ватсон Г. Н. Теория Бесселевых функций. В 2 ч. Ч. 1. М.: Изд-во ин. лит-ры, 1949. 798 с.

References

1. Müller-Steinhagen H. Heat Exchanger Fouling. Mitigation and Cleaning Technologies. Essen, PUBLICO Publications, 2000. 382 p.

2. Sukhotskii A. B., Kuntyshev V. B., Bessonnyi A. N., Minnigaleev A. Sh., Zhdanovich A. Yu. [Differentiated Account of Thermal Resistance of an External Contaminant of Tube Fins of Staggered Bundles in the Thermal Calculation of Air-Cooled Heat Exchangers]. *XV Minskiy mezhdunarodnyy forum po teplo- i massoobmenu: tezisy dokladov i soobshcheniy* [XV Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer: Abstracts of Presentations and Communications]. Minsk, 2016, vol. 3, pp. 424–426 (In Russian).

3. Kuntyshev V. B., Sukhotskii A. B., Filatov S. O., Zhdanovich A. Yu. Investigation of thermal conductivity of external pollutants of heat exchange sections of air-cooling apparatuses. *Khimicheskaya tekhnika* [Chemical Engineering], 2013, no. 11, pp. 40–43 (In Russian).

4. Karlovich T. B. Heat Transfer of round finned tubes at Irregular operational Contamination of intercostal space. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal* [Journal of Engineering Physics and Thermophysics], 2018, vol. 91, no. 5, pp. 1278–1286 (In Russian).

5. Dudarev V. V., Filatov S. O., Karlovich T. B. The Method of Calculation and Analysis of Heat Transfer Coefficient of Bimetallic Finned Tubes of Air Cooling Units with Irregular External Contamination. *Energetika. Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy i energeticheskikh ob'edineniy SNG* [Energetika. Proc. CIS Higher Educ. Inst. and Power Eng. Assoc.], 2017, vol. 60, no. 3, pp. 237–255 (In Russian).

6. Kayansayan N. Thermal characteristics of fin-and-tube heat exchanger. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, 1993, vol. 7, pp. 177–188.

7. Hahne E., Zhu D. Natural convection heat transfer on finned tubes in air. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 1994, vol. 37, pp. 59–63.

8. Chen H.-T., Hsu W.-L. Estimation of heat transfer coefficient on the fin of annular-finned tube heat exchangers in natural convection for various fin spacing. *Int. J. Heat Mass Transf.*, 2007, vol. 50, pp. 1750–1761.

9. Katsuki R., Shioyama T., Iwaki C., Yanazawa T. Study on free convection heat transfer in a finned tube array. *Int. J. Air-Condition. Refrig.*, 2015, vol. 23, pp. 1–9.

10. Unger S., Krepper E., Hampel U. Numerical analysis of heat exchanger designs for passive spent fuel pool cooling to ambient air. *Nucl. Eng. Des.*, 2018, vol. 333, pp. 224–234.

11. Volodin V. I., Kuntyshev V. B., Petreeva N. G., Bessonnyi A. N., Bessonnyi E. A. [Influence of External Contamination on Efficiency of Air Cooling Units]. *XIV Minskiy mezhdunarodnyy forum po teplo- i massoobmenu: tezisy dokladov i soobshcheniy* [XIV Minsk International Forum on Heat and Mass Transfer: Abstracts of Presentations and Communications]. Minsk, 2012, vol. 3, pp. 315–317 (In Russian).

12. Kern D., Kraus A. *Razvitye poverkhnosti teploobmena* [Extended surface heat transfer]. Moscow, Energiya Publ., 1977. 464 p.

13. Watson G. N. *Teoriya Besselevykh funktsiy* [A treatise on the theory of Bessel functions]. Moscow, Izdatel'stvo inostrannoy literatury Publ., 1949. 798 p.

Информация об авторах

Карлович Татьяна Борисовна – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tbkar@mail.ru

Сухоцкий Альберт Борисович – кандидат технических наук, доцент кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: alk2905@mail.ru

Данильчик Екатерина Сергеевна – аспирант кафедры энергосбережения, гидравлики и теплотехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Information about the authors

Karlovich Tatyana Borisovna – PhD (Physics and Mathematics), Senior Lecturer, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tbkar@mail.ru

Sukhotskii Albert Borisovich – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: alk2905@mail.ru

Danilchik Ekaterina Sergeevna – PhD student, the Department of Energy-Saving, Hydraulics and Heat Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: katya.156.156@gmail.com

Поступила 15.05.2019

УДК 539.1.06:539.23.234

В. В. Тульев

Белорусский государственный технологический университет

**ВЛИЯНИЕ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА АССИСТИРУЮЩИХ ИОНОВ
НА ТОЛЩИНУ ПОКРЫТИЯ, ПОЛУЧЕННОГО МЕТОДОМ
ДИНАМИЧЕСКОГО АТОМНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ**

В данной работе обсуждаются экспериментальные результаты по изучению распределения элементов в приповерхностных слоях Cu/Al- и Pd/Fe-структур, сформированных методом динамического атомного перемешивания (ДАП). Метод ДАП заключается в осаждении покрытия на подложку при одновременном облучении формируемой структуры ускоренными ионами инертных газов. Осаждение покрытий происходило в вакууме ($0,2-2,0 \cdot 10^{-6}$ торр). В качестве ассистирующих ионов использовались ионы аргона.

Состав и распределение элементов по глубине в сформированных покрытиях изучались методом Резерфордского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием.

При осаждении Cu-покрытия на алюминий и Pd-покрытия на железо методом динамического атомного перемешивания, в котором в качестве ассистирующих ионов использовались ионы Ar^+ с энергией 6 кэВ, и интегральными потоками $(0,7-1,6) \cdot 10^{16}$ ион/см² формируется покрытие толщиной $\sim(10-25)$ нм. В состав покрытия входят атомы осаждаемого металла (Cu, Pd), атомы из подложки (Al, Fe), атомы аргона и в случае Cu/Al-структур – атомы сопутствующей примеси кислорода.

Установлено, что толщина сформированного покрытия зависит от параметра J_i / J_a (отношение плотности потока J_i ассистирующих ионов к плотности потока J_a атомов осаждаемого покрытия). Следует отметить, что при расчете толщины покрытия необходимо учитывать не только процессы распыления атомов осаждаемой пленки, но и процессы распыления атомов подложки.

Ключевые слова: динамическое атомное перемешивание, плотность потока, ассистирующие ионы, палладий, железо, медь, алюминий.

V. V. Tul'ev

Belarusian State Technological University

**EFFECT OF THE DENSITY OF THE FLOW OF ASSISTANT IONS
ON THE COATING THICKNESS OBTAINED
BY THE DYNAMIC ATOMIC MIXING METHOD**

In this paper, we discuss experimental results on the study of the distribution of elements in the surface layers of Cu/Al and Pd/Fe structures formed by the method of dynamic atomic mixing. The method of dynamic atomic mixing consists in the deposition of a coating on a substrate while simultaneously irradiating the structure formed with accelerated ions of inert gases. The deposition of coatings has taken place in a vacuum ($0.2-2.0 \cdot 10^{-6}$ Torr). Argon ions have been used as assisting ions.

Rutherford back scattering and computer simulation RUMP code have been applied to investigate the composition of the modified surface.

In the deposition of Cu coatings on aluminum and Pd coatings on iron by the dynamic atomic mixing method, in which Ar^+ ions with an energy of 6 keV have been used as assisting ions, and integrated fluxes $(0.7-1.6) \cdot 10^{16}$ ion/cm², a coating with a thickness of $\sim(10-25)$ nm is formed. The composition of the penetration includes atoms of the deposited metal (Cu, Pd), atoms from the substrate (Al, Fe), argon atoms, and in the case of Cu/Al structures, atoms of the accompanying impurity O.

It is established that the thickness of the formed coating depends on the parameter J_i / J_a (the ratio of the flux density J_i of the assisting ions to the flux density J_a of the atoms of the deposited coating). It should be noted that when calculating the thickness of the coating, it is necessary to take into account not only the sputtering of atoms of the deposited film, but also the sputtering of atoms of the substrate.

Key words: dynamic atomic mixing, flux density, assisting ions, palladium, iron, copper, aluminum.

Введение. Ионно-лучевые методы модифицирования структуры и свойств приповерхностных слоев материалов и изделий достаточно широко исследуются и применяются в последние десятилетия. Эти методы позволяют изменять структуру и состав поверхно-

сти материалов; формировать слой с повышенными физико-механическими, физико-химическими и другими свойствами; получать сплавы и соединения, состав которых невозможно получить традиционными способами, и т. д. [1–4].

На структуру и свойства приповерхностных слоев материалов, модифицированных ионно-лучевыми методами, влияют разнообразные факторы: природа атомов подложки, покрытия и сопутствующих примесей, плотность ионного тока, скорость и время осаждения покрытий, энергия и интегральный поток ассистирующих ионов, коэффициенты распыления покрытия и подложки и др. [1–4]. В данной работе изучалось влияние плотности потока J_i ассистирующих ионов на распределение элементов по глубине и на толщину покрытия, сформированного методом динамического атомного перемешивания (ДАП). Суть метода ДАП состоит в том, что процесс осаждения покрытий на подложку сопровождается облучением ионами инертных газов. Применение этого метода также обеспечивает хорошее сцепление осаждаемого покрытия с подложкой, при этом размеры по толщине и состав наносимых слоев не ограничиваются [5].

Основная часть. В качестве подложек использовалось железо чистотой 99,5% и алюминий чистотой 99,995%. На железную подложку наносилось палладиевое покрытие, а на алюминиевую – медное покрытие. Осаждение покрытий происходило в вакууме ($0,2\text{--}2,0 \cdot 10^{-6}$ торр). Параметры осаждения покрытий представлены в таблице.

Параметры осаждения покрытий методом ДАП

Подложка	Fe	Al
Покрытие	Pd	Cu
Скорость r осаждения покрытия, нм/с	$0,120 \pm 0,005$	$0,150 \pm 0,005$
Время осаждения покрытия, с	130 ± 2	130 ± 2
Максимальная толщина покрытия d_0 , нм	$15,6 \pm 0,3$	$19,8 \pm 1,1$

В качестве ассистирующих ионов использовались ионы аргона с энергией 6 кэВ. Диаметр ионного пучка составлял ~ 10 см. Плотность тока j в центре ионного пучка была равна $(20,2 \pm 0,2)$ мкА/см². По мере удаления от центра пучка плотность ионного тока уменьшалась. Зависимость плотности j ионного тока от расстояния до центра ионного пучка представлена на рис. 1.

Изменение плотности тока в ионном пучке приводит к тому, что интегральный поток ассистирующих ионов аргона в пределах ионного пучка изменяется от $0,7 \cdot 10^{16}$ до $1,6 \cdot 10^{16}$ ион/см². Используя плотность ионного тока и скорость осаждения покрытия, можно рассчитать параметр J_i/J_a (отношение плотности потока ассистирующих ионов к плотности потока атомов осаждающегося покрытия):

$$\frac{J_i}{J_a} = \frac{1}{F} \frac{j}{r} \frac{M}{\rho},$$

где F – постоянная Фарадея; j – плотность ионного тока; r – скорость осаждения покрытия; M – молярная масса; ρ – плотность.

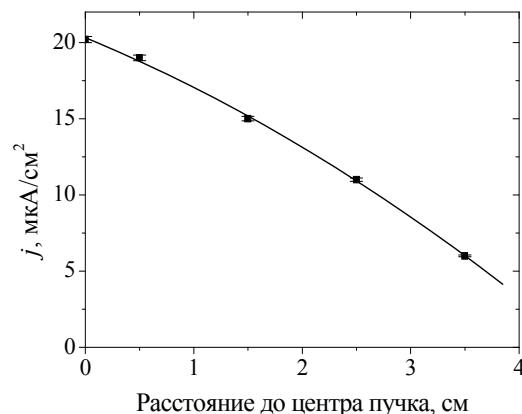


Рис. 1. Зависимость плотности ионного тока от расстояния до центра ионного пучка

Расчеты показали, что используемый ионный пучок позволяет изменять параметр J_i/J_a в интервале от 0,04 до 0,12 (рис. 2).

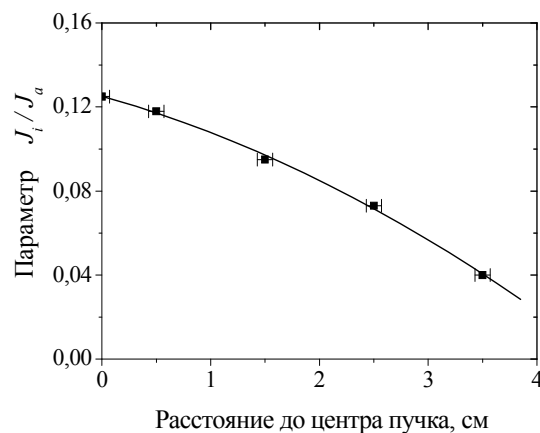


Рис. 2. Зависимость параметра J_i/J_a от расстояния до центра ионного пучка

Толщина осаждаемого покрытия была рассчитана на основе d_0 , параметра J_i/J_a , с учетом процесса распыления формирующегося покрытия ассистирующими ионами [6].

Элементный состав, распределение компонентов покрытия по глубине и толщина покрытия определялись методом резерфордского обратного рассеяния (РОР) ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием. Энергия ионов гелия составляла 2 МэВ, угол влета 0° , угол вылета 15° , угол рассеяния 165° . Энергетическое разрешение анализирующей системы было 15 кэВ. Моделирование

экспериментальных спектров резерфордского обратного рассеяния выполнялось с использованием программы RUMP [7]. Исследуемый образец представлял собой пластину длиной 4 см. Спектры POP снимались в четырех различных точках образца: на расстоянии 0,5, 1,5, 2,5 и 3,5 см от края пластины (при осаждении покрытия один край образца располагался под центром ионного пучка). Это позволило анализировать распределение элементов по глубине в покрытии, полученном при различных потоках ассистирующих ионов J_i .

Экспериментальные спектры POP ионов гелия от структур Cu/Al и Pd/Fe, сформированных при интегральном потоке ассистирующих ионов $\Phi = 0,7 \cdot 10^{16}$ ион/см² ($J_i / J_a = 0,04$), показаны на рис. 3.

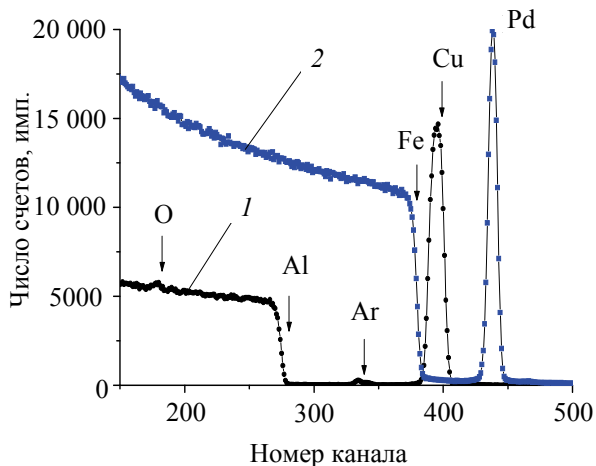


Рис. 3. Спектр POP ионов гелия от структур Cu/Al (1) и Pd/Fe (2), полученных при $J_i / J_a = 0,04$

На спектрах POP полученных от образцов с осажденным покрытием (рис. 3), наблюдаются сигналы от атомов подложки (Al, Fe), атомов осаждаемого покрытия (Cu, Pd) и атомов аргона. Отличительной особенностью является наличие атомов кислорода в структуре Cu/Al. Этот эффект характерен при осаждении покрытий на алюминий [8]. В структурах Pd/Fe атомы кислорода отсутствуют, или их содержание меньше чувствительности метода.

На основе данных POP с помощью компьютерного моделирования RUMP [7] были построены концентрационные профили элементов структур (рис. 4).

Используя методику [4], по концентрационным профилям экспериментально определили толщину покрытия, сформированную при различных значениях J_i / J_a . Сравнительные данные приведены на рис. 5, 6.

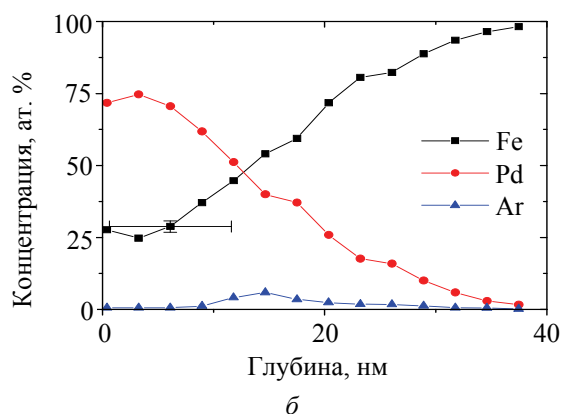
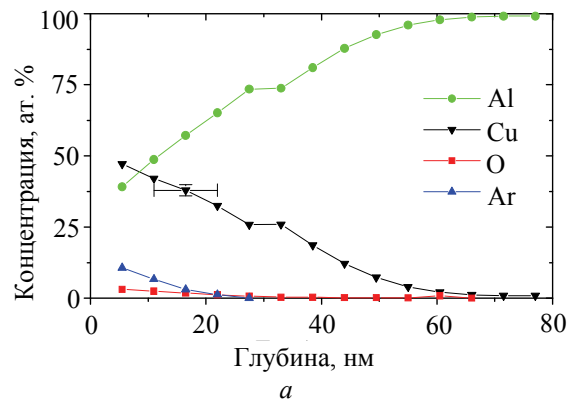


Рис. 4. Профили распределения элементов по глубине в Cu/Al- (а) и Pd/Fe-структуре (б) при $J_i / J_a = 0,12$

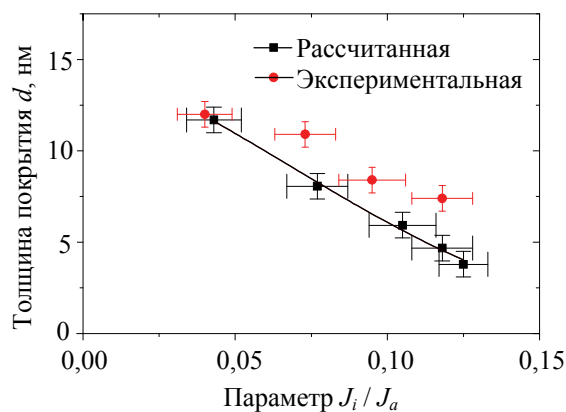


Рис. 5. Толщина покрытия в Cu/Al-структуре в зависимости от параметра J_i / J_a

Из рис. 5, 6 видно, что для структур Cu/Al при значениях параметра $J_i / J_a = 0,07-0,13$, а для структур Pd/Fe при значениях $J_i / J_a = 0,04-0,10$ экспериментально определенная толщина покрытия выше теоретически рассчитанной толщины. Так как при расчете толщины покрытия мы учитывали только распыление атомов подложки ассистирующими ионами аргона, то наблюдаемое различие, по нашему мнению, связано с тем, что, помимо распыления атомов покрытия (Cu, Pd), происходит также распыление атомов из подложки. Атомы

подложки (Al, Fe) в покрытии присутствуют вследствие атомного перемешивания в каскадах атомных столкновений на границе раздела покрытие – подложка при ионном ассистировании процесса осаждения и встречной диффузии атомов подложки в покрытие [1, 4, 6, 8].

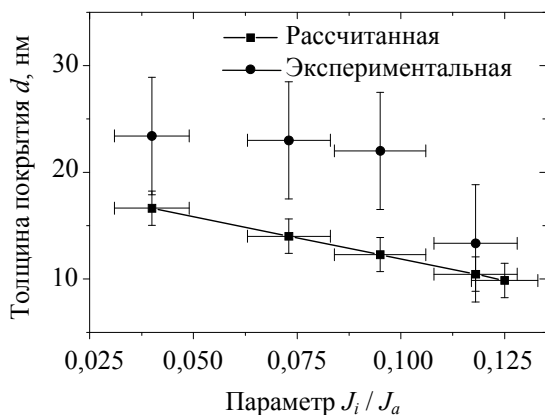


Рис. 6. Толщина покрытия в Fe/Pd-структуре в зависимости от параметра J_i/J_a

Для структур Cu/Al (рис. 5) при уменьшении плотности потока J_i ассистирующих ионов ($J_i/J_a < 0,07$) толщина осажденного покрытия приближается к теоретически рассчитанной. При уменьшении J_i происходит преимущественно процесс распыления атомов покрытия Cu, вследствие этого толщина осажденного слоя приближается к теоретически рассчитанной.

Для структур Pd/Fe (рис. 6) при увеличении плотности потока J_i ассистирующих ионов ($J_i/J_a > 0,10$) толщина осажденного покрытия сравнима с рассчитанной в пределах погрешности измерений метода. При увеличении плотности потока J_i ассистирующих ионов усиливаются процессы распыления как атомов покрытия, так и атомов подложки, поэтому коэффициент распыления атомов палладия приближается к теоретически ожидаемому. Вследствие этого

толщина осажденного покрытия соответствует рассчитанной.

Различное влияние плотности потока J_i ассистирующих ионов на толщину формируемого покрытия для Cu/Al- и Pd/Fe-структур мы связываем также с различием в коэффициентах распыления атомов Cu и Pd ионами аргона, которые при энергии ионов Ag^+ 6 кэВ равны соответственно 4 и 6 ат./ион.

Заключение. Методом резерфордовского обратного рассеяния ионов гелия в сочетании с компьютерным моделированием определено, что при осаждении Pd-покрытия на Fe и Cu-покрытия на Al методом динамического атомного перемешивания, в котором в качестве ассистирующих ионов использовались ионы Ag^+ с энергией 6 кэВ, и интегральными потоками $(0,7-1,6) \cdot 10^{16}$ ион/см² формируются покрытия толщиной $\sim(10-25)$ нм. В состав покрытия входят атомы осаждаемого металла (Cu, Pd), атомы из подложки (Al, Fe), атомы аргона и в случае Cu/Al-структур – атомы сопутствующей примеси кислорода.

Установлено, что толщина сформированного покрытия зависит от параметра J_i/J_a (отношение плотности потока I ассистирующих ионов к плотности потока A атомов осаждаемого покрытия), а при фиксированной скорости осаждения покрытий – от плотности потока J_i ассистирующих ионов. Следует отметить, что при расчете толщины покрытия необходимо учитывать не только процессы распыления атомов осаждаемой пленки, но и процессы распыления атомов подложки и сопутствующих примесей.

Различное влияние плотности потока J_i ассистирующих ионов на толщину формируемого покрытия для Cu/Al- и Pd/Fe-структур обусловлено различием в коэффициентах распыления атомов покрытия ионами аргона.

Литература

1. Тульев В. В., Касперович А. В. Элементный состав, структура и фрикционные характеристики поверхности резины, модифицированной ионно-ассистируемым осаждением покрытий на основе Mo, W // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. 2009. Вып. XVII. С. 54–56.
2. Структура, термостойкость и микротвердость покрытий ZrO_2 , полученных разными методами / С. Г. Валюхов [и др.] // Неорганические материалы. 2016. Т. 52, № 4. С. 457–463.
3. Трегубов И. М., Смолякова М. Ю., Каширин М. А. Адгезионная прочность композитных покрытий на основе железа // Вестник Воронежского государственного технического университета. 2017. Т. 13, № 2. С. 92–96.
4. Изучение металлсодержащих (Ti, Co) покрытий, осажденных на кремний при ионном ассистировании, ядерно-физическими методами / О. Г. Бобрович [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 2006. № 1. С. 54–58.
5. Gailliard J. P. Recoil implantation and mixing // Surface Engineering. Surface Modification of Materials / ed. R. Kossowsky, S. C. Singhal. Pittsburg: Westinghouse R&D Center Materials Science Division, 1984. P. 32–47.

6. Тульев В. В., Ташлыков И. С., Литвинов Д. А. Влияние параметров осаждения на толщину модифицированного слоя при динамическом атомном перемешивании Cu/Al-структур // Труды БГТУ. 2013. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 66–68.

7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. B15. P. 227–234.

8. Тульев В. В., Ташлыков И. С. Состав и распределение компонентов по глубине в Cu-Al структурах, формируемых методом ионного перемешивания // Физика и химия обработки материалов. 2000. № 3. С. 14–17.

References

1. Tul'ev V. V., Kasperovich A. V. Element composition, structure and friction characteristics of rubber surface modified by ion-assisted deposition of coatings based on Mo, W. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series VI, Physics and Mathematics. Informatics, 2009, issue XVII, pp. 54–56 (In Russian).

2. Valyukhov S. G., Stogney O. V., Filatov M. S., Kashirin M. A. Structure, thermal resistance and microhardness of ZrO₂ coatings obtained by different methods. *Neorganicheskiye materialy* [Inorganic Materials], 2016, vol. 52, no. 4, pp. 457–463 (In Russian).

3. Tregubov I. M., Smolyakova M. Yu., Kashirin M. A. The adhesion strength of the composite coatings based iron. *Vestnik Voronezhskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta* [Bulletin of Voronezh State Technical University], 2017, vol. 13, no. 2, pp. 92–96 (In Russian).

4. Bobrovich O. G., Tul'ev V. V., Tashlykov I. S., Barayshuk C. M. The study of metal-containing (Ti, Co) coatings deposited on silicon with ion-assisted nuclear-physical methods. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

5. Gailliard J. P. Recoil implantation and mixing. Surface Engineering. *Surface Modification of Materials*; ed. R. Kossowsky, S. C. Singhal. Pittsburg, Westinghouse R&D Center Materials Science Division, 1984. P. 32–47.

6. Tul'ev V. V., Tashlykov I. S., Litvinov D. A. Effect of deposition parameters on the thickness of the modified layer with dynamic atomic mixing of Cu/Al structures. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2013, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 66–68 (In Russian).

7. Doolittle L. R. A semiautomatic algorithm for rutherford backscattering analysis. *Nucl. Instr. Meth. Phys. Res.*, 1986, vol. B15, pp. 227–234.

8. Tul'ev V. V., Tashlykov I. S. Composition and distribution of components by depth in Cu-Al structures formed by ion mixing. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and Chemistry of Materials Treatment], 2000, no. 3, pp. 14–17 (In Russian).

Информация об авторе

Тульев Валентин Валентинович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: tvv69@mail.ru

Information about the author

Tul'ev Valentin Valentinovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tvv69@mail.ru

Поступила 15.05.2019

ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ

УДК 621.3.29

П. П. Урбанович

Белорусский государственный технологический университет
(в сотрудничестве с Люблинским католическим университетом Иоанна Павла II, Польша)

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ПОЛУПРОВОДНИКОВОЙ ПАМЯТИ ИНФОРМАЦИОННО-ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ

Приведен анализ некоторых подходов в моделировании технологичности и надежности кристаллов и модулей полупроводниковой памяти. Один из существующих подходов основан на совершенствовании отдельных приборов (чипов) для повышения их надежности и выхода годных (технологичности); другой – на анализе фактической надежности приборов с целью получения достоверных данных, необходимых для расчета надежных характеристик модулей памяти или иной аппаратуры с памятью. Подчеркнуто, что дефекты и отказы в кристаллах и модулях полупроводниковой памяти, разработка адекватных моделей для описания указанных неисправностей, а также разработка и использование эффективных структурно-избыточных средств для нейтрализации неисправностей следует рассматривать и решать как единую комплексную проблему. Имеющиеся сведения о характере ошибок при обращении к модулям памяти (при считывании данных) персонального компьютера позволяют сделать предположение, что этот информационный канал можно рассматривать с точки зрения группирующегося характера информационных ошибок и связанного с этим группирования отказов в микросхемах памяти и каналах передачи информации с подключением полупроводниковой памяти. С учетом выявленных аналогий между распределениями ошибок и отказов (дефектов) в телефонных и телеграфных каналах передачи и в системах полупроводниковой памяти в статье рассмотрены подходы к моделированию распределения отказов в кристаллах памяти. Сформулирован вывод: для обобщенного отрицательного биномиального распределения средняя площадь кристалла, в которой содержится x отказов, тем меньше, чем больше само число отказов, или, чем больше отказов, тем сильнее они должны группироваться.

Ключевые слова: полупроводниковая память, дефекты и отказы, моделирование, надежность.

P. P. Urbanovich

Belarusian State Technological University
(in cooperation with the John Paul II Catholic University of Lublin, Poland)

MODELING AND ANALYSIS OF RELIABLE PARAMETERS OF SEMICONDUCTOR MEMORY OF INFORMATION AND COMPUTING DEVICES

The analysis of some approaches in modeling of the manufacturability and reliability of chips and modules of semiconductor memory is given. One of the existing approaches is based on the improvement of individual devices (chips) to increase their reliability and yield (manufacturability); the other is based on an analysis of the actual reliability of devices in order to obtain reliable data necessary for calculating of the reliability characteristics of memory modules or other memory equipment. It was emphasized that defects and failures in crystals and modules of semiconductor memory, the development of adequate models for describing these faults, and the development and use of effective structural redundant means for neutralizing of faults should be considered and solved as a unified complex problem.

The available information on the nature of errors in accessing the memory modules (readings) of a personal computer allow us to make an assumption, that this information channel can be analyzed from the point of view of the clustering nature of information errors, and the associated grouping of failures in memory chips and information channels with semiconductor memory. Taking into account the identified analogies between the distribution of errors and failures (defects) in the telephone and telegraph transmission channels and in semiconductor memory systems, the article considers approaches to the modeling of the distribution of failures in memory chips. The conclusion was formulated: for a generalized negative binomial distribution, the average chip area, which contains x failures, the less, the more the number of failures. Or, the more failures, the stronger they should be clustered.

Key words: semiconductor memory, defects and failures, modeling, reliability.

Введение. Поступательное увеличение сложности решаемых радиоэлектронными и вычислительными устройствами (прежде всего, это относится к бортовым средствам, компьютерным системам и сетям) задач требует соответствующего увеличения надежности и быстродействия как отдельных чипов (кристаллов), так и модулей (блоков) полупроводниковых запоминающих устройств (ЗУ), составляющих основу оперативной памяти аппаратуры.

В теоретических и прикладных исследованиях, касающихся, например, надежности памяти компьютера на основе полупроводниковых структур, используются, в основном, две методики [1]. Одна из них основана на совершенствовании отдельных приборов (чипов) и повышении их надежности. Другая – на анализе фактической надежности приборов с целью получения достоверных данных, необходимых для расчета надежностных характеристик модулей памяти или иной аппаратуры с памятью.

Указанная комплексная, двуединая задача: повышение надежности модулей памяти, с одной стороны, и отдельных кристаллов памяти, с другой, – решается, прежде всего, уменьшением геометрических размеров элементов, т. е. размер ячейки памяти накопителя непрерывно сокращается. Структура ячеек памяти тоже совершенствуется, но характерные для них ограничения и отрицательные черты остаются неизменными: указанные тенденции сказываются на заметном усилении электрических полей и увеличении плотности токов в кристалле, ужесточении требований по теплоотводу, повышенной восприимчивости кристалла к различным дестабилизирующим факторам, приводящим к появлению отказов и/или сбоев в работе блоков памяти. Исследованию физики, причинно-следственных связей указанного явления, поиску эффективных средств локализации информационных ошибок, появляющихся в результате неисправностей в ЗУ, ранее посвящались многие исследования, широко описывались основные результаты таких исследований как за рубежом (множественные ссылки на зарубежные публикации можно найти в [2]), так и у нас (например, [3–8]).

Причем основной причиной интереса к указанному объекту исследования являлась, по видимому, необходимость обеспечить экономическую эффективность производства кристаллов ЗУ [9]. Эта эффективность зависела в определяющей степени от качества технологического процесса производства изделий, которое проявлялось в уровне выхода годных (ВГ) либо в наличии большего или меньшего числа отказавших (неправильно функционирующих) элементов накопителя и других структурных блоков ЗУ.

Указанная выше ссылка [1] на комплексное исследование надежности полупроводниковых устройств памяти, выполненное известной корпорацией Toshiba, содержит достаточно глубокий анализ практически всего спектра современного состояния проблемы обеспечения функциональной надежности ЗУ. Содержание этой книги свидетельствует о том, что разработчики полупроводниковых ЗУ должны держать в поле своего зрения те же вопросы, что и их предшественники несколько десятилетий назад. Причем, в силу вышеупомянутых особенностей, эти вопросы приобрели новое качество.

Новизна, среди прочего, связана с необходимостью учета последствий влияния на ЗУ электромагнитных и ионизирующих излучений [10, 11]. Для радиоизлучения (как непрерывного, так и импульсного различной длительности) проведено достаточно много исследований по воздействию на материалы и приборные структуры. И было установлено, что на стойкость интегральных микросхем существенно влияют параметры радиоизлучения (несущая частота, длительность и частота повторения импульсов, ориентация относительно электромагнитных полей) и конструктивно-технологические особенности кристаллов (технология изготовления, топология микросхем, тип корпуса, выводов и т. п.).

Описанные результаты указывают на существенную роль преобразований точечно-дефектной структуры кристаллов, токоведущих линий, которые могут стимулироваться при воздействии радиоимпульсов.

В последнее время появляются публикации, в которых анализируются и моделируются отказы модулей памяти компьютеров и

иных информационно-вычислительных средств (см., например, [12]).

Достаточно эффективным средством для повышения ВГ стало размещение на кристалле дополнительных (резервных) ячеек памяти, которые соответствующими коммутациями заменяли выявленные дефектные элементы. Другой подход состоял в использовании избыточного (помехоустойчивого) кодирования (записываемой в накопитель) и, соответственно, декодирования (считываемой из накопителя ЗУ) информации [5, 8, 9]. Использование избыточных бит (бит паритета) в компьютерах было изначально предусмотрено на уровне шинного обмена данными между процессором и блоками оперативной и внешней памяти. При этом каждый байт данных «сопровождался» битом четности или паритета (parity bit), дополняющим количество единиц в байте до нечетного (или четного).

Стандарт, введенный IBM, предусматривал, что информация в банках памяти хранится фрагментами по девять бит, причем восемь из них (составляющих один байт) предназначены собственно для данных, а девятый является битом четности (parity). При обнаружении ошибки паритета схемой контроля (при чтении данных) вырабатывалось немаскируемое прерывание (NMI) и его обработчик обычно выводил на экран сообщение «Parity Error Check» (ошибка паритета) с указанием адреса сбойной ячейки и останавливал процессор командой Halt. Классическим примером архитектуры ЗУ с битом паритета является модуль SIMM (Single In Memory Module), в котором обычно один корпус (чип) памяти предназначался под хранение бит паритета. Если биты паритетов позволяли лишь обнаруживать одиночные (или даже большее число ошибок, если это число нечетно) ошибки в каждой байте данных, то избыточный код (ECC – Error Correcting Code – код, корректирующий ошибки), о котором мы упоминали выше, позволяет также исправлять ошибки.

Обозначенные проблемы: дефекты и отказы в кристаллах и модулях полупроводниковой памяти, разработка адекватных моделей для описания указанных неисправностей, а также разработка и использование эффективных структурно-избыточных средств для нейтрализации неисправностей (дефектов и отказов) – следует рассматривать и решать как единую комплексную проблему. В настоящей статье проанализируем особенности моделирования надежности устройств памяти с учетом характера распределения отказов и вызванных ими (а также иными, внешними факторами) ошибок в хранимой информации.

Основная часть. При моделировании надежности обычно оперируют тремя элемента-

ми: определением отказа (дефекта) или ошибки, временем (площадью, если речь идет о распределении по площади кристалла), параметрами окружающей среды и условиями эксплуатации изделия [1, 4, 7, 8, 13]. Понятно, что надежность является функцией времени при константных значениях остальных параметров. Здесь приведено некоторое отождествление времени с площадью с учетом того, что была установлена некоторая схожесть между распределением ошибок в телефонных каналах [14, 15], с одной стороны, и распределением дефектов в кристаллах памяти и на целых полупроводниковых пластинах [4, 6–8, 16–18] – с другой. Указанная схожесть базируется на использовании одного общего для обоих классов аппаратуры параметра – степени группирования ошибок в каналах связи и степени группирования дефектов в кристаллах памяти. Имеющиеся сведения о характере ошибок (считывания) при обращении к модулям памяти персонального компьютера [12, 19–21] позволяют сделать предположение, что и этот информационный канал можно рассматривать с точки зрения группирующегося характера ошибок и связанного с этим группирования отказов в микросхемах памяти.

Следует отметить, что для описания характера распределения отказов и информационных ошибок применяются как непрерывные функции (экспоненциальное, логарифмическое нормальное и нормальное распределения, распределение Вейбулла, а также гамма-распределение), так и дискретные (геометрическое, биномиальное, отрицательное биномиальное (ОБР), обобщенное отрицательное биномиальное распределения (ООБР), распределение Пуассона) [1, 4–9, 16–18, 22].

Далее, с учетом выявленных аналогий между распределениями ошибок и отказов (дефектов) в каналах передачи и в системах полупроводниковой памяти, рассмотрим модель распределения отказов в кристаллах памяти, т. е. изменяющимся параметром будет являться площадь кристалла.

Пусть x – случайная величина, обозначающая число отказов, относящихся к площади S кристалла. Обозначим вероятность возникновения x отказов в области S как $P(x, S)$. Зададим для S приращение ΔS . Тогда можно записать:

$$\begin{aligned} P(x, S + \Delta S) = & P(x, S | 0, \Delta S) + \\ & + P(x - 1, S | 1, \Delta S) + P(x - 2, S | 2, \Delta S) + \\ & + \dots + P(0, S | x, \Delta S), \end{aligned} \quad (1)$$

где $P(\cdot | \cdot)$ означают условные вероятности. Например, $P(x - 1, S | 1, \Delta S)$ – вероятность возникновения $x - 1$ отказов в области площадью S

при наличии одного отказа в области ΔS . Если предположить, что ΔS достаточно мало, то вероятность появления в ΔS двух и более отказов также мала и в пределе ею можно пренебречь. Тогда выражение (1) можно записать в следующем виде:

$$P(x, S + \Delta S) = P(x, S | 0, \Delta S) + P(x - 1, S | 1, \Delta S). \quad (2)$$

Используя соотношения для условных вероятностей, преобразуем правую часть (2):

$$P(x, S + \Delta S) = P(x, S) \cdot P(0, \Delta S | x, S) + P(x - 1, S) \cdot P(1, \Delta S | x - 1, S). \quad (3)$$

Если возникновение отказов считать процессом независимым, то условные вероятности в (3) можно заменить безусловными:

$$P(x, S + \Delta S) = P(x, S) \cdot P(0, \Delta S) + P(x - 1, S) \cdot P(1, \Delta S). \quad (4)$$

Легко показать, что при $P(1, \Delta S) = \lambda \Delta S$ дальнейшие преобразования последнего выражения приведут к распределению Пуассона (см. [7, 21]). Условные вероятности в выражении (3) можно аппроксимировать следующим образом:

$$P(1, \Delta S | x - 1, S) = (c + bx) \Delta S, \quad (5)$$

где c и b – некоторые безразмерные коэффициенты.

Использование подобной аппроксимации и дальнейшие преобразования выражения (4) приводят к ООБР:

$$P(x, S) = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x + c/b)}{\Gamma(x)} e^{-(x + c/b)bs} (e^{bs} - 1)^x$$

с производящей функцией вида

$$G(z, S) = e^{bs} - z(e^{bs} - 1), \quad (6)$$

где $\Gamma()$ – гамма-функция.

Используя производящую функцию, определим среднее и дисперсию ООБР соответственно:

$$\lambda = G'(z, S)_{z=1},$$

$$D_x = G''(z, S)_{z=1} + G'(z, S)_{z=1} - (G'(z, S)_{z=1})^2,$$

где G' , G'' – соответственно первая и вторая производные производящей функции.

С учетом этого получим:

$$\lambda = (e^{bs} - 1) \frac{c}{b}, \quad (7)$$

$$D_x = \lambda \left(1 + \frac{\lambda}{\alpha} \right), \quad (8)$$

где $\alpha = \frac{c}{b}$. Подстановка (7) и (8) в выражение для $P(x, S)$ после некоторых корректных упрощений приведет к следующему соотношению:

$$P(x) = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{(\lambda / \alpha)^x}{(1 + \lambda / \alpha)^{\alpha + x}}. \quad (9)$$

Однако использование выражения для $P(x, S)$ при моделировании распределения отказов является предпочтительным по сравнению с (9). Это связано с тем, что первое позволяет учесть экспоненциальный рост среднего числа отказов на кристалле с увеличением площади кристалла при введении в него избыточных схем для обнаружения и нейтрализации отказов [5, 6, 18, 22], т. е. предполагается, что предлагаемый здесь подход повышает точность вычисления.

Сравнивая (7) и (8), легко заметить, что для конечных значений α среднее и дисперсия различны. Аналогичное различие характерно и для реальных данных [4–6, 8], в то время как для пуассоновского распределения эти величины совпадают.

Представляется целесообразным проанализировать использование ООБР и пуассоновского распределений с позиции учета группирования отказов. Для этого определим среднее значение площади, содержащей x отказов для обоих распределений. Сравнение таких величин для этих случаев может служить оценкой степени группирования. Для пуассоновского распределения:

$$\begin{aligned} m_{ns,x} &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x!} (DS)^x e^{-DS} dS = \\ &= \frac{D^x}{x!} \int_0^{\infty} S^x e^{-DS} dS. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получим:

$$m_{ns,x} = \frac{1}{D}.$$

Определим аналогичную величину для ООБР:

$$\begin{aligned} m_{os,x} &= \int_0^{\infty} \frac{\Gamma(x + \alpha)}{x! \Gamma(\alpha)} e^{-(x + \alpha)bs} (e^{bs} - 1)^x dS = \\ &= \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x + \alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^{\infty} \frac{(e^{bx} - 1)^x}{e^{(x + \alpha)bs}} dS. \end{aligned} \quad (10)$$

В последнем выражении делаем замену $e^{bs} - 1 = t$, тогда

$$S = \frac{1}{b} \ln(t + 1),$$

и, кроме того, формально

$$dt = be^{bs} dS, \quad dS = \frac{dt}{be^{bs}}.$$

С учетом указанной замены и подстановок перепишем (10):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{(e^{bS}-1)^x}{e^{(x+\alpha)bS}} dS = \\ & = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^x}{b(t+1)e^{(x+\alpha)\ln(t+1)}} dt. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что

$$(t+1)e^{(x+\alpha)\ln(t+1)} = (t+1)^{x+\alpha+1},$$

соотношение (10) примет вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{t^x}{(t+1)^{x+\alpha+1}} dt = \\ & = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(t+1)^{z+\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (11)$$

В последнем интеграле величину $x+1$ обозначим как z , тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{t^x}{(t+1)^{x+\alpha+1}} dt = \\ & = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(t+1)^{z+\alpha}} dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Интеграл в (12) есть бета-функция с аргументами z и α , которая определяется следующим образом:

$$\int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(t+1)^{z+\alpha}} dt = B(z, \alpha). \quad (13)$$

Выразим бета-функцию через гамма-функцию:

$$B(z, \alpha) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(z+\alpha)}.$$

С учетом последнего выражения соотношение (12) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \int_0^\infty \frac{t^x}{(t+1)^{x+\alpha+1}} dt = \\ & = \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{b} \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(x+1+\alpha)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Используя формулы приведения для гамма-функций при $\alpha = \frac{c}{b}$, выражение (14) можно преобразовать к следующему виду:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{x!} \frac{\Gamma(x+c/b)}{b} \frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x+1+c/b)} = \\ & = \frac{\Gamma(x+c/b)}{x!b} \frac{x!}{(x+c/b)\Gamma(x+c/b)} = \\ & = \frac{1}{b(x+c/b)} = \frac{1}{c+bx}. \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, окончательно получили:

$$m_{os,x} = \frac{1}{c+bx}.$$

Из этого следует важнейший вывод: для ООБР средняя площадь, в которой содержится x отказов, тем меньше, чем больше само число отказов.

Иными словами, чем больше отказов, тем сильнее они должны группироваться. Зная параметры c и b , можно определить среднее значение размеров скоплений отказов.

Заключение. С учетом выявленных аналогий между распределениями ошибок и отказов (дефектов) в телефонных и телеграфных каналах передачи и в системах полупроводниковой памяти в статье рассмотрены подходы к моделированию распределения отказов в кристаллах памяти. Это важно с учетом того, что характер распределения отказов и информационные ошибки модулей памяти в информационно-вычислительных системах взаимосвязаны.

Отмечается, что для описания характера распределения отказов и информационных ошибок в системах полупроводниковой памяти применяются как непрерывные функции (экспоненциальное, логарифмическое нормальное и нормальное распределения, распределение Вейбулла, а также гамма-распределение), так и дискретные (геометрическое, биномиальное, отрицательное биномиальное (ОБР), обобщенное отрицательное биномиальное распределение (ООБР), распределение Пуассона). Сформулирован вывод: для ООБР средняя площадь кристалла с x отказами уменьшается при увеличении числа отказов. Это означает следующее: чем больше отказов сосредоточено на некоторой площади кристалла, тем сильнее они должны группироваться.

С учетом этого фактора должны проектироваться одно- и многокристалльные ЗУ. При этом параметр группирования должен учитываться при выборе избыточного (помехоустойчивого) кода, корректирующего наиболее вероятные ошибки.

Литература

1. Toshiba Memory Corporation Reliability Handbook, ver. 2, July 2018. URL: <https://business.toshiba-memory.com/content/dam/toshiba-ss/shared/docs/design-support/reliability/reliability-handbook-tmc-en.pdf> (date of access: 14.04.2019).
2. Лосев В. В., Конопелько В. К., Урбанович П. П. Системы памяти на базе запоминающих устройств с дефектными элементами // Зарубежная электронная техника. 1982. № 9. С. 3–33.

3. Валиев К. А., Орликовский А. А. Полупроводниковые интегральные схемы памяти на биполярных транзисторных структурах. М.: Советское радио, 1979. 331 с.
4. Статистические характеристики распределения отказов в кристаллах полупроводниковых запоминающих устройств / П. П. Урбанович [и др.] // Изв. вузов. Приборостроение. 1983. № 1. С. 93–95.
5. Конопелько В. К., Лосев В. В. Надежное хранение информации в полупроводниковых запоминающих устройствах. М.: Советское радио, 1986. 340 с.
6. Верниковский Е. А., Урбанович П. П. Статистические характеристики отказов запоминающих элементов в микросхемах памяти // Электронная техника. Сер. 3, Микроэлектроника. 1989. Т. 130, вып. 1. С. 61–63.
7. Майоров С. А., Урбанович П. П. Определение характеристик распределения дефектов в микросхемах полупроводниковых ОЗУ // Электронная техника. Сер. 3, Микроэлектроника. 1992. Вып. 1 (146). С. 42–45.
8. Урбанович П. П., Алексеев В. Ф., Верниковский Е. А. Избыточность в полупроводниковых интегральных микросхемах памяти. Минск: Наука і тэхніка, 1995. 262 с.
9. Урбанович П. П. Эффективность применения корректирующих кодов в больших интегральных схемах запоминающих устройств // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1982. № 5. С. 85–87.
10. Абрамешин А. Е., Жаднов В. В., Жаднов И. В. Расчетная оценка надежности электронных модулей аппаратуры космических аппаратов // Технологии ЭМС. 2012. № 1. С. 29–33.
11. Ключник А. В., Пирогов Ю. А., Солодов А. В. Методические аспекты исследования стойкости интегральных микросхем в электромагнитных полях импульсного радиоизлучения // Журнал радиоэлектроники. 2010. № 8. С. 1–27.
12. Schroeder V., Pinheiro E., Weber W.-D. DRAM Errors in the Wild: A Large-Scale Field Study // Communications of the ACM. 2009. № 54. P. 193–204.
13. Надежность в технике (ССНТ). Термины и определения: ГОСТ 27.002–2015. URL: <http://docs.cntd.ru/document/1200136419> (дата обращения: 01.04.2019).
14. Урбанович П. П., Пацей Н. В., Спиридонов В. В. Распределение ошибок в телефонных каналах передачи дискретной информации // Известия белорусской инженерной академии. 1997. № 1. С. 24–26.
15. Пуртов Л. П., Замрий А. С., Шаповалов И. Ф. Характер распределения ошибок в телефонных каналах при передаче дискретных сообщений // Электросвязь. 1965. № 6. С. 31–40.
16. Урбанович П. П. Модель распределения дефектных запоминающих элементов на кристаллах БИС ЗУ // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1986. Т. 29, № 9. С. 92–95.
17. Урбанович П. П. Прогнозирующий расчет надежности избыточных БИС запоминающих устройств // Микроэлектроника. 1990. Т. 19, вып. 6. С. 542–548.
18. Урбанович П. П., Лойка С. Л. Надежность отказоустойчивых микросхем памяти, в которых информация согласовывается с состоянием отказавших запоминающих элементов // Микроэлектроника. 1991. Т. 20, вып. 5. С. 492–497.
19. Seshagiri Rao V. R., Rani Asha. Reliability measurement of memory system using spare blocks // International Journal of Electrical Engineering & Technology (IJEET). 2018. Vol. 9, issue 1. P. 18–25.
20. Fault group pattern matching with efficient early termination for high-speed redundancy analysis / H. Lee [et al.] // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. 2018. Vol. 37. P. 1473–1482.
21. Stapper C. H. On yield, fault distributions and clustering of particles // IBM J. Res. Develop. 1986. Vol. 30, no. 3. P. 326–338.
22. Урбанович П. П., Шиман Д. В. Защита информации и надежность информационных систем. Минск: БГТУ, 2014. 91 с.

References

1. Toshiba Memory Corporation Reliability Handbook, ver. 2, July 2018. Available at: <https://business.toshiba-memory.com/content/dam/toshiba-ss/shared/docs/design-support/reliability/reliability-handbook-tmc-en.pdf> (accessed 14.04.2019).
2. Losev V. V., Konopelko V. K., Urbanovich P. P. Memory systems based on memory devices with defective elements. *Zarubezhnaya elektronaya tekhnika* [Foreign electronics], 1982, no. 9, pp. 3–33 (In Russian).
3. Valiev K. A., Orlikovskiy A. A. *Poluprovodnikovyye integral'nyye skhemy pamyati na bipolyarnykh tranzistornykh strukturakh* [Semiconductor memory integrated circuits on bipolar transistor structures]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1979. 331 p.
4. Urbanovich P. P., Losev V. V., Konopelko V. K., Sukhoparov A. I. Statistical characteristics of the distribution of failures in crystals of semiconductor memory devices. *Izvestiya vuzov. Priborostroeniye* [Journal of Instrument Engineering], 1983, no. 1, pp. 93–95 (In Russian).

5. Konopelko V. K., Losev V. V. *Nadezhnoye khraneniye informatsii v poluprovodnikovyykh zapominayushchikh ustroystvakh* [Reliable information storage in semiconductor memory devices]. Moscow, Sovetskoye radio Publ., 1986. 340 p.
6. Vernikovskiy E. A., Urbanovich P. P. Statistical characteristics of failures of memory elements in memory chips. *Elektronnaya tekhnika* [Electronic equipment], series 3, Microelectronics, 1989, vol. 130, issue 1, pp. 61–63 (In Russian).
7. Mayorov S. A., Urbanovich P. P. Determining the characteristics of the distribution of defects in the semiconductor RAM chips. *Elektronnaya tekhnika* [Electronic equipment], series 3, Microelectronics, 1992, issue 1, pp. 42–45 (In Russian).
8. Urbanovich P. P., Alekseev V. F., Vernikovskiy E. A. *Izbytochnost' v poluprovodnikovyykh integral'nykh mikroskhemakh pamyati* [Redundancy in semiconductor integrated memory chips]. Minsk, Navuka i tekhnika Publ., 1995. 262 p.
9. Urbanovich P. P. The efficiency of correction codes applying in large integrated storage circuits. *Izvestiya vuzov. Radioelektronika* [Radioelectronics and Communications Systems], 1982, no. 5, pp. 85–87 (In Russian).
10. Abrameshin A. E., Zhadnov V. V., Zhadnov I. V. Estimated reliability assessment of electronic modules of spacecraft equipment. *Tekhnologii EMS* [Technologies of electromagnetic compatibility], 2012, no. 1, pp. 29–33 (In Russian).
11. Klyuchnik A. V., Pirogov Yu. A., Solodov A. V. Methodical aspects of the study of the stability of integrated circuits in the electromagnetic fields of pulsed radio emission. *Zhurnal radioelektroniki* [Journal of Radio Electronics], 2010, no. 8, pp. 1–27 (In Russian).
12. Schroeder B., Pinheiro E., Weber W.-D. DRAM Errors in the Wild: A Large-Scale Field Study. *Communications of the ACM*, 2009, no. 54, pp. 193–204.
13. GOST 27.002–2015. Reliability in engineering. Terms and Definitions. Available at: <http://docs.cntd.ru/document/1200136419> (accessed 01.04.2019).
14. Urbanovich P. P., Patsey N. V., Spiridonov V. V. Distribution of errors in telephone channels for the transmission of discrete information. *Izvestiya belorusskoy inzhenernoy akademii* [News of the Belarusian Academy of Engineering], 1997, no. 1, pp. 24–26 (In Russian).
15. Purtov L. P., Zamriy A. S., Shapovalov I. F. The nature of the distribution of errors in telephone channels during the transmission of discrete messages. *Elektrosvyaz'* [Telecommunications], 1965, no. 6, pp. 31–40 (In Russian).
16. Urbanovich P. P. Distribution model of defective storage elements on LSI memory chips. *Izvestiya vuzov. Radioelektronika* [Radioelectronics and Communications Systems], 1986, vol. 29, no. 9, pp. 92–95 (In Russian).
17. Urbanovich P. P. A predictive calculation of the reliability of excessive LSI storage devices. *Mikroelektronika* [Microelectronics], 1990, vol. 19, issue 6, pp. 542–548 (In Russian).
18. Urbanovich P. P., Loyka S. L. Reliability of fault-tolerant memory microcircuits, in which the information is coordinated with the state of the failed storage elements. *Mikroelektronika* [Microelectronics], 1991, vol. 20, issue 5, pp. 492–497 (In Russian).
19. Seshagiri Rao V. R., Rani Asha. Reliability measurement of memory system using spare blocks. *International Journal of Electrical Engineering & Technology (IJEET)*, 2018, vol. 9, issue 1, pp. 18–25.
20. Lee H., Cho K., Kim D., Kang S. Fault group pattern matching with efficient early termination for high-speed redundancy analysis. *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, 2018, vol. 37, pp. 1473–1482.
21. Stapper C. H. On yield, fault distributions and clustering of particles. *IBM J. Res. Develop.*, 1986, vol. 30, no. 3, pp. 326–338.
22. Urbanovich P. P., Shiman D. V. *Zashchita informatsii i nadezhnost' informatsionnykh sistem* [Information security and reliability of information systems]. Minsk, BSTU Publ., 2014. 91 p.

Информация об авторе

Урбанович Павел Павлович – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: p.urbanovich@belstu.by

Information about the author

Urbanovich Pavel Pavlovich – DSc (Engineering), Professor, Professor, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: p.urbanovich@belstu.by

Поступила 15.05.2019

УДК 681.53

Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. О. Оробей, И. Г. Сухорукова
Белорусский государственный технологический университет

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ
ФОРМИРОВАНИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНОГО СИГНАЛА
В ЭЛЕКТРОКИНЕТИЧЕСКОМ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕ ПЕРЕМЕННОГО СДВИГА**

В статье рассмотрен вариант построения математической модели для электрокинетического преобразователя, который использует устройство на основе переменного сдвига. Приведена основная структурная схема построения первичного преобразователя. Использование измерительных преобразователей со сдвиговым эффектом при определенных конструктивных подходах позволяет повысить частоту полезного сигнала и, таким образом, уменьшить влияние паразитных явлений, а также одновременно выполнять измерения электрокинетического потенциала и тока течения.

Математическая модель основана на совместном решении уравнений гидродинамики Навье – Стокса и распределении заряда в двойном электрическом слое в щелевом капилляре с учетом уравнения Пуассона. Рассмотрен случай щелевого капилляра с различными значениями электрокинетического потенциала на стенках. Показано, что постоянный сдвиговый поток может формировать ζ -потенциал/ток течения только при различии электрокинетических свойств поверхностей щелевого капилляра и/или при наличии перепада давления.

Использование простейшей аппроксимации распределения заряда позволило получить временную зависимость тока течения от нестационарного сдвига. Для этого было применено известное решение развития сдвигового движения вязкой жидкости и простейшая аппроксимация распределения заряда в двойном электрическом слое.

Для контроля полученных результатов использованы измерения электрокинетического потенциала в растворах солей.

Ключевые слова: математическая модель, электрокинетический преобразователь, переменный потенциал течения.

D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. O. Orobei, I. G. Suhorukova
Belarusian State Technological University

**MATHEMATICAL MODEL OF FORMATION OF MEASURING
SIGNAL IN ELECTROKINETIC CONVERTER OF VARIABLE SHIFT**

The article discusses the option of constructing a mathematical model for an electrokinetic converter that uses a device based on a variable shift. The main block diagram of the sensing device's construction is given. The use of measuring transducers with a shear effect under certain structural approaches allows to increase the frequency of the useful signal and thus reduce the influence of parasitic phenomena, as well as simultaneously measure the electrokinetic potential and streaming current.

Obtaining a mathematical model is based on the joint solution of the Navier – Stokes hydrodynamics equations and the charge distribution in the double electrical layer in the slit capillary taking into account the Poisson equation. The case of a slit capillary with different values of the electrokinetic potential on the walls is considered. It is shown that a constant shearing flow can form a ζ -potential/streaming current only if the electrokinetic properties of the surfaces of the slit capillary are different and/or in the presence of a pressure drop.

The use of the simplest approximation of the charge distribution allowed us to obtain a time dependence of the streaming current on a nonstationary shift. For this, a well-known solution was used to develop the shear motion of a viscous fluid and the simplest approximation of the charge distribution in an double electrical layer.

To control the results obtained, measurements of the electrokinetic potential in salt solutions were used.

Key words: mathematical model, electrokinetic converter, alternating stream potential.

Введение. В основе технологий дисперсных систем, в том числе и коллоидных, лежат процессы, которые зависят от параметров двойного электрического слоя (ДЭС). Наиболее доступной характеристикой ДЭС является ζ -потенциал, что определяет его использова-

ние в качестве параметра для построения систем оптимального управления технологическими процессами [1].

Широкое применение данного параметра в технологических процессах сдерживается сложностью построения измерительных пре-

образователей. Несмотря на отработанную методику измерения электрокинетических характеристик в научных исследованиях и учебных лабораториях [2], для построения систем управления получили широкое распространение приборы на основе переменного потенциала течения (The Streaming Current Detector). Использование устройств с формированием переменного сигнала позволяет нивелировать паразитные явления, которые сопутствуют устройствам измерения электрокинетического потенциала на постоянном значении тока.

The Streaming Current Detector получил наиболее широкое распространение в технике использования ζ -потенциала для управления процессами очистки сточных вод [3, 4], для производства бумаги [5, 6], в пищевой промышленности [7] и т. д.

Измерительный преобразователь. По совокупности параметров (быстродействие, непрерывность процесса измерения, возможность самоочистки) для построения приборов по измерению электрокинетического потенциала (ЭКП) в промышленных условиях предпочитают метод переменного потенциала (тока) течения. На основе этого метода разработаны детекторы тока течения, принцип действия которых состоит в придании жидкости с помощью поршня возвратно-поступательного движения, в результате чего, благодаря адсорбированным на его внутренних поверхностях частицам, генерируется переменный ток течения, который впервые был предложен в [10]. Данное направление получило наибольшее распространение и продолжает совершенствоваться [11–13]. Однако из-за сложности процессов измерения существуют и другие подходы формирования переменного потенциала с использованием переменного давления [14, 15] либо путем формирования сигнала механическим сдвигом [16].

Для улучшения метрологических характеристик при измерении ЭКП создан первичный преобразователь [16], в котором потенциал (ток) течения генерируется с помощью вращающегося элемента – ротора 2, образующего с внутренней стенкой корпуса (стакана) 3 щелевой капилляр (рис. 1). Благодаря определенной ширине ротора и расположению измерительных электродов 4, 5 на внутренней стенке стакана на них формируется переменный измерительный сигнал. Штуцеры 1 предназначены для организации обмена исследуемой среды. Резистор R1 формирует сигнал тока течения, который усиливается электронным усилителем 6. Пара электродов 5 служит для контроля потенциала течения, который нормируется усилителем 7.

Образование ротором с корпусом нескольких щелевых капилляров с расположением двух и более пар измерительных электродов на внутренних стенках стакана позволяеткратно повысить конечную частоту измерительного сигнала без увеличения влияния межэлектродной емкости (рис. 2). Согласно [17], электрокинетические преобразователи работают в области относительно низких частот (до 10 Гц), поэтому известные детекторы тока течения работают на частоте 4 Гц [10, 11]. Частотные ограничения усложняют процессы фильтрации измерительного сигнала и быстродействие самого преобразователя.

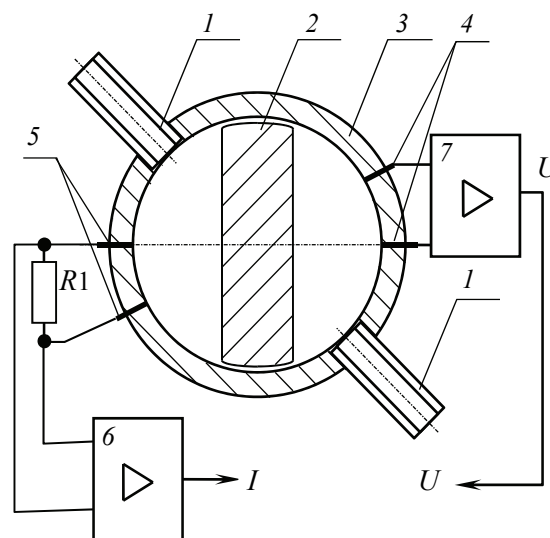


Рис. 1. Структурная схема измерительного преобразователя ЭКП:

1 – штуцеры; 2 – ротор; 3 – корпус; 4, 5 – электроды; 6, 7 – усилители

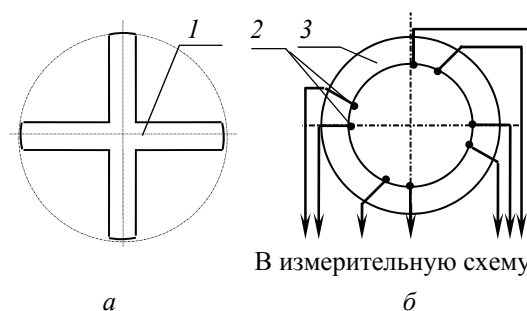


Рис. 2. Конструктивные способы увеличения частоты измерительного сигнала:

а – посредством геометрии ротора; б – за счет увеличения количества пар измерительных электродов; 1 – ротор; 2 – электроды; 3 – корпус

Модель электрокинетических процессов в сдвиговом потоке для предлагаемого преобразователя требует учета влияния свойств исследуемой среды, геометрических и коллоидных характеристик поверхностей материалов ячейки,

параметров согласующих цепей. Проведение измерений с помощью предложенного преобразователя и сравнение с известными литературными данными подтвердили наличие прямой зависимости между электрокинетическими характеристиками поверхности раздела фаз и сигналом, генерируемым на измерительных электродах. Для правильной интерпретации результатов измерений возникла необходимость в приблизительной оценке основных геометрических и электрофизических факторов, оказывающих влияние на измерительный сигнал. Это предполагает решение задачи о перераспределении зарядов при наличии в щелевом капилляре сдвигового потока и перепада давления. Первоначально была решена стационарная задача о перераспределении вещества и зарядов в щелевом капилляре в условиях сдвигового потока с использованием известного подхода, который был применен для нахождения коэффициентов переноса для круглых капилляров [17].

Измерительный сигнал при постоянном сдвиговом потоке. Рассмотрим щелевой капилляр с шириной $2h$ (рис. 3), формируемый вращающимся с частотой ω ротором и неподвижной поверхностью, который заполнен нежидкой ньютоновской жидкостью с динамической вязкостью η и относительной диэлектрической проницаемостью ϵ . Каждая из образующих капилляра поверхностей равномерно заряжена, но удельные плотности зарядов и значения ЭКП на поверхности скольжения ζ_1 и ζ_2 различны, что приводит к неодинаковым функциям распределения потенциалов φ_1 и φ_2 . Учитывая, что радиус ротора $R_0 \gg 2h$, можно рассматривать течение жидкости между двумя параллельными стенками. На стенках капилляра отсутствует шероховатость, а плоскость скольжения жидкости относительно твердого тела лежит за пределами плотной адсорбированной части ДЭС и смещена в область диффузной ионной атмосферы. Движение жидкости в щелевом капилляре обусловлено действием вдоль него постоянного градиента давления, движением одной из стенок и электрическим полем E . Напряжение на электродах при измерении не влияет на работу механической части, так как электроосмотическим давлением, увеличивающим гидравлическое сопротивление (электровязкостный эффект), можно пренебречь [17]. Градиент концентрации вдоль капилляра и диффузия униполярных заряженных ионов не влияют на процесс электрокинетического преобразования и на ионный ток, а также сохраняется суммарный поверхностный заряд в капилляре [18].

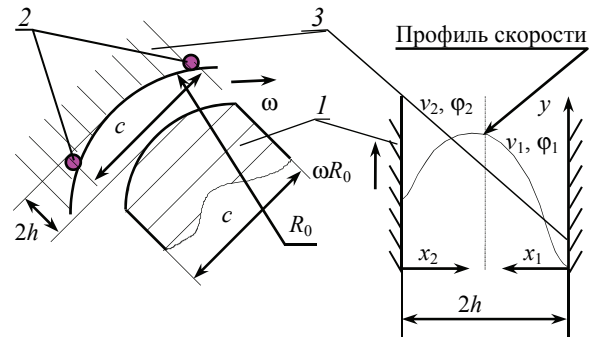


Рис. 3. Щелевой капилляр:
1 – ротор; 2 – электроды; 3 – корпус

Из-за неравноценности вклада в результирующий эффект стенок капилляра его ширину следует разбить на два участка, введя для каждой половины отдельные декартовы системы координат (x_1, y) и (x_2, y) , с последующим сращиванием решений на границе участков. Уравнения Навье – Стокса для скоростей $v_1(x_1)$, $v_2(x_2)$ при стационарном течении жидкости через капилляр и низких числах Рейнольдса могут быть записаны в виде [19]:

$$\begin{cases} \eta \frac{d^2 v_1(x_1)}{dx_1^2} = -\Delta P - E\rho(x_1); \\ \eta \frac{d^2 v_2(x_2)}{dx_2^2} = -\Delta P - E\rho(x_2), \end{cases} \quad (1)$$

где $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ – плотность заряда в щелевом капилляре на участках $0 < x_1 < h$ и $0 < x_2 < h$ соответственно.

Уравнения Пуассона для каждой полуплоскости, разделяющей капилляр, можно представить как:

$$\rho_1(x_1) = -\epsilon\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2}; \quad \rho_2(x_2) = -\epsilon\epsilon_0 \frac{d^2 \varphi_2}{dx_2^2}. \quad (2)$$

Функции $v_1(x_1)$, $v_2(x_2)$, $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\begin{cases} \varphi_1|_{x_1=0} = \zeta_1; & v_1|_{x_1=h} = v_2|_{x_2=h}; \\ \varphi_1|_{x_1=h} = 0; & \frac{dv_1}{dx_1}|_{x_1=h} = -\frac{dv_2}{dx_2}|_{x_2=h}; \\ \varphi_2|_{x_2=0} = \zeta_2; & \frac{d\varphi_1}{dx_1}|_{x_1=h} = 0; \\ \varphi_2|_{x_2=h} = 0; & \frac{d\varphi_2}{dx_2}|_{x_2=h} = 0; \\ v_1|_{x_1=0} = 0; & \\ v_2|_{x_2=0} = \omega R_0; & \end{cases} \quad (3)$$

Подставляя $\rho_1(x_1)$ и $\rho_2(x_2)$ из (2) в (1) и интегрируя их с использованием граничных условий с учетом того, что

$$-\frac{dp}{dy} = \Delta P = \text{const};$$

$$E = \frac{\Delta U}{c},$$

получаем формулы

$$v_1(x_1) = \frac{\omega R_0 x_1}{2h} + \frac{hx_1 - x_1^2/2}{\eta} \Delta P - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{c\eta} \left(\zeta_1 - \frac{(\zeta_1 - \zeta_2)}{2h} x_1 - \varphi_1(x_1) \right) \Delta U; \quad (4)$$

$$v_2(x_2) = \frac{\omega R_0 (2h - x_2)}{2h} + \frac{hx_2 - x_2^2/2}{\eta} \Delta P - \frac{\varepsilon \varepsilon_0}{c\eta} \left(\zeta_2 - \frac{(\zeta_2 - \zeta_1)}{2h} x_2 - \varphi_2(x_2) \right) \Delta U. \quad (5)$$

Первые два члена в (4), (5) выражают конвективный, а третий – электроосмотический перенос жидкости. Объемный расход жидкости через капилляр на единицу его высоты:

$$q = \int_0^h v(x_1) dx_1 + \int_0^h v(x_2) dx_2$$

определится выражением

$$q = \frac{2h^2}{\eta c} \Delta N + \frac{2h^3}{3\eta} \Delta P - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h (\zeta_1 + \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{\eta c} \Delta U, \quad (6)$$

где

$$G_{1,2} = \frac{1}{(\zeta_1 + \zeta_2)h} \int_0^h \varphi_{1,2}(x_{1,2}) dx_{1,2}; \quad (7)$$

$$\Delta N = -\text{grad}(N) = -\frac{\eta R_0 c \omega}{2h}. \quad (8)$$

Примем, что носителями заряда в жидкости являются однозарядные катионы и анионы с одинаковой подвижностью. С учетом того, что в предлагаемом устройстве диффузия не оказывает существенного влияния на перенос ионов в капилляре, плотность электрического тока в аксиальном направлении можно представить в виде

$$J_{1,2}(x_{1,2}) = \lambda_0 E ch(\tilde{\varphi}_{1,2}) + \rho_{1,2}(x_{1,2}) v_{1,2}(x_{1,2}), \quad (9)$$

где λ_0 определяется выражением

$$\lambda_0 = \frac{2F^2 DC_0}{RT}; \quad (10)$$

$$\tilde{\varphi}_{1,2} = \frac{F \varphi_{1,2}(x_{1,2})}{RT}. \quad (11)$$

(11) – это приведенный электрический потенциал ДЭС.

Электрический ток I в растворе между стенками капилляра на единицу его высоты обусловлен действием электрического поля, градиента давления и движением ротора:

$$I = \int_0^h J_1(x_1) dx_1 + \int_0^h J_2(x_2) dx_2 - \omega R_0 \int_0^h \rho(x_2) dx_2. \quad (12)$$

Последнее слагаемое в уравнении (12) учитывает перенос связанного и противоположно по знаку заряда движущейся стенкой.

Подставляя в (12) значения $J_1(x_1)$ и $J_2(x_2)$ из (10), а $v_1(x_1)$, $v_2(x_2)$, $\varphi_1(x_1)$ и $\varphi_2(x_2)$ из (3), (4), (6), (7) и проводя интегрирование, получаем:

$$I = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 (\zeta_1 - \zeta_2)}{\eta c} \Delta N + \frac{2h\lambda_0 (1 - (G_1 + G_2))}{c} \frac{\Delta U}{L} - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h (\zeta_1 + \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{\eta} \Delta P, \quad (13)$$

где

$$L = \frac{2h(1 - (G_1 + G_2))}{\sum_{i=1}^2 \left[Q_i + \beta \left(F_i + (-1)^i \frac{\zeta_i (\zeta_1 - \zeta_2) + K_i \zeta_i}{2h} \right) \right]};$$

$$\beta = \frac{(\varepsilon \varepsilon_0)^2}{\eta \lambda_0};$$

$$F_{1,2} = \int_0^h \left(\frac{d\varphi_{1,2}(x_{1,2})}{dx_{1,2}} \right)^2 dx_{1,2}; \quad K_{1,2} = 2h \frac{d\varphi_{1,2}}{dx_{1,2}} \Big|_{x_{1,2}=0};$$

$$Q_{1,2} = \int_0^h ch(\tilde{\varphi}_{1,2}(x_{1,2})) dx_{1,2}.$$

Значения $K_{1,2}$, $G_{1,2}$, $F_{1,2}$, $Q_{1,2}$, а вместе с ними и L , могут быть рассчитаны лишь после нахождения распределений электрических потенциалов $\varphi_{1,2}(x_{1,2})$ внутри капилляра.

При условии $\Delta N = 0$ и равенстве электрокинетических характеристик поверхностей, образующих щелевой капилляр, уравнения (6), (13) приобретают вид, аналогичный выражениям для круглых капилляров [18]:

$$q = \frac{2h^3}{3\eta} \Delta P - \frac{\varepsilon \varepsilon_0 h (\zeta_1 + \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{c\eta} \Delta U;$$

$$I = -\frac{\varepsilon \varepsilon_0 h (\zeta_1 + \zeta_2) (1 - (G_1 + G_2))}{\eta} \Delta P + \frac{2h\lambda_0 (1 - (G_1 + G_2))}{c} \frac{\Delta U}{L}.$$

Для описания гидродинамических и электрических потоков при несовпадении градиентов давления и силы по направлению в уравнениях (6), (13) следует поменять на противоположные знаки перед ΔP . При условии $\Delta P = 0$, $\varphi_1(x_1) = \varphi_2(x_2) = \varphi(x)$, $\zeta_1 = \zeta_2$ возможность возникновения электрического тока при сдвиговом потоке исключается. В то же время при разнице электрокинетических свойств поверхностей может вносить существенное влияние на формирование измерительного сигнала на электродах.

Измерительный сигнал при переменном сдвиговом потоке. В предложенном устройстве для водных растворов только при большом отношении между длиной и шириной капилляра может наблюдаться стационарное состояние, поэтому была рассмотрена нестационарная задача возникновения тока течения в процессе развития гидродинамического течения в щелевом капилляре при резком сдвиге одной из границ капилляра.

Из литературы [20] известно решение о развитии течения в щелевом капилляре:

$$v(x, t) = V \left(1 - \frac{x}{2h} \right) - \frac{2V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \sin \left(\frac{n\pi x}{2h} \right),$$

где $V = \omega R_0$.

Для расчета используется допущение метода тока течения, что $\Delta U \rightarrow 0$ и на гидродинамическое поле наличие ДЭС не оказывает существенного влияния. Тогда конвективную составляющую плотности можно определить как $v(y, t)\rho(y)$, т. е.

$$v(x, t)\rho(x) = V \left(1 - \frac{x}{2h} \right) \rho(x) - \frac{2V\rho(x)}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \exp \left(-n^2 \pi^2 \frac{\eta t}{\rho_0 (2h)^2} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{2h} \right),$$

где ρ_0 – плотность раствора.

Для нахождения амплитуды тока по длине капилляра необходимо проинтегрировать по ширине конвективную составляющую плотности тока. Для первого стационарного слагаемого решение уже получено, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться только нестационарный член.

Для первой половины капилляра может быть получено следующее решение с учетом

$$\tilde{i}_2(t) = \int_0^h v_2(x_2, t) \rho_2(x_2) dx_2 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 V}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \left[\zeta_2 \frac{n\pi}{2h} + \int_0^h \varphi_2 \sin \left(\frac{n\pi x_2}{2h} \right) dx_2 \right].$$

Для дальнейшего интегрирования была принята аппроксимация:

$$\varphi_2(x_2) = \zeta_2 \exp(-\chi_2 x_2),$$

что привело к следующему решению:

$$\frac{2\varepsilon\varepsilon_0 V}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \zeta_2 \frac{n\pi}{2h} \left[1 + \frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 + (2h\chi_2)^2} \right].$$

Для второй половины щелевого канала имеем:

$$\tilde{i}_1(t) = \int_0^h v_1(x_1, t) \rho_1(x_1) dx_1 = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 V}{\pi} \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \zeta_1 \frac{n\pi}{2h} (-1)^n \left[1 - \frac{(n\pi)^2}{(n\pi)^2 + (2h\chi_1)^2} \right].$$

Если учитывать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + d^2 \chi^2} = 1,$$

то мгновенное значение электрического тока по сечению канала можно определить по следующей формуле:

$$\tilde{i}(t) = \tilde{i}_1(t) = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 V \zeta_2}{h} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left(-n^2 \pi^2 \frac{\eta t}{\rho_0 (2h)^2} \right).$$

Для нахождения интегральной составляющей тока, формируемой между электродами, один из которых помещен в точку начала движения движущейся стенки капилляра, а другой в бесконечности, необходимо проинтегрировать уравнение (6):

$$I(t) = \frac{8\varepsilon\varepsilon_0 V h \rho_0 \zeta_2}{\eta \pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \right] \right\}.$$

Если учитывать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

то окончательно получается следующее выражение:

$$I(t) = \frac{4 \varepsilon \varepsilon_0 V h \rho_0 \zeta_2}{3 \eta} \left[1 - \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 \eta t}{\rho_0 (2h)^2}} \right\} \right].$$

Полученное уравнение для $I(t)$ имеет отличия от результатов, описанных [22] для The Streaming Current Detector. Хотя следует отметить наличие особенностей в возникновении переменного токового сигнала у двух преобразователей.

Последняя формула была использована для исследования электрокинетических свойств поверхности при различных концентрациях солей и показала хорошую корреляцию с литературными данными (рис. 4) [23].

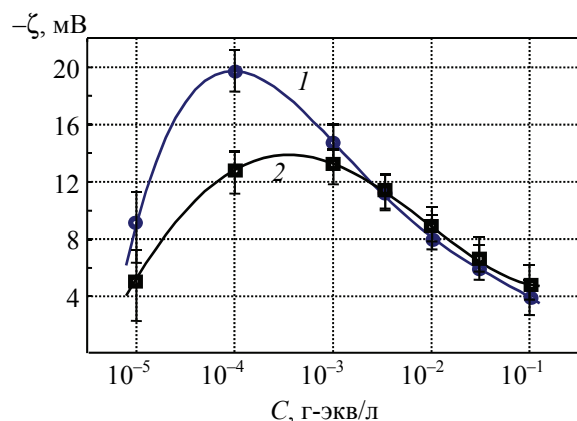


Рис. 4. Зависимость ζ -потенциала для фторопластовой поверхности от концентрации: 1 – NaCl; 2 – KCl

Также следует отметить, что расчетная формула использует идеализированные условия гидравлики. В реальном преобразователе будут наблюдаться различные эффекты, которые приведут к расхождению. Проведенные исследования показали прямо пропорциональное влияние скорости движения и ширины щелевого капилляра на амплитуду измерительного сигнала.

Заключение. Результаты совместного решения уравнений Навье – Стокса и Пуассона для щелевого капилляра показали, что измерительный сигнал на электродах может формироваться только в результате нестационарного сдвига, разности электрокинетических свойств поверхности или искривления профиля скоростей вследствие возникновения перепада давления. Приближенная аппроксимация распределения зарядов в двойном электрическом слое позволила оценить значения величины электрического тока.

Таким образом, предлагаемая концепция построения первичных преобразователей с использованием сдвигового потока может быть применима при разработке приборов измерения электрокинетических свойств, а полученная система уравнений использована для оптимизации конструктивных параметров преобразователей в зависимости от особенности области применения.

Литература

- Hunter R. J. Introduction to Modern Colloid Science. Oxford: Oxford Univ. Press, 1993. 338 p.
- Measurement and interpretation of electrokinetic phenomena / A. V. Delgado [et al.] // Journal of Colloid and Interface Science. 2007. Vol. 309, issue 2. P. 194–224.
- Sibiya S. M. Evaluation of the streaming current detector (SCD) for coagulation control // Procedia Engineering. 2014. Vol. 70. P. 1211–1220.
- Jia-Qian Jiang. The role of coagulation in water treatment // Current Opinion in Chemical Engineering. 2015. Vol. 8. P. 36–44.
- Валендо П. Ф., Цмыг Н. Г. Совершенствование технологии производства бумаги и картона в БССР. Минск: БелНИИНТИ, 1979. С. 20–32.
- Controlling Coagulation Process: From Zeta Potential to Streaming Potential / D. Ghernaout [et al.] // American Journal of Environmental Protection. Special Issue: Cleaner and Sustainable Production. 2015. Vol. 4, no. 5-1. P. 16–27.
- Nollet L. M. L., Dekker M. Handbook of Food Analysis. Vol. 3: Methods and Instruments in Applied Food Analysis. New York: CRC Press, 2004. 2296 p.
- An Electrokinetic Potential Meter / I. O. Orobei [et al.] // Instruments and Experimental Techniques. 2005. Vol. 48, no. 4. P. 531–534.
- Преобразователи электрокинетического потенциала гидродисперсных систем / Н. М. Богослав [и др.] // Известия ТулГУ. Технические науки. 2011. Вып. 3. С. 106–110.
- Gerdes W. F. A new instrument – the streaming current detector // The 12th National ISA Analysis Instrument Symposium. Houston, Texas, May 11–13, 1966. P. 181–198.
- Dentel K., Thomas A. V., Kingery K. M. Evaluation of the streaming current detector – I. Use in jar tests // Water Research. 1989. Vol. 23, issue 4. P. 413–421.
- Dentel K., Thomas A. V., Kingery K. M. Evaluation of the streaming current detector – II. Continuous flow tests // Water Research. 1989. Vol. 23, issue 4. P. 423–430.
- Fei S. W., Martin F. Development and evaluation of an automated streaming potential measurement device // Colloids and Surfaces a Physicochemical and Engineering Aspects. 2001. Vol. 194, no. 1-3. P. 221–232.

14. Lauer J. L., Antal P. G. Electrostatic Charge Generation during Nonuniform Flow of Hydrocarbons through Porous Insulators // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1970. Vol. 32, no. 3. P. 407–423.
15. A Low-Cost Automated Streaming Potential Measurement System / R. A. Smith [et al.] // *Journal of Laboratory Automation*. 2012. Vol. 17, no. 2. P. 125–133.
16. Grinyuk D. A., Kuz'mitskii I. F., Orobei I. O. Primary Transducer for Measuring Electrokinetic Characteristics // *Instruments and Experiments Techniques*. 1998. No. 3. P. 409–412.
17. Лидоренко Н. С., Ильин Б. И., Зайденман И. А. Введение в молекулярную электронику. М.: Энергоатомиздат, 1984. С. 217–226.
18. Духин С. С. Электропроводность и электрокинетические свойства дисперсных систем. Киев: Наукова Думка, 1975. С. 52–57.
19. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potentials / S. Levine [et al.] // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1975. Vol. 52, no. 1. P. 136–149.
20. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge: Cambridge university press, 1973. 615 p.
21. Dentel S. K., Kingery K. M. Theoretical Principles of Streaming Current detection // *Water Science & Technology*. 1989. Vol. 21. P. 443–453.
22. Walker C. A., Kirby J. T., Dentel S. K. The Streaming Current Detector: A Quantitative Model // *Journal of Colloid and Interface Science*. 1996. Vol. 182. P. 71–81.
23. Грибанова Е. В., Григоров О. Н., Пасмурнова Г. И. Исследование фильтрационных и электрокинетических характеристик диафрагм из фторопласта-4 // *Журнал прикладной химии*. 1977. Т. 50, № 3. С. 558–563.

References

1. Hunter R. J. *Introduction to Modern Colloid Science*. Oxford, Oxford Univ. Press, 1993. 338 p.
2. Delgado A. V., González-Caballero F., Hunter R. J., Koopal L. K., Lyklema J. Measurement and interpretation of electrokinetic phenomena. *Journal of Colloid and Interface Science*, 2007, vol. 309, issue 2, pp. 194–224.
3. Sibiya S. M. Evaluation of the streaming current detector (SCD) for coagulation control. *Procedia Engineering*, 2014, vol. 70, pp. 1211–1220.
4. Jia-Qian Jiang. The role of coagulation in water treatment. *Current Opinion in Chemical Engineering*, 2015, vol. 8, pp. 36–44.
5. Valendo P. F., Tsmyg N. G. *Sovershenstvovaniye tekhnologii proizvodstva bumagi i kartona v BSSR* [Improving the technology for the production of paper and cardboard in the BSSR]. Minsk, BelNIINTI Publ., 1979, pp. 20–32.
6. Ghernaout D., Al-Ghonamy A. I., Naceur M. W. Controlling Coagulation Process: From Zeta Potential to Streaming Potential. *American Journal of Environmental Protection. Special Issue: Cleaner and Sustainable Production*, 2015, vol. 4, no. 5-1, pp. 16–27.
7. Nollet L. M. L., Dekker M. *Handbook of Food Analysis. Vol. 3: Methods and Instruments in Applied Food Analysis*. New York, CRC Press, 2004. 2296 p.
8. Orobei I. O., Zharskii S. E., Grinyuk D. A., Kuz'mitskii I. F. An Electrokinetic Potential Meter. *Instruments and Experimental Techniques*, 2005, vol. 48, no. 4, pp. 531–534.
9. Bogoslav N. M., Sukhorukova I. G., Grinyuk D. A., Orobei I. O., Orobei O. I. Converters of electrokinetic potential of hydrodispersed systems. *Izvestiya TulGU. Tekhnicheskiye nauki* [News Tula State University. Technical science], 2011, issue 3, pp. 106–110 (In Russian).
10. Gerdes W. F. A new instrument – the streaming current detector. *12th National ISA Analysis Instrument Symposium*, 1966, pp. 181–198.
11. Dentel K., Thomas A. V., Kingery K. M. Evaluation of the streaming current detector – I. Use in jar tests. *Water Research*, 1989, vol. 23, issue 4, pp. 413–421.
12. Dentel K., Thomas A. V., Kingery K. M. Evaluation of the streaming current detector – II. Continuous flow tests. *Water Research*, 1989, vol. 23, issue 4, pp. 423–430.
13. Fei S. W., Martin F. Development and evaluation of an automated streaming potential measurement device. *Colloids and Surfaces a Physicochemical and Engineering Aspects*, 2001, vol. 194, no. 1–3, pp. 221–232.
14. Lauer J. L., Antal P. G. Electrostatic charge generation during nonuniform flow of hydrocarbons through porous insulators. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1970, vol. 32, no. 3, pp. 407–423.
15. Smith R. A., Fissell W. H., Fleischman A. J., Zorman C. A. A low-cost automated streaming potential measurement system. *Journal of Laboratory Automation*, 2012, vol. 17, no. 2, pp. 125–133.

16. Grinyuk D. A., Kuz'mitskii I. F., Orobei I. O. Primary Transducer for Measuring Electrokinetic Characteristics. *Instruments and Experiments Techniques*, 1998, no. 3, pp. 409–412.
17. Lidorenko N. S., Il'in B. I., Zaydenman I. A. *Vvedeniye v molekulyarnuyu elektroniku* [Introduction to molecular electronics]. Moscow, Energoatomizdat Publ., 1984, pp. 217–226.
18. Dukhin S. S. *Elektroprovodnost' i elektrokineticheskiye svoystva dispersnykh system* [Electrical Conductivity and Electrokinetic Properties of Dispersed Systems]. Kiyev, Naukova Dumka Publ., 1975, pp. 52–57.
19. Levine S., Marriot J., Neale G., Epstein N. Theory of electrokinetic flow in fine cylindrical capillaries at high zeta-potentials. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1975, vol. 52, no. 1, pp. 136–149.
20. Batchelor G. K. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge, Cambridge university press, 1973. 615 p.
21. Dentel S. K., Kingery K. M. Theoretical Principles of Streaming Current detection. *Water Science & Technology*, 1989, vol. 21, pp. 443–453.
22. Walker C. A., Kirby J. T., Dentel S. K. The Streaming Current Detector: A Quantitative Model. *Journal of Colloid and Interface Science*, 1996, vol. 182, pp. 71–81.
23. Griбанова E. V., Grigorov O. N., Pasmurnova G. I. Study of filtration and electrokinetic characteristics of fluoroplast-4 diaphragms. *Zhurnal prikladnoy khimii* [Journal of Applied Chemistry], 1977, vol. 50, no. 3, pp. 558–563 (In Russian).

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

Олиферович Надежда Михайловна – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Оробей Игорь Олегович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: orobei@tut.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

Oliferovich Nadezhda Mikhailovna – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Orobei Igor' Olegovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: orobei@tut.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – [Senior Lecturer](#), the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Поступила 15.05.2019

УДК 681.53

Д. А. Гринюк, Н. М. Олиферович, И. Г. Сухорукова
Белорусский государственный технологический университет

МЕТОД НАСТРОЙКИ ПИД-РЕГУЛЯТОРА ЧЕРЕЗ DEADBEAT-РЕГУЛЯТОР НА РАЗЛИЧНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИТЕРИИ

В статье рассматривается метод настройки ПИД-регулятора. Для этого предлагается использовать deadbeat-регулятор с различными вариантами синтеза. В основе синтеза лежит аппроксимация переходной характеристики deadbeat-регулятора ПИД-регулятором. Предложенные варианты позволяют легко настроить замкнутую систему регулирования на различные качества переходного процесса. В качестве параметра вариации выступает время квантования цифрового регулятора. Используя только один данный параметр, можно подстраивать все три параметра настройки ПИД-регулятора. Параметры, получаемые в результате настройки, оказываются близкими к оптимальным выбранным критериям.

Выполнен сравнительный анализ настройки замкнутых контуров регулирования для четырех различных объектов управления с использованием данного метода. Параллельно проводилась численная оптимизация трех настроек ПИД-регулятора по четырем различным интегральным критериям. Для настройки могут быть использованы различные варианты цифрового регулятора с ограничением на управляющее воздействие. Результаты показали, что вариант прототипа цифрового регулятора для настройки ПИД-регулятора зависит от выбранного критерия. Установлено, что оптимизацию ПИД-регулятора по квадратичному интегральному критерию целесообразно проводить по параметрам классического deadbeat-регулятора. Другие интегральные критерии имеют лучшую корреляцию с deadbeat-регулятором с ограничением на управляющее воздействие. Энергетические интегральные критерии наилучшим образом оптимизируются с помощью предложенного метода настройки. Наименьшие отличия между настройками ПИД-регулятора двумя методиками наблюдались с определением времени интегрирования и коэффициента усиления.

Ключевые слова: ПИД-регулятор, deadbeat-регулятор, настройка регулятора, интегральные критерии.

D. A. Hryniuk, N. M. Oliferovich, I. G. Suhorukova
Belarusian State Technological University

METHOD OF PID-CONTROLLER TUNING THROUGH DEADBEAT-REGULATOR FOR VARIOUS INTEGRAL CRITERIA

The method of the PID-controller tuning is discussed in the article. For this purpose, it is proposed to use the deadbeat-regulator with various synthesis options. The synthesis is based on the approximation of the transient response of the deadbeat-regulator to the PID-controller. The proposed variants allow to easily configure a closed system of regulation on the various qualities of the transition process. The variation parameter is the quantization time of the digital controller. Using only one of this parameter, you can adjust all three parameters of the PID-controller tuning. The resulting controller settings are close to the optimal selected criteria.

A comparative analysis of closed control loops tuning for four different control objects has been carried out by this method. In parallel, the numerical optimization of the three PID-controller settings was carried out according to four different integral criteria. For tuning, various variants of a digital controller with a limitation on the control action can be used. The results showed that the prototype version of the digital controller for the PID-controller tuning depends on the selected tuning criteria. It is shown that the optimization of the PID-controller by the quadratic integral criterion is best carried out by the parameters of the classical deadbeat-controller. Other integral criteria have a better correlation with a deadbeat-regulator with a limitation on the control action. Energy integral criteria are best optimized using the proposed tuning method. The smallest differences between the PID-controller tuning by the two techniques were observed with the determination of the integration time and the gain.

Key words: PID-controller, deadbeat-regulator, regulator tuning, integral criterion.

Введение. ПИД-регулятор продолжает оставаться одним из популярных решений для построения систем управления. Его универ-

сальность для большого класса объектов способствует широкому использованию как в технологических процессах в промышленности,

так и в технических электронных системах. За время векового применения предложено множество решений по развитию классического метода построения ПИД-регулирования. Одновременно происходит и развитие методов настройки регуляторов данного типа. Основными методами настройки являются коэффициент усиления K , время интегрирования I и дифференцирования D передаточной функции регулятора:

$$W_R(s) = K + \frac{1}{Is} + Ds. \quad (1)$$

В литературе можно найти большое количество методов настройки. Среди них выделяют два основных полюса. Один полюс – это обеспечение требуемого запаса по устойчивости, другой – обеспечение желаемого качества переходного процесса. Большинство наиболее популярных методик настройки ПИД-регулятора используют один из полюсов как отправную точку, а затем, по необходимости, обеспечивают компромисс в отношении другого полюса.

Среди популярных критериев устойчивости различают частотные (критерий Найквиста и Михайлова) и критерии, основанные на анализе характеристического уравнения передаточной функции канала управления (корневой критерий, критерий Стодолы и Гурвица). Соответственно, среди частотных методов можно выделить модифицированный метод Ziegler – Nichols [1–3], Takahashi [4], метод расширенных частотных характеристик [5], использование логарифмических частотных характеристик [6]. Принцип настройки [7] основан на обеспечении декремента затухания переходного процесса. На основе данного подхода базируется также метод Schaedel [8]. Корневой метод настройки лежит в основе метода Дудникова [9].

На обеспечении аperiodического переходного процесса основан метод настройки амплитудного оптимума [10] и метод Skogestad [11]. Сюда можно отнести метод Cohen – Coon [12] с нахождением эквивалентной передаточной функции и метод с использованием таблиц Chien – Hrones – Reswick [13].

Однако вышеуказанные методы для обеспечения качества переходного процесса требуют последующей коррекции настроек.

По этой причине, а также благодаря широкому возможностям современных компьютеров и контроллеров происходит развитие онлайн-методов анализа настройки с использованием различных поисковых методов. Среди них можно выделить как методы, основанные на классических подходах минимизации инте-

гральных критериев [14], так и широко применяемые нечеткие [15, 16] и генетические алгоритмы [17]. Эти методы более универсальны, могут использоваться для линейных и нелинейных объектов управления. С помощью онлайн-методов настраиваются нелинейные регуляторы [18, 19]. Однако они требуют высокой вычислительной мощности.

Метод настройки. В [20] предложено осуществлять настройку ПИД-регулятора через deadbeat (в русскоязычной литературе встречаются различные варианты перевода: аperiodический, компенсационный и т. д.). Однако были отмечены ограничения этого подхода. Данный метод прямого проектирования для дискретных ПИД-регуляторов может представлять интерес для следующих случаев:

1. Применение самонастраивающегося управления для уникальной настройки параметров ПИД-контроллеров.

2. Определение подходящих начальных значений для оптимизации числовых параметров.

Предложенный в [21] подход основан на анализе коэффициентов передаточной функции объекта управления. Однако это не применимо, если мы используем для синтеза deadbeat-регулятор с ограничением на управляющее воздействие [22, 23]. Для нахождения коэффициентов K , I , D можно воспользоваться прямой аппроксимацией передаточной функции deadbeat-регулятором ПИД-регулятора. Построение импульсной характеристики цифрового регулятора по его передаточной функции

$$W_{DB}(z) = \frac{p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} + \dots + p_m z^{-m}}{q_0 + q_1 z^{-1} + \dots + q_m z^{-m}} \quad (2)$$

не требует решения дифференциального уравнения. В (2) z – переменная z -преобразования, $z = \exp(T_0 s)$; T_0 – время квантования; m – порядок полинома. Значение на каждом такте может быть найдено путем простейших арифметических операций. Особенно если учитывать, что значение на входе всегда равно 1.

После построения импульсной характеристики deadbeat на количестве тактов, когда градиент приращения становится постоянным (рис. 1), можно взять два соседних значения управления и вычислить время интегрирования:

$$I = \frac{u(k+1) - u(k)}{T_0}, \quad (3)$$

где k – дискретные отсчеты ($k = t / T_0 = 0, 1, 2, \dots$; t – время).

Коэффициент усиления рассчитывается как

$$K = u(k) - IkT_0. \quad (4)$$

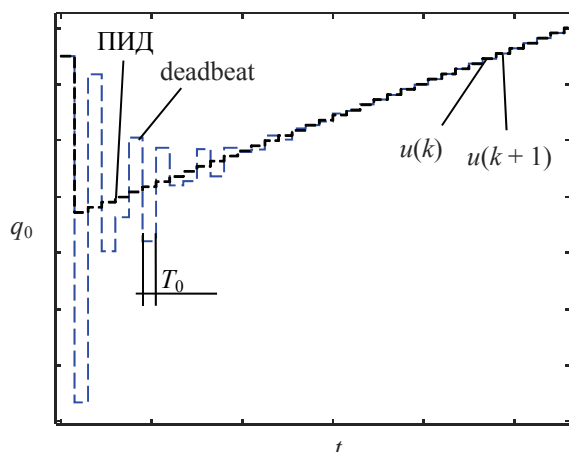


Рис. 1. Переходная характеристика deadbeat и ПИД

Время дифференцирования зависит от формы записи регулятора. Для идеального регулятора формула следующая:

$$D = q_0 - K. \quad (5)$$

В случае формы реального регулятора, как наиболее интересной с практической точки зрения:

$$W_R(s) = K + \frac{1}{Is} + \frac{Ds}{Fs + 1}. \quad (6)$$

Тогда расчетная формула будет иметь следующий вид:

$$D = \frac{q_0 - K}{F}. \quad (7)$$

Для вариации настроек можно воспользоваться изменением времени T_0 и величины первичного управляющего воздействия на различном количестве тактов N . В качестве критерия выбора можно использовать различные интегральные критерии. При этом полученные настройки ПИД-регулятора не требуют обязательного применения simple time, который использовался для синтеза deadbeat (DBC).

Методика сравнительного анализа метода настройки ПИД-регулятора. Рассмотрим в качестве примера несколько объектов управления. За основу возьмем передаточную функцию $W_{O1}(s)$ из [21]:

$$W_{O1}(s) = \frac{(2s+1)}{(10s+1)(7s+1)(3s+1)} \times \exp(-4s), \quad (8)$$

а также варианты с небольшим запаздыванием $W_{O2}(s)$, его отсутствием $W_{O3}(s)$ и отрицательным коэффициентом в передаточной функции $W_{O4}(s)$:

$$W_{O2}(s) = \frac{(2s+1)}{(10s+1)(7s+1)(3s+1)} \times \exp(-0,4s); \quad (9)$$

$$W_{O3}(s) = \frac{(2s+1)}{(10s+1)(7s+1)(3s+1)}; \quad (10)$$

$$W_{O4}(s) = \frac{(1-2s)}{(10s+1)(7s+1)(3s+1)} \times \exp(-0,4s). \quad (11)$$

Последняя передаточная функция характерна для таких технологических объектов, как стабилизация уровня в парогенераторах, теплообменниках с фазовыми превращениями и др.

Качество настройки будем оценивать с помощью интегральных критериев:

$$J_1 = \int_0^{tf} e(t)^2 dt \rightarrow \min; \quad (12)$$

$$J_2 = \int_0^{tf} t^2 |e(t)| dt \rightarrow \min; \quad (13)$$

$$J_3 = \int_0^{tf} u(t)^2 dt \rightarrow \min; \quad (14)$$

$$J_4 = \int_0^{tf} (0,5e(t)^2 + 0,5u(t)^2) dt \rightarrow \min, \quad (15)$$

где $e(t)$ – отклонение выхода сигнала задания; $u(t)$ – сигнал управления на выходе регулятора; tf – время моделирования.

Для моделирования использован непрерывный ПИД-регулятор (6) $F = 0,01$. Данный параметр оказывает влияние на качество переходного процесса [24], однако чаще всего его значение на практике определяется особенностью технической реализации ПИД-регулятора.

Время переходного процесса оценивалось по уровню 3% от сигнала задания.

Также для сравнения проведена численная оптимизация интегральных критериев в программном пакете MATLAB.

Следует отметить, что для каждой из передаточных характеристик существует критическое значение величины F , при котором расчетное значение D выходит за рамки реализации. В некоторых случаях для достижения минимального значения интегрального критерия приходилось уменьшать значение F .

Результаты моделирования и настройки ПИД-регулятора. Характер зависимости основных параметров качества переходных процессов от времени переходного процесса tp приведен на рис. 2, перерегулирования A – на рис. 3 и интегральных критериев J_1 – J_4 – на рис. 4–7.

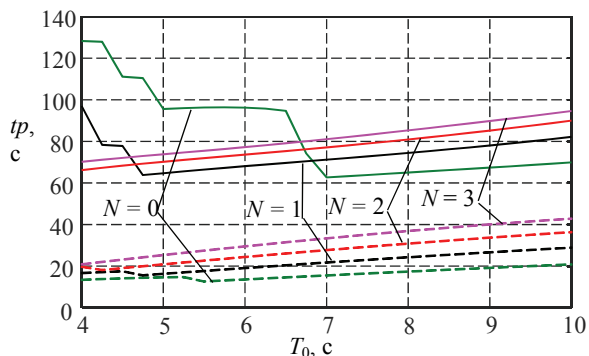


Рис. 2. Время переходного процесса tp для W_{01} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

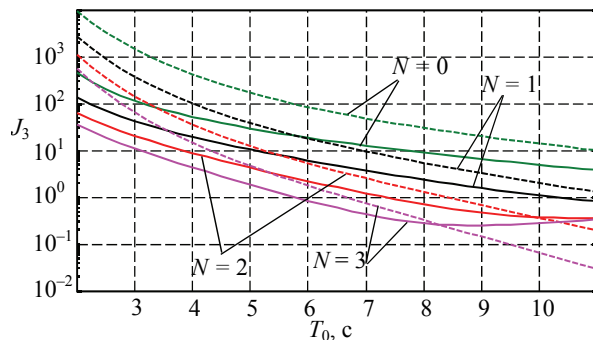


Рис. 6. Интегральный критерий J_3 для W_{02} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

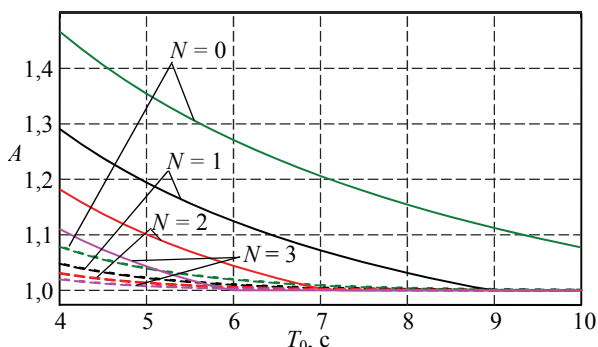


Рис. 3. Перерегулирование A для W_{01} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

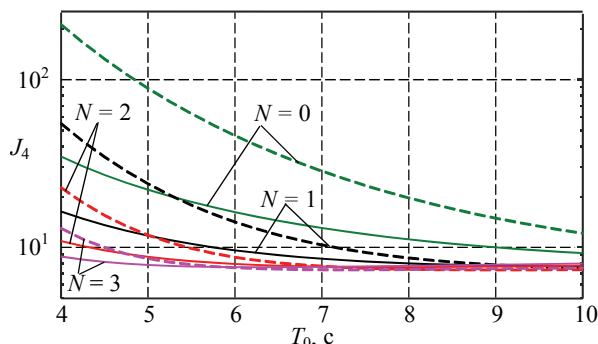


Рис. 7. Интегральный критерий J_4 для W_{01} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

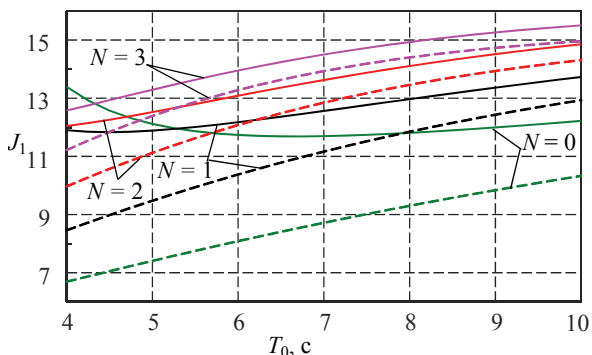


Рис. 4. Интегральный критерий J_1 для W_{01} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

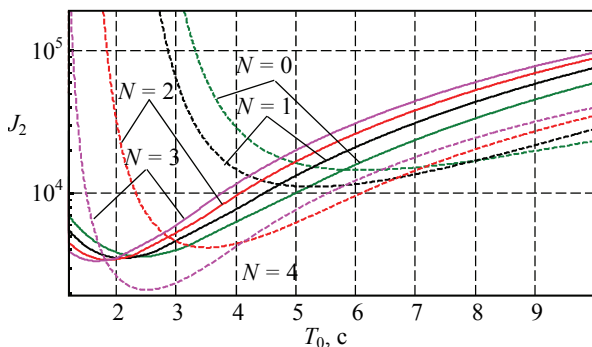


Рис. 5. Интегральный критерий J_2 для W_{03} .
Сплошная линия – ПИД;
штриховая линия – deadbeat

Наибольшие отличия в зависимостях выбранных параметров наблюдаются между объектом W_{03} и остальными.

Ступеньки на графиках переходных процессов указывают на наличие колебательности. Нижняя ступенька соответствует аperiodическому характеру переходного процесса.

Графики показывают, что в случае необходимости минимизации времени tp переходного процесса для поиска настроек ПИД-регулятора следует использовать deadbeat-регулятор с $N = 0$. Запуск поискового алгоритма желательно начинать со значений T_0 , которые близки к значению большей постоянной времени. При наличии запаздывания deadbeat лучше справляется с обеспечением минимального значения данного критерия настройки регулятора. Но следует отметить, что его применение имеет существенные ограничения по сравнению с ПИД.

Минимальное значение классического интегрального критерия J_1 наблюдается при $N = 0$. Расположение минимума зависит от величины запаздывания. В этом случае минимум находится близко к зоне неустойчивых значений настройки. Влияние времени квантования на настройки достаточно незначительно. В данном методе настройки J_1 может быть использован только как дополнительный фактор при комплексном рассмотрении.

J_2 имеет более сильный минимум в сравнении с J_1 . По этому критерию deadbeat-регулятор на порядок превосходит ПИД при наличии запаздывания. Минимальное значение J_2 наблюдается при $N = 3$.

Минимальное значение J_3 отмечается также при $N = 3$. Для его представления, как и для J_3 , также использована логарифмическая шкала. Критерий J_3 имеет сравнимые значения для ПИД и deadbeat.

Соотношения между значениями ПИД и deadbeat для последнего интегрального критерия существенно разнятся только при малых значениях T_0 . По мере увеличения T_0 в исследуемом диапазоне они начинают сближаться. В области малых значений J_4 для ПИД значительно ниже, чем для deadbeat-регулятора.

Сравнение результатов настройки ПИД-регулятора разными методами. Результаты настройки с использованием deadbeat-регулятора $J_{*,DB}$ и численной оптимизации $J_{*,C}$ отражены на рис. 8, 9 и в табл. 1–4, где * – номер критерия. В последней колонке табл. 1–4 показано время квантования, которое соответствует минимальному значению интегрального критерия.

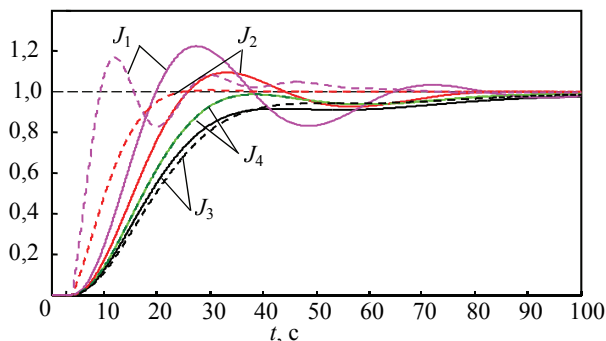


Рис. 8. Оптимальные переходные процессы для W_{01} . Сплошная линия – через deadbeat-регулятор; штриховая линия – численным методом оптимизации

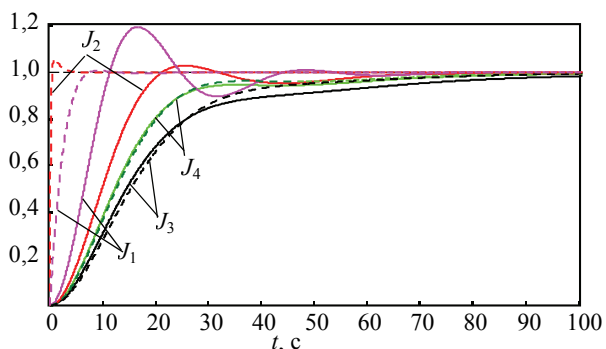


Рис. 9. Оптимальные переходные процессы для W_{03} . Сплошная линия – через deadbeat-регулятор; штриховая линия – численным методом оптимизации

Горизонтальные строки в таблицах отражают минимальное значение критерия и параметры, которые этому соответствуют.

Таблица 1

Результаты для W_{01}

Параметр	J	K	D	I	T_0
$J_{1,DB}$	11,68	1,683	0,020763	13,301	6,665
$J_{1,C}$	5,955	2,457	21,143	5,5347	
$J_{1,DB}/J_{1,C}$	1,962	0,6849	$9,82 \cdot 10^{-4}$	2,4032	
$J_{2,DB}$	11 286	1,1560	0,004991	16,244	4,235
$J_{2,C}$	813,3	1,5923	6,9098	10,922	
$J_{2,DB}/J_{2,C}$	13,88	0,726	$7,22 \cdot 10^{-4}$	1,4873	
$J_{3,DB}$	0,4717	0,842	0,002095	24,921	9,43
$J_{3,C}$	0,3112	0,737	0,006753	24,181	
$J_{3,DB}/J_{3,C}$	1,5156	1,142	0,31014	1,0306	
$J_{4,DB}$	7,5899	0,932	0,002853	20,643	6,295
$J_{4,C}$	7,5870	0,932	0,013992	20,643	
$J_{4,DB}/J_{4,C}$	1,0004	1,0	0,20391	1,0	

Таблица 2

Результаты для W_{02}

Параметр	J	K	D	I	T_0
$J_{1,DB}$	5,497	4,704	0,11808	4,1076	3,085
$J_{1,C}$	0,639	21,48	172,92	0,6536	
$J_{1,DB}/J_{1,C}$	8,602	0,219	0,000683	6,285	
$J_{2,DB}$	3788	2,023	0,008038	8,5414	2,76
$J_{2,C}$	91,29	6,414	29,3	2,6393	
$J_{2,DB}/J_{2,C}$	41,5	0,316	0,000274	3,2362	
$J_{3,DB}$	0,249	0,923	0,001439	20,69	8,895
$J_{3,C}$	0,122	0,809	0,004569	19,533	
$J_{3,DB}/J_{3,C}$	2,05	1,141	0,31485	1,0592	
$J_{4,DB}$	5,468	1,089	0,001907	16,077	5,785
$J_{4,C}$	5,466	1,087	0,008213	15,999	
$J_{4,DB}/J_{4,C}$	1,0003	1,002	0,23217	1,0049	

Таблица 3

Результаты для W_{03}

Параметр	J	K	D	I	T_0
$J_{1,DB}$	4,295	11,869	1,0827	1,56	1,21
$J_{1,C}$	0,0927	327,62	584,48	0,175	
$J_{1,DB}/J_{1,C}$	46,32	0,0363	0,00185	8,896	
$J_{2,DB}$	3330,4	2,952	0,0273	6,17	1,67
$J_{2,C}$	40,317	8,3830	38,101	2,144	
$J_{2,DB}/J_{2,C}$	82,604	0,352	0,000717	2,88	
$J_{3,DB}$	0,273	0,934	0,00252	21,2	5,69
$J_{3,C}$	0,108	0,814	0,00427	19,2	
$J_{3,DB}/J_{3,C}$	2,541	1,145	0,59032	1,10	
$J_{4,DB}$	5,269	1,157	0,00362	16,3	4,18
$J_{4,C}$	5,249	1,107	0,0077	15,5	
$J_{4,DB}/J_{4,C}$	1,005	1,046	0,47	1,05	

Наибольшие несовпадения наблюдаются для среднеквадратичного отклонения J_1 как при визуальном анализе графиков, так и при рассмотрении соотношений параметров настройки K ,

D , I в табл. 1–4. Значения критерия имеют большие отличия только для объекта без запаздывания. Получаемые настройки ПИД-регулятора через deadbeat-регулятор могут выступать только в качестве отправной точки для последующих численных методов оптимизации.

Таблица 4

Результаты для W_{04}

Параметр	J	K	D	I	T_0
$J_{1,DB}$	12,211	1,62	0,0195	14,0	6,89
$J_{1,C}$	6,22719	2,40	20,583	5,81	
$J_{1,DB}/J_{1,C}$	1,9608	0,675	$9,48 \cdot 10^{-4}$	2,41	
$J_{2,DB}$	12204	1,13	0,00496	16,9	4,32
$J_{2,C}$	900,39	1,55	6,8358	11,4	
$J_{2,DB}/J_{2,C}$	13,555	0,727	$7,26 \cdot 10^{-4}$	1,49	
$J_{3,DB}$	0,49218	0,836	0,00213	25,4	9,48
$J_{3,C}$	0,32651	0,732	0,007098	24,5	
$J_{3,DB}/J_{3,C}$	1,5074	1,142	0,30072	1,04	
$J_{4,DB}$	7,8172	0,920	0,0029	21,1	6,36
$J_{4,C}$	7,81374	0,921	0,0143	21,2	
$J_{4,DB}/J_{4,C}$	1,0004	0,999	0,202	0,997	

Значение D имеет наибольшее отличие при настройке выбранными методами.

Настройки ПИД-регулятора, которые найдены двумя методами по критериям J_3 и J_4 , демонстрируют наилучшее совпадение. Отличия значения K не превышают 15%, а значения I – 10% для J_3 . Для J_4 значения K и I имеют отличие в 5% только для объекта без запаздывания W_{03} , в остальных случаях вариации не превышают 1%. Большие расхождения в параметре D не оказывают влияния на значение интегральных критериев J_3 и J_4 . Несмотря на существенные расхождения значения D , расхождение J_4 меньше 1%. Их значения можно несколько улучшить, если использовать отличную от [23] методику формирования значений deadbeat-регулятора.

Максимальное значение $N = 3$ обусловлено порядком передаточной функции объекта. При получении передаточной функции другого порядка оптимальное значение N будет другим.

Заключение. Предложенная методика настройки ПИД-регуляторов через deadbeat-регулятор является очень удобной с практической точки зрения. Вариацией параметра времени квантования T_0 можно сбалансированно менять одновременно три настройки ПИД-регулятора. Она может играть роль, аналогичную линии равного затухания в частотных методах [5, 6]. Все выбранные в исследовании параметры переходного процесса имеют один глобальный минимум в зависимости от T_0 .

Для интегральных критериев J_3 и J_4 , которые ориентированы только на выходной параметр объекта управления, использование предложенной методики может служить отправной точкой для дальнейшего использования в численных методах оптимизации. При проведении представленных исследований оптимизация начальных настроек через deadbeat-регулятор позволила получить результат за меньшее количество итераций, чем ранее с использованием метода Ziegler – Nichols.

В случае необходимости получения энергоэффективных параметров ПИД, к которым относятся критерии J_3 и J_4 , настройка через deadbeat-регулятор с вариацией simple time позволяет решить проблему на порядок быстрее, чем прямая численная оптимизация.

Методика достаточно просто реализуется для автономной настройки линейных объектов и состоит из последовательности простых операций.

1. Используя правила выбора времени квантования [21], задаемся начальным значением T_0 .

2. Через передаточную функцию объекта или методом прямой идентификации [21] находим ее представление в z -области.

3. Применяем методику настройки deadbeat-регулятора как в [23] для максимально возможного значения N (в случае минимизации времени переходного процесса $N = 0$).

4. Линейно меняем T_0 до достижения минимума выбранного критерия A , tr , J_3 или J_4 .

Литература

1. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern control system. Boston: Pearson Educat, 2008. 933 p.
2. Ziegler J. G., Nichols N. B. Optimum settings for automatic controllers // Trans. ASME. 1942. Vol. 64. P. 759–768.
3. Ziegler J. C., Nichols N. B. Optimum settings for automatic controllers. New York: Res. Triangle Park, 1992. 759 p.
4. Takahashi Y., Chan C. S., Auslander D. M. Parameter in stellung bei linearen DDC Algorithmen. Regelungstech // ProzeBdatenverarb. 1971. Tom 19. S. 237–244.
5. Ротач В. Я. Теория автоматического управления. М.: Изд-во МЭИ, 2005. 396 с.
6. Стефани Е. П. Основы расчета настройки регуляторов теплоэнергетических процессов. М.: Энергия, 1972. 376 с.
7. Макаров И. М., Менский Б. М. Линейные автоматические системы. М.: Машиностроение, 1982. 505 с.

8. Schaedel H. M. A new method of direct PID controller design based on the principle of cascaded damping ratios // Proc. 4th European Control Conference, Brüssel, 1–7 July, 1997. Brüssel, 1997. P. 1–4.
9. Дудников Е. Г. Основы автоматического регулирования тепловых процессов. М.: Госэнергоиздат, 1956. 110 с.
10. Vrani D., Kocijan J., Strmnik S. Rejection tuning method for PID controllers. URL: <http://ascc2004.ee.mu.oz.au> (date of access: 10.03.2019).
11. Skogestad's method for PID tuning. URL: http://techteach.no/fag/emar2101/h08/prosjekt_sim/skogestad.pdf (date of access: 12.03.2019).
12. Cohen G. H., Coon G. A. Theoretical consideration of retarded control // Trans. ASME. 1953. Vol. 75. P. 827–834.
13. Chien K. L., Hrones J. A., Reswick J. B. On the automatic control of generalized passive systems // Trans. ASME. 1952. Vol. 74. P. 175–185.
14. Visioli A. Tuning of PID controllers with fuzzy logic // IEE Proceedings – Control Theory and Applications. 2001. Vol. 148, no. 1. P. 1–8.
15. Complex tuning of the PID controller according to integral criteria / D. Hryniuk [et al.] // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream), Vilnius, 26 April, 2018. Vilnius, 2018. P. 1–4.
16. Online tuning of fuzzy PID controllers via rule weighing based on normalized acceleration / O. Karasakal [et al.] // Engineering Applications of Artificial Intelligence. 2013. Vol. 26, issue 1. P. 184–197.
17. Lisauskas S., Udris D., Uznys D. Direct Torque Control of Induction Drive Using Fuzzy Controller // Elektronika Ir Elektrotechnika. 2013. Vol. 19, no. 5. P. 13–16.
18. Meena D. C., Devanshu A. Genetic algorithm tuned PID controller for process control // International Conference on Inventive Systems and Control (ICISC), Coimbatore, 19–20 Jan, 2017. Coimbatore, 2017. P. 1–6.
19. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its settings // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream), Vilnius, 27 April, 2017. Vilnius, 2017. P. 1–4.
20. Alyoussef F., Kaya I. Nonlinear PID Based on the Dynamic of Biological Cell Membrane for Controlling the Pitch Angle of the Twin Rotor System // International Engineering and Natural Sciences Conference (IENSC 2018), Diyarbakir, November, 2018. Diyarbakir, 2018. P. 1625–1633.
21. Isermann R. Digital Control Systems. Berlin: Springer, 1989. 565 p.
22. Plsek S., Matusu R. Application of Adaptive Dead-beat Controller in Drying Process // Procedia Engineering. 2015. Vol. 100. P. 756–764.
23. Increasing the robustness of the digital controller / N. Oliferovich [et al.] // Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream), Vilnius, 26 April, 2018. Vilnius, 2018. P. 1–6.
24. Aström K. J., Hägglund T. Advanced PID control. ISA – the Instrumentation, Systems, and Automation Society. Durham: Research Triangle Park, 2006. 461 p.

References

1. Dorf R. C., Bishop R. H. Modern control system. Boston, Pearson Educat, 2008. 933 p.
2. Ziegler J. G., Nichols N. B. Optimum settings for automatic controllers. *Trans. ASME*, 1942, vol. 64, pp. 759–768.
3. Ziegler J. C., Nichols N. B. Optimum settings for automatic controllers. New York, Res. Triangle Park, 1992. 759 p.
4. Takahashi Y., Chan C. S., Auslander D. M. Parameter in stellung bei linearen DDC Algorithmen. Regelungstech. *ProzeBdatenverarb*, 1971, tom 19, ss. 237–244.
5. Rotach V. Ya. *Teoriya avtomaticheskogo upravleniya* [Automatic control theory]. Moscow, Izdatel'stvo MEI Publ., 2005. 396 p.
6. Stefani E. P. *Osnovy rascheta nastroyki regulyatorov teploenergeticheskikh protsessov* [The basics of calculating the settings of regulators of heat and power processes]. Moscow, Energiya Publ., 1972. 376 p.
7. Makarov I. M., Menskiy B. M. *Lineynyye avtomaticheskkiye sistemy* [Linear automation systems]. Moscow, Mashinostroyeniye Publ., 1982. 505 p.
8. Schaedel H. M. A new method of direct PID controller design based on the principle of cascaded damping ratios. *Proc. 4th European Control Conference*. Brüssel, 1997, pp. 1–4.
9. Dudnikov E. G. *Osnovy avtomaticheskogo regulirovaniya teplovykh protsessov* [Fundamentals of automatic regulation of thermal processes]. Moscow, Gosenergoizdat Publ., 1956. 110 p.

10. Vrani D., Kocijan J., Strmnik S. Rejection tuning method for PID controllers. Available at: <http://ascc2004.ee.mu.oz.au> (accessed 10.03.2019).
11. Skogestad's method for PID tuning. Available at: http://techteach.no/fag/emar2101/h08/prosjekt_sim/skogestad.pdf (accessed 12.03.2019).
12. Cohen G. H., Coon G. A. Theoretical consideration of retarded control. *Trans. ASME*, 1953, vol. 75, pp. 827–834.
13. Chien K. L., Hrones J. A., Reswick J. B. On the automatic control of generalized passive systems. *Trans. ASME*, 1952, vol. 74, pp. 175–185.
14. Visioli A. Tuning of PID controllers with fuzzy logic. *IEE Proceedings – Control Theory and Applications*, 2001, vol. 148, no. 1, pp. 1–8.
15. Hryniuk D., Suhorukova I., Oliberovich N., Orobei I. Complex tuning of the PID controller according to integral criteria. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2018, pp. 1–4.
16. Karasakal O., Guzelkaya M., Eksin I., Yesil E., Kumbasar T. Online tuning of fuzzy PID controllers via rule weighing based on normalized acceleration. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 2013, vol. 26, issue 1, pp. 184–197.
17. Lisauskas S., Udrys D., Uznyas D. Direct Torque Control of Induction Drive Using Fuzzy Controller. *Elektronika Ir Elektrotechnika*, 2013, vol. 19, no. 5, pp. 13–16.
18. Meena D. C., Devanshu A. Genetic algorithm tuned PID controller for process control. *International Conference on Inventive Systems and Control (ICISC)*. Coimbatore, 2017, pp. 1–6.
19. Hryniuk D., Suhorukova I., Orobei I. Non-linear PID controller and methods of its setting. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2017, pp. 1–4.
20. Alyoussef F., Kaya I. Nonlinear PID Based on the Dynamic of Biological Cell Membrane for Controlling the Pitch Angle of the Twin Rotor System. *International Engineering and Natural Sciences Conference (IENSC 2018)*, Diyarbakir, 2018, p. 1625–1633.
21. Isermann R. *Digital Control Systems*. Berlin, Springer, 1989. 565 p.
22. Plsek S., Matusu R. Application of Adaptive Dead-beat Controller in Drying Process. *Procedia Engineering*, 2015, vol. 100, pp. 756–764.
23. Oliberovich N., Hryniuk D., Orobei I., Suhorukova I. Increasing the robustness of the digital controller. *Open Conference of Electrical, Electronic and Information Sciences (eStream)*. Vilnius, 2018, pp. 1–6.
24. Åström K. J., Hägglund T. *Advanced PID control*. ISA – the Instrumentation, Systems, and Automation Society. Durham, Research Triangle Park, 2006. 461 p.

Информация об авторах

Гринюк Дмитрий Анатольевич – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: hryniuk@tut.by

Олиферович Надежда Михайловна – ассистент кафедры автоматизации производственных процессов и электротехники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: oliferovich@belstu.by

Сухорукова Ирина Геннадьевна – старший преподаватель кафедры программной инженерии. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: irina_x@rambler.ru

Information about the authors

Hryniuk Dzmitry Anatol'yevich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: hryniuk@tut.by

Oliberovich Nadezhda Mikhaylovna – assistant lecturer, the Department of Automation of Production Processes and Electrical Engineering. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: oliferovich@belstu.by

Suhorukova Irina Gennad'yevna – Senior Lecturer, the Department of Information Systems and Technology. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: irina_x@rambler.ru

Поступила 15.05.2019

УДК 62-521/529

И. В. Акиншева

Могилевский государственный университет продовольствия

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОЕКТИРОВАНИЕ КОМПЛЕКСА
ДЛЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ГРУЗОВ НА ПОДВЕСЕ**

Проведен анализ основных направлений исследований в области построения систем управления автоматизированными складскими комплексами. Определен круг задач, которые необходимо решить в процессе моделирования и проектирования. Представлена разработанная схема комплекса для перемещения груза на подвесе и динамическая схема движения каретки с грузом, при использовании которой получена уточненная математическая модель автоматического перемещения объектов с изменяющейся нагрузкой, учитывающая предъявляемые к процессу перемещения требования. Описана математическая модель, по которой производится расчет изменения положения груза, жестко закрепленного на подвесе одним концом, при перемещении несущего устройства и учитывается влияние внешних воздействий. Разработан проект опытной установки в соответствии с проведенным анализом оборудования автоматизированных складов. Определена структура управляющего микропроцессорного устройства, включенного в состав проектируемого комплекса. При выборе технических средств для управляющего устройства учитывалась возможность физической интеграции, согласованность сигналов отдельных элементов и используемого программного обеспечения.

Ключевые слова: автоматизация, модель, нагрузка, перемещение, склад, система управления, позиционирование.

I. V. Akinsheva

Mogilev State University of Food Technology

**MATHEMATICAL MODELING AND DESIGNING OF THE COMPLEX
FOR TRANSPORTATION OF LOADS ON PENDENT**

The analysis of the main areas of research in the field of building control systems for automated warehouse complexes has been carried out. The range of tasks that need to be solved in the process of modeling and design has been determined. A developed scheme of the complex for moving the load on the suspension and a dynamic diagram of the movement of the carriage with the load on the suspension are presented, using which a refined mathematical model of automatic movement of objects with varying loads is obtained, taking into account the requirements for the process of moving. A mathematical model is described, which is used to calculate the change in the position of the load, which is rigidly fixed on the suspension with one end, when the carrier is moved, and the influence of external influences is taken into account. A project of a pilot plant was developed in accordance with the analysis of the equipment of automated warehouses. The structure of the microprocessor control device included in the projected complex has been determined. When choosing technical means for the control device, the possibility of physical integration, consistency of the signals of the individual elements and the software used was taken into account.

Key words: automation, model, load, movement, warehouse, control system, positioning.

Введение. Разработка систем управления комплексами для автоматического перемещения объектов с нагрузкой является актуальной задачей при создании автоматизированных систем управления складскими помещениями промышленных предприятий во всем мире. Исследования в этой области ведутся в производственных лабораториях предприятий, занимающихся разработкой робототехнических комплексов промышленных складов. Ведущие исследования проводят ученые в лабораториях компаний Eletric 80 и Vema [1], на территории стран СНГ известны разработки таких компаний, как ООО «ЭВС», Modula и Daifuku [2]. Особенностью представ-

ляемых робототехнических комплексов для оснащения автоматизированных складов является использование направляющих и перемещение по ним в трех измерениях жестко закрепленной каретки-камеры с грузом. Основные исследования ведутся в области повышения точности позиционирования и оптимальном построении каркаса из направляющих. Нерешенной является задача исследования перемещения груза на подвесе, закрепленного жестко одним концом. Такая конструкция позволит снизить затраты на разработку каркаса из направляющих в случае линейного перемещения вдоль одной оси на большие расстояния.

Целью работы является разработка уточненной математической модели и проектирование комплекса для исследования перемещения объектов с нагрузкой.

Для достижения поставленной цели планируется решить следующие задачи:

1) провести анализ действующих на производстве автоматизированных систем для перемещения грузов, выявить существующие недостатки;

2) составить динамическую схему перемещения грузов на подвесе, жестко закрепленных одним концом;

3) разработать методику моделирования и составить уточненную математическую модель автоматизированной системы для перемещения грузов;

4) разработать проект установки, реализующей автоматизированную систему для перемещения грузов, адекватную составленной модели;

5) подобрать и провести анализ согласованности комплектующих, необходимых для разработки автоматизированного комплекса;

6) определить дальнейшее направление исследований.

Актуальность исследования заключается в том, что производственные предприятия, увеличивая производительность, предъявляют повышенные требования к скорости и точности перемещения комплектующих на производственных участках, а также к перемещению готовой продукции внутри складских помещений. Поэтому разработка автоматизированных комплексов по перемещению объектов с нагрузкой является неотъемлемой частью автоматизации производства в целом.

Основная часть. Проведенный анализ показывает, что в мировой практике исследований предпочтение отдается изучению и описанию автоматического перемещения жестко закрепленных грузов, в то время как возникает необходимость в исследовании автоматического перемещения грузов на подвесах, закрепленных жестко одним концом. Недостаточное количество публикаций о результатах исследования в данной области позволяет сделать заключение о перспективности выбранного направления исследований.

В процессе анализа существующих производств и определения их недостатков разработан проект экспериментальной установки, схема которой приведена на рис. 1.

На данном этапе исследования получена математическая модель автоматического перемещения объекта с изменяемой нагрузкой. Благодаря разработанной математической модели, возможно выделение двух основных параметров: массы груза и скорости его перемещения,

используемых в дальнейшем для оптимизации и изменения характеристик системы как в формализованном виде, так и в ходе испытаний [3].

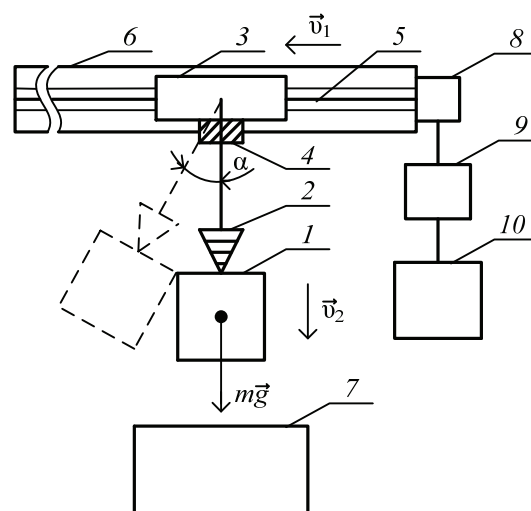


Рис. 1. Схема комплекса для перемещения груза на подвесе:

- 1 – груз массой m ; 2 – подвес с оптическим устройством; 3 – каретка с шаговым двигателем D_2 ; 4 – датчик веса; 5 – комплект ременной передачи; 6 – направляющая рейка; 7 – контейнер; 8 – шаговый двигатель D_1 ; 9 – управляющее микропроцессорное устройство; 10 – персональный компьютер (ПК)

В представленной на рис. 1 схеме введены следующие обозначения: m – масса груза 1; v_1 – скорость движения каретки 3 по горизонтали, обеспечиваемая двигателем D_1 ; v_2 – скорость движения подвеса 2 с грузом 1 по вертикали, обеспечиваемая двигателем D_2 ; α – угол отклонения груза от вертикальной оси при движении.

Для упрощения разрабатываемой математической модели исследуемой системы приняты следующие допущения [4, 5]: угол отклонения α груза от вертикальной оси должен стремиться к нулю ($\alpha \rightarrow 0$); скорость v_2 движения подвеса 2 с грузом 1 по вертикали постоянна ($v_2 = \text{const}$); скорость v_1 движения каретки 3 по горизонтали является переменной величиной.

Итак, необходимой для решения производственной задачи является адаптация в зависимости от массы m груза 1 скорости движения v_1 каретки 3 таким образом, чтобы угол $\alpha \rightarrow 0$.

Адаптировать скорость v_1 нужно для обеспечения движения груза 1 с последующим его точным перемещением в контейнер 7, а также для ликвидации помех при движении грузов с помощью нескольких аналогичных кареток в случае организации движения по конвейеру.

Математическая модель движения груза представляет собой колебательную систему, схема которой представлена на рис. 2.

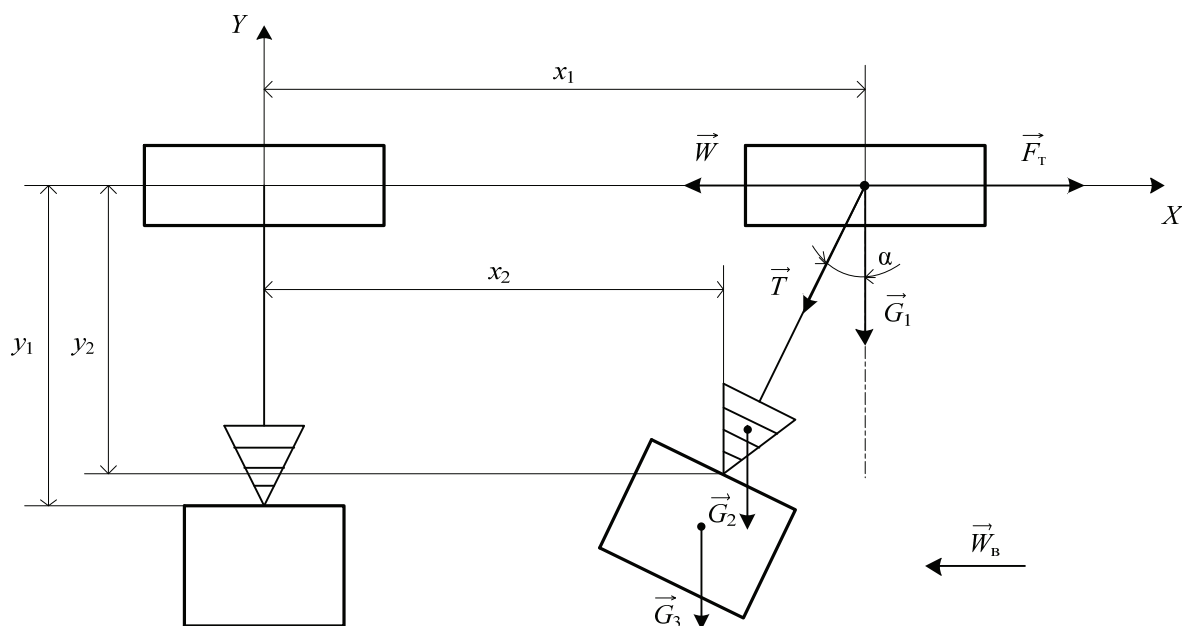


Рис. 2. Динамическая схема движения каретки с грузом на подвесе:

F_T – суммарное тяговое усилие; W – сила сопротивления движению каретки;
 W_B – сила сопротивления воздуха при движении груза; T – сила натяжения каната подвеса;
 G_1 – сила тяжести каретки совместно с датчиком веса;
 G_2 – сила тяжести подвеса с оптическим датчиком; G_3 – сила тяжести груза

В результате использования уравнения движения твердого тела [6] была составлена система уравнений:

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = \frac{1}{m_1}(-T \sin \alpha - F_T - W); \\ \ddot{y}_1 = 0; \\ \ddot{x}_1 = \frac{1}{m + m_2}(T \sin \alpha - W_B); \\ \ddot{y}_1 = \frac{1}{m + m_2}(T \cos \alpha - (G_2 + G_3)). \end{cases} \quad (1)$$

Особенностью разработанной модели является то, что в ней учтена взаимосвязь параметров исследуемой системы: скорости движения каретки v_1 , массы груза m и изменения угла отклонения α от вертикального положения подвеса в зависимости от скорости движения каретки. Благодаря полученной взаимосвязи становится возможным исследовать изменение положения груза на подвесе при изменении скорости движения каретки и массы m груза.

Сила натяжения каната подвеса находится по следующей формуле:

$$T = k_1 \Delta l_1 + \beta \Delta \dot{l}_1,$$

где $k_1 = \frac{ES_1}{l_1}$ – коэффициент жесткости каната;
 E – модуль упругости материала каната;

$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} c$ – площадь сечения каната; d_1 – диаметр каната; c – коэффициент заполнения сечения каната; $\Delta l = l_1 - l_2$ – удлинение каната; $l_1 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$ – длина каната во время движения; l_2 – длина каната в положении равновесия; β – коэффициент рассеивания энергии; $\Delta \dot{l} = \frac{(x_1 - x_2)(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + (y_1 - y_2)(\dot{y}_1 - \dot{y}_2)}{\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}}$ – скорость удлинения каната.

Сила тяжести подвеса с оптическим прибором и сила тяжести груза соответственно равны

$$G_2 = m_2 g,$$

$$G_3 = m g,$$

где m_2 – масса подвеса с оптическим датчиком; g – ускорение свободного падения.

Угол отклонения каната от начального положения определяется по формуле

$$\alpha = \arctan \left(\frac{x_1 - \dot{x}_1}{y_1 - \dot{y}_1} \right).$$

Сила сопротивления воздуха при движении груза равна

$$W_B = 500 \rho x_2 c_a n,$$

где ρ – плотность воздуха; c_a – коэффициент аэродинамической силы; n – коэффициент перегрузки.

В исходной системе $\ddot{y}_1 = 0$, так как ранее было принято допущение $v_2 = \text{const}$.

Управляющее микропроцессорное устройство, используемое для управления шаговыми двигателями D_1 и D_2 , включает контроллер модели Nano V 3.0 Arduino, в пакет поставки которого входит программное обеспечение, позволяющее реализовывать алгоритмы управления [7] (рис. 3).

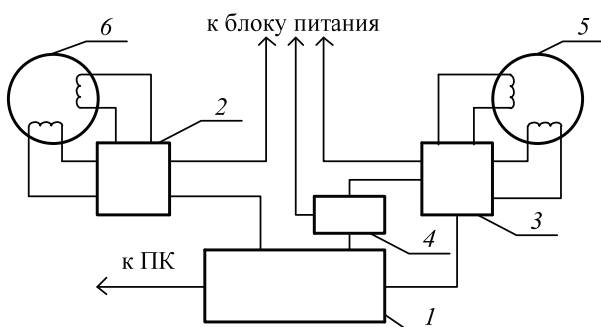


Рис. 3. Схема управляющего микропроцессорного устройства:

- 1 – контроллер; 2, 3 – интерфейсные модули для шаговых двигателей; 4 – датчик веса; 5, 6 – шаговые двигатели D_1 и D_2 соответственно

Также при реализации комплекса для перемещения груза на подвесе, представленного схемами на рис. 1, 3, будут использованы следующие комплектующие.

Обеспечивать движение груза по горизонтали и вертикали будут шаговые двигатели со встроенным редуктором 28BYJ-48 и платой ULN2003 Arduino. Сопряжение шаговых двигателей с контроллером будет производиться через интерфейсные модули модели L298N. Для анализа массы m подвешиваемого груза будет использоваться датчик веса Eleaf для Arduino UNO DIY [8].

В роли оптического устройства может выступать маломощный лазер марки Dot, необходимый для индикации угла отклонения α от вертикальной оси, или датчик положения, предназначенный для определения места расположения контейнера, в который должен быть помещен груз.

Заключение. В результате моделирования получена уточненная математическая модель комплекса по перемещению грузов на подвесе, жестко закрепленных одним концом. Выделены основные параметры рассматриваемого объекта, найдены функциональные взаимосвязи между ними, что позволит разработать алгоритмы, реализующие решение задачи управления разрабатываемым комплексом по минимизации угла отклонения подвеса от вертикального положения и адаптации скорости движения каретки в зависимости от массы перемещаемого груза.

При разработке проекта комплекса по перемещению грузов на подвесе выполнен выбор комплектующих для реализации управляющего микропроцессорного устройства с учетом согласованности входных и выходных сигналов, используемых программных и технических средств на элементной базе Arduino.

Литература

1. Рахманкулов Р. Автоматизированные складские системы компании MODULA // Control Engineering Россия. 2017. № 1. С. 65–69.
2. The integrated solutions of ELETTRIC 80 and BEMA // Maggio, TISSUEMAG. 2018. № 5. P. 36–39.
3. Akinsheva I. V., Ivanova I. D., Kaminski E. Исследование устойчивости нелинейных объектов // Problemy Inzynierii Rolniczej. 2016. Vol. 1. P. 41–52.
4. Абрамович И. И., Березин В. Н., Яуреи А. Г. Грузоподъемные краны промышленных предприятий. М.: Машиностроение, 1989. 360 с.
5. Козловский В. Б., Паршенцев С. А., Ефимов В. В. Вертолет с грузом на внешней подвеске. М.: Машиностроение: Машиностроение-Полет, 2008. 304 с.
6. Яблонский А. А. Курс теоретической механики. В 2 ч. Ч. 2. Динамика. М.: Высшая школа, 1984. 411 с.
7. Преснухин Л. Н. Микропроцессоры. Средства сопряжения. Контролирующие и информационно-управляющие системы. М.: Высшая школа, 2006. 383 с.
8. Петин В. А., Биняковский А. А. Практическая энциклопедия Arduino. М.: ДМК Пресс, 2017. 152 с.

References

1. Rakhmankulov R. Automated storage systems by MODULA. *Control Engineering Rossiya*, 2017, no. 1, pp. 65–69 (In Russian).
2. The integrated solutions of ELETTRIC 80 and BEMA. *Maggio, TISSUEMAG*, 2018, no. 5, pp. 36–39 (In Italian).
3. Akinsheva I. V., Ivanova I. D., Kaminski E. The study of the stability of nonlinear objects. *Problemy Inzynierii Rolniczej*, 2016, vol. 1, pp. 41–52 (In Russian).

4. Abramovich I. I., Berezin V. N., Yaurei A. G. *Gruzopod'yemnyye krany promyshlennykh predpriyatiy* [Hoisting cranes industrial enterprises]. Moscow, Mashinostroeniye Publ., 1989. 360 p.
5. Kozlovskiy V. B., Parshentsev S. A., Efimov V. V. *Vertolet s грузом na vneshney podveske* [Helicopter with external load]. Moscow, Mashinostroeniye, Mashinostroeniye Polet Publ., 2008. 304 p.
6. Yablonskiy A. A. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki. V 2 chastyakh. Chast' 2. Dinamika* [The course of theoretical mechanics. In 2 parts. Part 2. Dynamics]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 1984. 411 p.
7. Presnukhin L. N. *Mikroprotsessory. Sredstva sopryazheniya. Kontroliruyushchiye i informationno-upravlyayushchiye sistemy* [Microprocessors. Means of coupling. Control and information management systems]. Moscow, Vysshaya shkola Publ., 2006. 383 p.
8. Petin V. A., Binyakovskiy A. A. *Prakticheskaya entsiklopediya Arduino* [Practical encyclopedia Arduino]. Moscow, DMK Press Publ., 2017. 152 p.

Информация об авторе

Акиншева Ирина Владиславовна – кандидат технических наук, доцент кафедры автоматизации технологических процессов и производств. Могилевский государственный университет продовольствия (212027, г. Могилев, пр-т Шмидта, 3, Республика Беларусь). E-mail: starrina@mail.ru

Information about the author

Akinsheva Irina Vladislavovna – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Automation of Technological Processes and Production. Mogilev State University of Food Technology (3, Schmidt Ave., 212027, Mogilev, Republic of Belarus). E-mail: starrina@mail.ru

Поступила 15.05.2019

УДК 621.383

А. М. Тимофеев

Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

СКОРОСТЬ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ ОДНОФОТОННОГО КАНАЛА СВЯЗИ С ПРИЕМНЫМ МОДУЛЕМ НА ОСНОВЕ СЧЕТЧИКА ФОТОНОВ С МЕРТВЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРОДЛЕВАЮЩЕГОСЯ ТИПА

Построена математическая модель канала связи, содержащего в качестве приемного модуля счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа. На основе этой модели получено выражение для оценки максимальной скорости передачи информации канала связи.

Установлено, что с увеличением средней скорости счета сигнальных импульсов при передаче символов «0» n_{s0} максимальная скорость передачи информации C_{max} вначале практически не изменяется, однако затем спадает. Причем при прочих равных параметрах с увеличением средней длительности мертвого времени продлевающегося типа τ_d этот спад наблюдается при больших значениях n_{s0} : при $n_{s0} = 66,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 0$; при $n_{s0} = 74,1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 5 \text{ мкс}$; при $n_{s0} = 83,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 10 \text{ мкс}$; при $n_{s0} = 95,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 15 \text{ мкс}$.

Ключевые слова: счетчик фотонов, мертвое время, канал связи, скорость передачи информации.

A. M. Timofeev

Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

INFORMATION TRANSFER RATE OF A SINGLE PHOTON COMMUNICATION CHANNEL WITH A RECEIVER MODULE BASED ON A PHOTON COUNTER WITH A DEAD TIME OF A PROLONGED TYPE

A mathematical model of a communication channel has been constructed, containing as counter module a photon counter with a dead time of prolonged type. An expression for estimating the maximum data transfer rate of a communication channel was derived from this model.

It has been established that with an increase in the average count rate of signal pulses when transmitting symbols “0” n_{s0} , the maximum information transfer rate C_{max} practically does not change at first, but then decreases. All other things being equal, with an increase in the average duration of the dead time of a prolonged type τ_d , this decrease is observed for large values of n_{s0} : when $n_{s0} = 66.6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ for $\tau_d = 0$; when $n_{s0} = 74.1 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ for $\tau_d = 5 \text{ }\mu\text{s}$; when $n_{s0} = 83.5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ for $\tau_d = 10 \text{ }\mu\text{s}$; when $n_{s0} = 95.6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ for $\tau_d = 15 \text{ }\mu\text{s}$.

Key words: photon counter, dead time, communication channel, data transfer rate.

Введение. В настоящее время достаточно активно разрабатывают системы связи, которые решают разнообразные задачи в области информационной безопасности, например, обеспечение конфиденциальности передаваемой информации, определение подлинности источника информации и самой информации и пр. [1, 2].

Одним из способов решения такого рода задач является использование криптографического или криптоподобного преобразования передаваемой информации [1, 2]. Однако информационная безопасность систем связи, в которых применяют криптографические методы защиты информации, может оказаться под угрозой. Связано это, прежде всего, с тем, что преобладающее большинство криптографических алгоритмов и стандартов являются общедоступными [1, 2]. В результате, если злоумышленник обладает достаточно большими вычислительными возможностями и изымет из канала связи, например, зашифрованные данные, то он смо-

жет взломать шифртексты и получить доступ к конфиденциальным данным.

Другим способом решения задач обеспечения информационной безопасности передаваемой информации считается использование систем квантово-криптографической связи, которые характеризуются абсолютной скрытностью и конфиденциальностью передаваемой информации [3–5]. Отличительной особенностью квантово-криптографических систем связи является использование однофотонных волоконно-оптических каналов связи, в которых данные передаются посредством предельно слабого оптического излучения со средним числом фотонов не более десяти в расчете на каждый бит (символ). Отметим, что регистрация такого маломощного оптического излучения осуществляется с помощью высокочувствительных приемных модулей – счетчиков фотонов [6–8].

Однако современные системы однофотонной связи не позволяют достигать высоких

скоростей передачи данных [3]. Это связано, в частности, с тем, что скорость передачи данных для указанных систем связи ограничена быстродействием счетчиков фотонов. Для оценки быстродействия счетчика фотонов используют такой параметр, как длительность его мертвого времени – интервала времени, в течение которого счетчик фотонов не чувствителен к падающему на него оптическому излучению [3, 6–12].

Поскольку до настоящего времени оценка влияния мертвого времени счетчика фотонов на скорость передачи информации однофотонного канала связи не выполнялась, это являлось целью данной работы.

Объектом исследования выступал асинхронный канал связи, в котором в качестве приемного модуля использовался счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа. Выбор в качестве объекта исследования такого канала связи объясняется тем, что в ряде случаев его использование оказывается более предпочтительным ввиду отсутствия дополнительных линий связи для передачи и приема синхроимпульсов [6, 7]. Мертвым временем продлевающегося типа характеризуются счетчики фотонов на базе лавинных фотоприемников, включенных по схеме пассивного гашения лавины [6, 11, 12].

Предметом исследования являлось установление влияния продлевающегося мертвого времени счетчика фотонов на максимальную скорость передачи информации канала связи.

Основная часть. Дальнейшие рассуждения будут основаны на том, что канал связи построен на базе приемопередающих устройств [7]. Вначале построим математическую модель канала связи. Для этого воспользуемся методикой, описанной в работах [13, 14].

Рассматриваемый канал связи является двоичным, алфавит кодовых слов на входе которого представляется символами «0» и «1». Обозначим вероятности появления символов «0» и «1» на входе канала связи как $P_s(0)$ и $P_s(1)$ соответственно.

Для передачи в канал связи каждого двоичного символа используются оптические сигналы различной мощности: символ «0» передается оптическим сигналом мощностью W_1 , а символ «1» – W_2 ($W_1 < W_2$). При этом в течение длительности времени передачи одного бита τ_b в канал связи поступает в среднем не более десяти фотонов как при передаче символа «0», так и при передаче символа «1».

Между каждой парой символов находится так называемый «защитный» временной интервал длительностью $\tau_b / 2$, в течение которого данные в канал связи не передаются.

Прием данных осуществляется посредством счетчика фотонов, выполненного на базе лавинного фотоприемника, включенного по схеме пассивного гашения лавины. Поскольку символы «0» и «1» передаются импульсами различной мощности, то на выходе счетчика фотонов за время однофотонной передачи $\Delta t = \tau_b / 2$ формируется различное количество электрических импульсов, которое будет прямо пропорционально мощности оптического излучения [7].

При регистрации оптического излучения счетчик фотонов подсчитывает количество импульсов и принимает решение, какой двоичный символ поступил на его вход, используя для этого нижний N_1 и верхний N_2 пороговые уровни регистрации [7]. Если на выходе счетчика фотонов зарегистрировано импульсов в количестве $N_1 - N_2$, то принимается решение, что передан символ «0». При превышении зарегистрированных импульсов числа N_2 делается вывод, что передан символ «1». В случае регистрации импульсов в количестве, меньшем, чем N_1 , принимается решение, что символ отсутствует.

Следовательно, согласно [13, 14], канал связи является несимметричным, поскольку алфавит кодовых слов на входе канала связи не совпадает с алфавитом кодовых слов на его выходе. Обозначим вероятности появления символов «0» и «1» на выходе канала связи как $P'_s(0)$ и $P'_s(1)$ соответственно, а вероятность того, что на выходе канала связи символ отсутствует, – $P'_s(-)$.

Всеми потерями информации, за исключением потерь в счетчике фотонов, пренебрегаем.

Далее получим выражение для оценки максимальной скорости передачи информации рассматриваемого канала связи.

Скорость передачи информации C – это количество информации I , приходящееся на среднее время передачи одного бита (одного символа) τ_b [13, 14]:

$$C = I / \tau_b = [H(B) - H(B/A)] / \tau_b, \quad (1)$$

где $H(B)$ – энтропия на выходе канала связи; $H(B/A)$ – условная энтропия, определяющая «ненадежность» канала или потери информации при воздействии помех.

Для оценки условной энтропии воспользуемся формулой, полученной в [12]:

$$\begin{aligned} H(B/A) = & -P_s(0)[P(0/0)\log_2 P(0/0) + \\ & + P(1/0)\log_2 P(1/0) + P(-/0) \times \\ & \times \log_2 P(-/0)] - P_s(1)[P(0/1)\log_2 P(0/1) + \\ & + P(1/1)\log_2 P(1/1) + P(-/1)\log_2 P(-/1)], \quad (2) \end{aligned}$$

где $P(0/0)$ и $P(0/1)$ – вероятности регистрации на выходе канала связи символа «0» при нали-

чии на его входе символов «0» и «1» соответственно; $P(1/0)$ и $P(1/1)$ – вероятности регистрации на выходе канала связи символа «1» при наличии на его входе символов «0» и «1» соответственно; $P(-/0)$ и $P(-/1)$ – вероятности стирания символа «0» и символа «1» соответственно, определяемые как вероятности отсутствия символов на выходе канала связи, в то время как на его входе был сформирован символ «0» и символ «1».

Энтропия на выходе канала связи запишется в виде [13, 14]:

$$H(B) = -P'_s(0) \log_2 P'_s(0) - P'_s(1) \log_2 P'_s(1) - P'_s(-) \log_2 P'_s(-). \quad (2)$$

Входящие в формулу (3) вероятности $P'_s(0)$, $P'_s(1)$ и $P'_s(-)$ равны соответственно:

$$P'_s(0) = P_s(0)P(0/0) + P_s(1)P(0/1), \quad (3)$$

$$P'_s(1) = P_s(0)P(1/0) + P_s(1)P(1/1), \quad (4)$$

$$P'_s(-) = P_s(0)P(-/0) + P_s(1)P(-/1). \quad (5)$$

Путем подстановки выражений (4)–(6) в формулу (3) получим:

$$H(B) = -[P_s(0)P(0/0) + P_s(1)P(0/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(0/0) + P_s(1)P(0/1)] - [P_s(0)P(1/0) + P_s(1)P(1/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(1/0) + P_s(1)P(1/1)] - [P_s(0)P(-/0) + P_s(1)P(-/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(-/0) + P_s(1)P(-/1)]. \quad (7)$$

Полученные выражения (2) и (7) подставим в формулу (1), тогда

$$C = \left\{ -[P_s(0)P(0/0) + P_s(1)P(0/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(0/0) + P_s(1)P(0/1)] - [P_s(0)P(1/0) + P_s(1)P(1/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(1/0) + P_s(1)P(1/1)] - [P_s(0)P(-/0) + P_s(1)P(-/1)] \times \log_2 [P_s(0)P(-/0) + P_s(1)P(-/1)] + P_s(0)[P(0/0) \log_2 P(0/0) + P(1/0) \times \log_2 P(1/0) + P(-/0) \log_2 P(-/0)] + P_s(1)[P(0/1) \log_2 P(0/1) + P(1/1) \times \log_2 P(1/1) + P(-/1) \log_2 P(-/1)] \right\} / \tau_b. \quad (8)$$

Переходные вероятности $P(0/0)$, $P(-/0)$, $P(1/0)$, $P(0/1)$, $P(-/1)$ и $P(1/1)$ равны [11]:

$$P(0/0) = \sum_{N=N_1}^{N_2} \left\{ \frac{[(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]^N}{N!} \times \exp[-(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)] \right\}, \quad (9)$$

$$P(-/0) = \sum_{N=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{[(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)]^N}{N!} \times \exp[-(n_t + n_{s0})(\Delta t - \tau_d)] \right\}, \quad (10)$$

$$P(1/0) = 1 - P(0/0) - P(-/0), \quad (11)$$

$$P(0/1) = \sum_{N=N_1}^{N_2} \left\{ \frac{[(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]^N}{N!} \times \exp[-(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)] \right\}, \quad (12)$$

$$P(-/1) = \sum_{N=0}^{N_1-1} \left\{ \frac{[(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)]^N}{N!} \times \exp[-(n_t + n_{s1})(\Delta t - \tau_d)] \right\}, \quad (13)$$

$$P(1/1) = 1 - P(0/1) - P(-/1), \quad (14)$$

где n_t – средняя скорость счета темновых импульсов на выходе счетчика фотонов; n_{s0} и n_{s1} – средние скорости счета сигнальных импульсов на выходе счетчика фотонов при передаче символов «0» и «1» соответственно; τ_d – средняя длительность мертвого времени продлевающегося типа.

Отметим, что для оценки мертвого времени продлевающегося типа используют среднее значение, так как его длительность зависит от интенсивности оптического излучения [6].

Темновые и сигнальные импульсы – это импульсы, которые появляются на выходе счетчика фотонов соответственно в отсутствии оптического сигнала и в результате воздействия фотонов регистрируемого излучения [6, 7].

Таким образом, рассчитать максимальную скорость передачи информации (пропускную способность) канала связи, содержащего в качестве приемного модуля счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа, можно путем подстановки в (8) соответствующих выражений (9)–(14) при заданных пороговых уровнях регистрации N_1 и N_2 , скоростях счета импульсов n_t , n_{s0} и n_{s1} и длительностях Δt и τ_d с учетом того, что скорость передачи информации достигает своего максимального значения C_{\max} при $P_s(0) = P_s(1) = 0,5$ [13, 14].

По результатам выполненного математического моделирования рассматриваемого канала связи получены зависимости пропускной способности канала связи от средней скорости счета

сигнальных импульсов n_{s0} для различной средней длительности мертвого времени продлевающегося типа, приведенные на рис. 1.

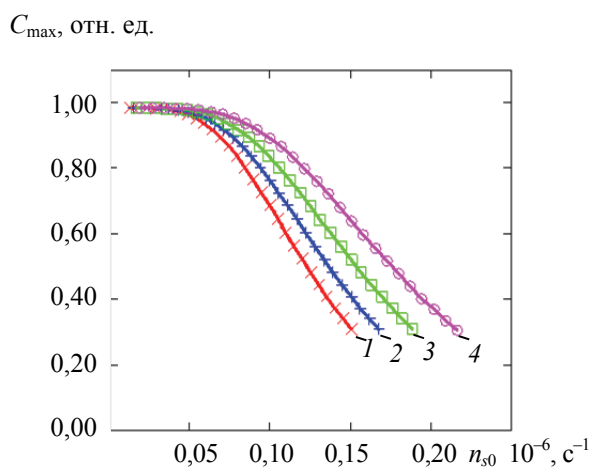


Рис. 1. Зависимость пропускной способности канала связи от средней скорости счета сигнальных импульсов n_{s0} :
 $N_1 = 1, N_2 = 7, n_t = 10^3 \text{ c}^{-1}, \tau_b = 100 \text{ мкс}$,
 средняя длительность мертвого времени:
 1 – $\tau_d = 0$; 2 – $\tau_d = 5 \text{ мкс}$;
 3 – $\tau_d = 10 \text{ мкс}$; 4 – $\tau_d = 15 \text{ мкс}$

Все графики нормированы на величину $1 / \tau_b$. Зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ построены в диапазонах средних скоростей счета сигнальных импульсов, на которых переходные вероятности $P(0 / 0) \geq 0,5$ при заданных средних длительностях мертвого времени продлевающегося типа. Это обусловлено тем, что для рассматриваемого канала связи при $P(0 / 0) < 0,5$ использование счетчиков фотонов для регистрации данных становится нецелесообразным. Оценка переходных вероятностей $P(0 / 0)$ выполнялась по методике [15]. Для сравнения полученных зависимостей $C_{\max}(n_{s0})$ величины средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s1} фиксировались постоянными и выбирались следующим образом. Вначале определялись диапазоны средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s1} , на которых переходные вероятности $P(1 / 1) \geq 0,5$ при заданных средних длительностях мертвого времени продлевающегося типа, по аналогии с выбором диапазона значений n_{s0} . Затем из каждого полученного диапазона выбиралось оптимальное значение n_{s1} . При этом критерием оптимальности являлось наименьшее значение n_{s1} , при котором переходная вероятность $P(0 / 1)$ минимальна. Такой выбор скорости счета сигнальных импульсов n_{s1} позволяет обеспечить наибольшие значения пропускной способности рассматриваемого канала связи. Расчет проводился для одинаковых значений нижнего и верхнего пороговых уровней регистрации $N_1 = 1$ и $N_2 = 7$, средней скорости

счета темновых импульсов $n_t = 10^3 \text{ c}^{-1}$ и среднего времени передачи одного бита (символа) $\tau_b = 100 \text{ мкс}$. Необходимо также отметить, что пороговые уровни регистрации можно выбирать и другими, отличными от 1 и 7, но при сравнении зависимостей $C_{\max}(n_{s0})$ для различных средних длительностей мертвого времени следует фиксировать N_1 и N_2 постоянными, как и среднее значение скорости счета темновых импульсов n_t и среднее время передачи одного бита (символа) τ_b . При этом важно учитывать, что для рассматриваемого канала связи τ_d не может превышать Δt , которое, в свою очередь, должно быть меньше средней длительности передачи одного бита (символа) τ_b на величину защитного временного интервала; в противном случае использование счетчиков фотонов для регистрации данных становится нецелесообразным [16]. Отметим, что при других значениях N_1, N_2 и отношениях $\tau_d / \Delta t, n_t / n_{s0}$ и n_t / n_{s1} проявление эффекта мертвого времени продлевающегося типа аналогично представленному на рис. 1.

Из полученных результатов видно, что для всех исследуемых значений τ_d с увеличением средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s0} зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ вначале практически не изменяются и близки к 1,0 отн. ед., однако затем спадают. Причем с увеличением средней длительности мертвого времени продлевающегося типа этот спад наблюдается при больших значениях n_{s0} . Так, например, зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ начинают уменьшаться соответственно при $n_{s0} \geq 66,6 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ для $\tau_d = 0$; при $n_{s0} \geq 74,1 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ для $\tau_d = 5 \text{ мкс}$; при $n_{s0} \geq 83,5 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ для $\tau_d = 10 \text{ мкс}$; при $n_{s0} \geq 95,6 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ для $\tau_d = 15 \text{ мкс}$.

Указанные особенности поведения зависимостей $C_{\max}(n_{s0})$ объясняются характером изменения переходных вероятностей $P(0 / 0), P(1 / 0)$ и $P(- / 0)$ с изменением средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s0} , что иллюстрируется рис. 2.

Для всех исследуемых диапазонов средних скоростей счета сигнальных импульсов на выходе счетчика фотонов при передаче символов «0» с увеличением n_{s0} переходная вероятность $P(0 / 0)$ растет, достигая наибольшего значения, после чего спадает; вероятность $P(- / 0)$ уменьшается от своего наибольшего значения до значения, близкого к нулю, переходя в насыщение, а вероятность $P(1 / 0)$, напротив, из насыщения, близкого к нулю, начинает расти вплоть до максимума (см. рис. 2).

Указанные особенности изменения переходных вероятностей $P(0 / 0), P(1 / 0)$ и $P(- / 0)$ с увеличением n_{s0} имеют место, как при наличии мертвого времени продлевающегося типа, так и при его отсутствии, и происходят благо-

даря сдвигу максимумов статистических распределений смеси числа темновых и сигнальных импульсов на выходе счетчика фотонов при регистрации символов «0» $P_{st0}(N)$ [12]. При малых значениях n_{s0} этот максимум близок к $N = 0$, поэтому вероятность того, что на выходе канала связи не будет зарегистрировано ни символа «0», ни символа «1», в то время как на входе канала связи был сформирован символ «0» $P(- / 0)$, достаточно большая (см. рис. 2, кривые $1''-4''$), а переходная вероятность $P(1 / 0) \approx 0$ (см. рис. 2, кривые $1'-4'$). Следовательно, переходная вероятность $P(0 / 0)$ не достигает своего наибольшего значения (см. формулу (11)).

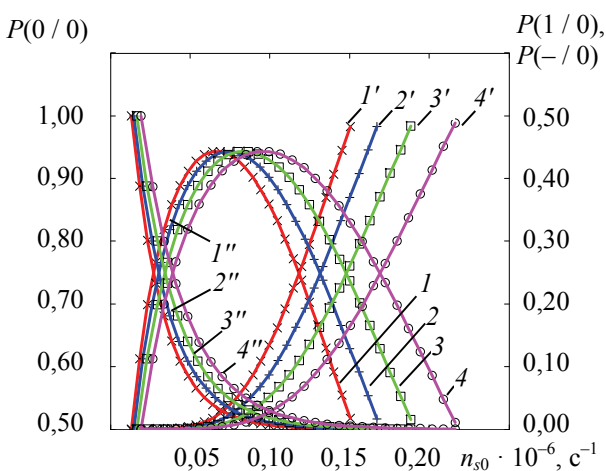


Рис. 2. Зависимости переходных вероятностей $P(0 / 0)$ (кривые 1–4), $P(1 / 0)$ (кривые 1'–4') и $P(- / 0)$ (кривые 1''–4'') от средней скорости счета сигнальных импульсов n_{s0} :

$N_1 = 1, N_2 = 7, n_t = 10^3 \text{ c}^{-1}, \tau_b = 100 \text{ мкс}$,
 средняя длительность мертвого времени:
 1 – $\tau_d = 0$; 2 – $\tau_d = 5 \text{ мкс}$; 3 – $\tau_d = 10 \text{ мкс}$; 4 – $\tau_d = 15 \text{ мкс}$

Однако с увеличением n_{s0} происходит сдвиг максимумов статистических распределений $P_{st0}(N)$ в сторону больших значений N , следовательно, повышается вероятность регистрации на выходе счетчика фотонов импульсов в количестве N_1-N_2 . Это способствует уменьшению переходной вероятности $P(- / 0)$ и росту переходной вероятности $P(0 / 0)$ вплоть до ее максимума. При этом вероятность регистрации на выходе счетчика фотонов импульсов в количестве, превышающем верхний пороговый уровень регистрации N_2 , остается весьма малой, поэтому переходная вероятность $P(1 / 0) \approx 0$ (см. рис. 2).

При дальнейшем увеличении средней скорости счета сигнальных импульсов n_{s0} максимумы статистических распределений $P_{st0}(N)$ продолжают сдвигаться в сторону еще больших значений N . Это приводит к увеличению вероятности того, что на выходе счетчика фотонов

будет зарегистрировано импульсов в количестве, превышающем верхний пороговый уровень регистрации N_2 , поэтому переходная вероятность $P(- / 0)$ продолжает уменьшаться и, достигая значения, близкого к нулю, переходит в насыщение (см. рис. 2, кривые $1''-4''$). Вместе с тем переходная вероятность $P(1 / 0)$ начинает расти вплоть до своего наибольшего значения (см. рис. 2, кривые $1'-4'$). В свою очередь, это приводит к уменьшению переходной вероятности $P(0 / 0)$, как следует из формулы (11) и иллюстрируется рис. 2 (см. кривые 1–4).

Следует отметить, что в диапазоне n_{s0} , на котором зависимости $P(0 / 0)$ от n_{s0} растут, увеличение средней длительности мертвого времени продлевающегося типа при прочих равных параметрах приема приводит к уменьшению переходной вероятности $P(0 / 0)$ и к росту переходной вероятности $P(- / 0)$. Это объясняется тем, что при увеличении τ_d максимумы статистических распределений $P_{st0}(N)$ сдвигаются в сторону меньших значений N , как показано в работе [12]. В результате такого смещения повышается вероятность регистрации на выходе счетчика фотонов импульсов в количестве, меньшем, чем N_1 , поэтому $P(0 / 0)$ уменьшается, а $P(- / 0)$, напротив, растет. Так, например, при $n_{s0} = 52,8 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ переходные вероятности $P(0 / 0)$ и $P(- / 0)$ равны соответственно $92,56 \cdot 10^{-2}$ и $6,79 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 0$; $90,77 \cdot 10^{-2}$ и $8,88 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 5 \text{ мкс}$; $88,20 \cdot 10^{-2}$ и $11,63 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 10 \text{ мкс}$; $84,71 \cdot 10^{-2}$ и $15,21 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 15 \text{ мкс}$.

Из рис. 2 также видно, что в диапазоне n_{s0} , на котором зависимости $P(0 / 0)$ от n_{s0} спадают, увеличение средней длительности мертвого времени продлевающегося типа при прочих равных параметрах приема приводит к уменьшению переходных вероятностей $P(1 / 0)$ и к росту переходных вероятностей $P(0 / 0)$. Объясняется это тем, что в таком диапазоне значений n_{s0} максимумы $P_{st0}(N)$ располагаются в области достаточно больших значений N , поэтому весьма высока вероятность того, что на выходе счетчика фотонов будет зарегистрировано импульсов в количестве, превышающем верхний пороговый уровень регистрации N_2 . При прочих равных параметрах приема эта вероятность уменьшается с ростом τ_d за счет смещения максимумов статистических распределений $P_{st0}(N)$ в область меньших значений N [12]. В свою очередь, при этом повышается вероятность регистрации на выходе счетчика фотонов импульсов в количестве N_1-N_2 , поэтому увеличивается переходная вероятность $P(0 / 0)$ и, вместе с тем, уменьшается переходная вероятность $P(1 / 0)$. В результате, например, при $n_{s0} = 132,8 \cdot 10^3 \text{ c}^{-1}$ переходные вероятности $P(0 / 0)$ и $P(1 / 0)$ равны

соответственно $64,36 \cdot 10^{-2}$ и $35,52 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 0$; $73,87 \cdot 10^{-2}$ и $25,89 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 5$ мкс; $82,26 \cdot 10^{-2}$ и $17,26 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 10$ мкс; $88,83 \cdot 10^{-2}$ и $10,24 \cdot 10^{-2}$ для $\tau_d = 15$ мкс.

В результате в диапазоне n_{s0} , на котором $P(1 / 0) \approx 0$, зависимость $C_{\max}(n_{s0})$ практически неизменна и близка к единице (см. рис. 1 и 2) за счет того, что достоверность принятых данных также близка к единице [15, 17]. В диапазоне n_{s0} , на котором с увеличением n_{s0} переходная вероятность $P(0 / 0)$ уменьшается, а переходная вероятность $P(1 / 0)$ растет, спад зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ объясняется уменьшением достоверности принятых данных за счет роста потерь информации.

Как отмечалось ранее, с увеличением средней длительности мертвого времени продлевающегося типа спад зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ наблюдается при больших значениях n_{s0} . Это обусловлено следующим. При прочих равных параметрах приема наименьшая вероятность ошибочной регистрации символов «0» $P_{\text{ош0}} = 1 - P(0 / 0) = P(1 / 0) + P(- / 0)$ с увеличением τ_d достигается при больших значениях средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s0} , что достаточно подробно объясняется в работе [12]. Отметим, что, согласно [12], наименьшие значения $P_{\text{ош0}} = 0,06$ достигаются соответственно при $n_{s0} = 66,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 0$; при $n_{s0} = 74,1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 5$ мкс; при $n_{s0} = 83,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 10$ мкс; при $n_{s0} = 95,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 15$ мкс. Этим же значениям средних скоростей счета сигнальных импульсов при передаче символов «0» для исследуемых τ_d соответствуют n_{s0} , при превышении которых зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ начинают уменьшаться, как отмечалось выше.

Также из рис. 1 видно, что в диапазонах средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s0} , на которых зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ уменьшаются, рост средней длительности мертвого времени продлевающегося типа при прочих равных параметрах приводит к увеличению пропускной способности канала связи. Так, например, при $n_{s0} = 91,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ пропускная способность канала связи C_{\max} равна 0,75 отн. ед. для $\tau_d = 0$; 0,81 отн. ед. для $\tau_d = 5$ мкс; 0,87 отн. ед. для $\tau_d = 10$ мкс; 0,92 отн. ед. для $\tau_d = 15$ мкс. Это обусловлено тем, что при увеличении τ_d максимумы статистических распределений $P_{s|0}(N)$ сдвигаются в сторону меньших значений N , как отмечалось выше. В результате такого смещения в указанном диапазоне значений n_{s0} увеличение средней длительности мертвого времени продлевающегося типа при прочих равных параметрах приводит к уменьшению переходной вероятности $P(1 / 0)$ и к росту переходной вероятности $P(0 / 0)$. При этом повышается досто-

верность принятых данных и уменьшаются потери информации [12, 15, 17], что, в свою очередь, увеличивает пропускную способность канала связи.

Заключение. Построена математическая модель асинхронного канала однофотонной связи, в котором в качестве приемного модуля использовался счетчик фотонов с мертвым временем продлевающегося типа.

По результатам математического моделирования установлено, что с увеличением средней скорости счета сигнальных импульсов при передаче символов «0» n_{s0} пропускная способность канала связи C_{\max} вначале практически не изменяется, однако затем спадает. Причем при прочих равных параметрах с увеличением средней длительности мертвого времени продлевающегося типа этот спад наблюдается при больших значениях n_{s0} : при $n_{s0} = 66,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 0$; при $n_{s0} = 74,1 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 5$ мкс; при $n_{s0} = 83,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 10$ мкс; при $n_{s0} = 95,6 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ для $\tau_d = 15$ мкс.

Получено, что в диапазонах средних скоростей счета сигнальных импульсов n_{s0} , на которых зависимости $C_{\max}(n_{s0})$ уменьшаются, рост средней длительности мертвого времени продлевающегося типа при прочих равных параметрах приводит к увеличению пропускной способности канала связи. Так, например, при $n_{s0} = 91,5 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ пропускная способность канала связи C_{\max} равна 0,75 отн. ед. для $\tau_d = 0$; 0,81 отн. ед. для $\tau_d = 5$ мкс; 0,87 отн. ед. для $\tau_d = 10$ мкс; 0,92 отн. ед. для $\tau_d = 15$ мкс.

Результаты, полученные в настоящей работе, могут быть использованы при создании высокоскоростных систем квантово-криптографической асинхронной связи, содержащих в качестве приемных модулей счетчики фотонов с мертвым временем продлевающегося типа.

Автору настоящей работы видятся весьма важными исследования теоретического характера по оценке влияния средней скорости счета сигнальных импульсов на выходе счетчика фотонов при передаче символов «1» на пропускную способность канала связи. Не менее актуальными также являются и экспериментальные исследования, направленные на обоснование выбора лавинного фотоприемника, используемого при построении счетчика фотонов. Эти фотоприемники могут отличаться как по структуре полупроводниковых областей, так и по площади фоточувствительной поверхности. В этой связи особый интерес представляет определение того, как эти параметры влияют на пропускную способность рассматриваемого канала связи, что также планируется выполнить в ходе дальнейших комплексных исследований.

Литература

1. Лапонина О. Р. Основы сетевой безопасности: криптографические алгоритмы и протоколы взаимодействия. М.: НОУ «Интуит», 2016. 244 с.
2. Бабаш А. В., Шангин Г. П. Криптография. М.: СОЛОН-ПРЕСС, 2007. 512 с.
3. Килин С. Я. Квантовая криптография: идеи и практика / под ред. С. Я. Килина, Д. Б. Хорошко, А. П. Низовцева. Минск: Белорус. наука, 2007. 391 с.
4. Калачев А. А. Элементная база дальнедействующей квантовой связи. Часть 1 // Фотоника. 2017. № 1. С. 88–98. DOI: 10.22184/1993-7296.2017.61.1.88.98.
5. Румянцев К. Е., Пленкин А. П. Эффективность синхронизации системы квантового распределения ключа на однофотонных лавинных фотодиодах // Известия ЮФУ. Технические науки. 2016. № 9. С. 4–15. DOI: 10.18522/2311-3103-2016-9-415.
6. Гулаков И. Р., Зеневич А. О. Фотоприемники квантовых систем: монография. Минск: УО ВГКС, 2012. 276 с.
7. Тимофеев А. М. Устройство для передачи и приема двоичных данных по волоконно-оптическому каналу связи // Приборы и методы измерений. 2018. Т. 9, № 1. С. 17–27. DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-17-27.
8. Тимофеев А. М. Достоверность принятой информации при ее регистрации в однофотонном канале связи при помощи счетчика фотонов // Информатика. 2019. Т. 16, № 2. С. 90–98.
9. Reduced deadtime and higher rate photon-counting detection using a multiplexed detector array / S. A. Castelletto [et al.] // Journal of Modern Optics. 2007. Vol. 54. P. 337–352. DOI: 10.1080/09500340600779579.
10. Single-photon detectors combining high efficiency, high detection rates, and ultra-high timing resolution / I. E. Zadeh [et al.] // APL Photonics. 2017. Vol. 2. P. 111301-1–111301-7. DOI: 10.1063/1.5000001.
11. Тимофеев А. М. Энтропия потерь однофотонного асинхронного волоконно-оптического канала связи с приемником на основе счетчика фотонов с продлевающимся мертвым временем // Актуальные проблемы науки XXI века. 2018. Вып. 7. С. 5–10.
12. Тимофеев А. М. Оценка влияния продлевающегося мертвого времени счетчика фотонов на вероятность ошибочной регистрации данных квантово-криптографических каналов связи // Вестник связи. 2018. № 1. С. 56–62.
13. Ключев Л. Л. Теория электрической связи. Минск: Техноперспектива, 2008. 423 с.
14. Биккенин Р. Р., Чесноков М. Н. Теория электрической связи. М.: Издат. центр «Академия», 2010. 336 с.
15. Тимофеев А. М. Методика повышения достоверности принятых данных счетчика фотонов на основе анализа скорости счета импульсов при передаче двоичных символов «0» // Приборы и методы измерений. 2019. Т. 10, № 1. С. 80–89. DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-1-80-89.
16. Тимофеев А. М. Влияние времени однофотонной передачи информации на вероятность ошибочной регистрации данных асинхронных квантово-криптографических каналов связи // Вестник ТГТУ. 2019. Т. 25, № 1. С. 36–46. DOI: 10.17277/vestnik.2019.01.pp.036-046.
17. Тимофеев А. М. Влияние времени однофотонной передачи информации на достоверность ее приема в квантово-криптографическом канале связи // Системный анализ и прикладная информатика. 2019. № 1. С. 67–72. DOI: 10.21122/2309-4923-2019-1-67-72.

References

1. Laponina O. R. *Osnovy setevoy bezopasnosti: kriptograficheskiye algoritmy i protokoly vzaimodeystviya* [Basics of network security: cryptographic algorithms and interaction protocols]. Moscow, NOU «Intuit» Publ., 2016. 244 p.
2. Babash A. V., Shangin G. P. *Kriptografiya* [Cryptography]. Moscow, SOLON-PRESS Publ., 2007. 512 p.
3. Kilin S. Ya. *Kvantovaya kriptografiya: idei i praktika* [Quantum cryptography: ideas and practices]. Minsk, Belarus. nauka Publ., 2007. 391 p.
4. Kalachev A. A. Components of long-distance quantum communication. Part 1. *Fotonika* [Photonics], 2017, no. 1, pp. 88–98. DOI: 10.22184/1993-7296.2017.61.1.88.98.
5. Rumyantsev K. E., Plenkin A. P. The effectiveness of synchronization of quantum key distribution system at the single-photon avalanche photodiodes. *Izvestiya YuFU. Tekhnicheskiye nauki* [Izvestiya SFedU. Engineering Sciences], 2016, no. 9, pp. 4–15. DOI: 10.18522/2311-3103-2016-9-415.
6. Gulakov I. R., Zenevich A. O. *Fotopriemniki kvantovykh sistem: monografiya* [Photodetectors of quantum systems: monograph]. Minsk, UO VGKS Publ., 2012. 276 p.

7. Timofeev A. M. Device for binary data transmitting and receiving over a fiber-optic communication channel. *Pribory i metody izmereniy* [Devices and methods of measurements], 2018, vol. 9, no. 1, pp. 17–27. DOI: 10.21122/2220-9506-2018-9-1-17-27.
8. Timofeev A. M. The reliability of the received information if it is registered in the single photon communication channel using the photon counter. *Informatika* [Informatics], 2019, vol. 16, no. 2, pp. 90–98 (In Russian).
9. Castelletto S. A., Degiovanni I. P., Schettini V., Migdall A. L. Reduced deadtime and higher rate photon-counting detection using a multiplexed detector array. *Journal of Modern Optics*, 2007, vol. 54, pp. 337–352. DOI: 10.1080/09500340600779579.
10. Zadeh I. E., Los J. W., Gourgues R. B., Steinmetz V., Bulgarini G., Dobrovolskiy S. M., Zwiller V., Dorenbos S. N. Single-photon detectors combining high efficiency, high detection rates, and ultra-high timing resolution. *APL Photonics*, 2017, vol. 2, pp. 111301-1–111301-7. DOI: 10.1063/1.5000001.
11. Timofeev A. M. Entropy of losses of a single-photon asynchronous fiber-optic communication channel with a receiver based on a photon counter with prolonged dead time. *Aktual'nyye problemy nauki XXI veka* [Current issues of science in the 21st century], 2018, issue 7, pp. 5–10 (In Russian).
12. Timofeev A. M. Estimation of the photons counter lasting dead time influence on the probability of erroneous data registration of quantum-cryptographic communication channels. *Vestnik svyazi* [Communication bulletin], 2018, no. 1, pp. 56–62 (In Russian).
13. Klyuev L. L. *Teoriya elektricheskoy svyazi* [The theory of electrical communication]. Minsk, Tekhnoperspektiva Publ., 2008. 423 p.
14. Bikkenin R. R., Chesnokov M. N. *Teoriya elektricheskoy svyazi* [The theory of electrical communication]. Moscow, Izdatel'skiy tsentr «Akademiya» Publ., 2010. 336 p.
15. Timofeev A. M. Methods of increasing the reliability of the received data of the photon counter based on the analysis of the pulse counting rate during the transmission of binary symbols «0». *Pribory i metody izmereniy* [Devices and methods of measurements], 2019, vol. 10, no. 1, pp. 80–89. DOI: 10.21122/2220-9506-2019-10-1-80-89.
16. Timofeev A. M. The effect of single photon transmission time on the probability of erroneous registration of asynchronous data of quantum cryptographic communication channels. *Vestnik TGTU* Bulletin of TSTU, 2019, vol. 25, no. 1, pp. 36–46. DOI: 10.17277/vestnik.2019.01.pp.036-046.
17. Timofeev A. M. The influence of the time of single photon transmission of information on the reliability of its reception in a quantum cryptographic communication channel. *Sistemnyy analiz i prikladnaya informatika* [System analysis and applied information science], 2019, no. 1, pp. 67–72. DOI: 10.21122/2309-4923-2019-1-67-72.

Информация об авторе

Тимофеев Александр Михайлович – кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры защиты информации. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220013, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: tamvks@mail.ru

Information about the author

Timofeev Alexander Mikhaylovich – PhD (Engineering), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Security. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220013, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: tamvks@mail.ru

Поступила 22.03.2019

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ

УДК 512.8:681

Ю. О. Герман¹, О. В. Герман¹, И. Н. Богатко²

¹Белорусский государственный технологический университет

²Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОБУЧЕНИЯ НА ОСНОВЕ КЛАСТЕРНОГО ПОДХОДА

Представлен способ моделирования управляющей реакции «электронного» учителя на основе техники кластеризации с использованием дискриминаторной функции. Рассматривается система обучения, где роль преподавателя выполняет компьютерная программа. Поведенческая модель задается как множество таблиц. В каждой таблице описывается одна реакция; столбцы таблицы соответствуют переменным состояниям системы, причем последний столбец определяет реакцию в данной ситуации с нечеткой мерой, характеризующей, например, ее релевантность (соответствие ситуации). Для каждого типа реакции используется отдельная таблица. Например, такими реакциями могут быть: «усложнить пример», «поднять эмоциональный фон», «опросить любого ученика», «дать дополнительное объяснение» и т. п. В колонке «управляющая реакция» каждой таблицы записываем число от 0 до 1 (крайние значения: не выдавать реакцию (0) и выдать реакцию (1)). Итак, в каждой таблице имеется, по сути, два кластера, условно назовем их 0-кластер и 1-кластер. Выбор реакции зависит от того, к какому кластеру следует отнести данный набор текущих переменных системы. При этом мы допускаем выдачу нескольких реакций одновременно при условии, что они не исключают друг друга. Описанная таким образом задача относится к задаче нечеткой классификации. Мы излагаем оригинальный метод ее решения, специфика которого состоит в достаточно простом математическом аппарате и наличии множества обучающих таблиц.

Ключевые слова: электронное обучение, кластер, кратчайшее расстояние, нечеткое распознавание.

Yu. O. German¹, O. V. German¹, I. N. Bogatko²

¹Belarusian State Technological University

²Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics

MODELLING OF THE PROCESS OF LEARNING ON THE BASIS OF CLUSTERIZATION APPROACH

An approach to model a control reaction of an “electronic” teacher on the basis of clusterization technique with an application of the discriminator function is presented in the paper. The training system is considered, where the role of a teacher is performed by a computer program. The behavioral model is defined as a set of tables. Each table is used to define one reaction and contains the columns standing for the system state variables, and the last column determines the reaction in this situation with a fuzzy measure, which characterizes, for example, its relevance (the situation corresponds). As the examples of reactions there may be the following ones: “make an example more complex”, “raise the emotional level”, “ask any student a question”, “give additional explanations”, etc. The reaction level is represented with a value from 0 to 1 with boundary levels: 0 – do not produce a reaction and 1 – make a reaction. Thus, in each table there are, in fact, two clusters, conventionally called 0-cluster and 1-cluster. The final solution depends on the cluster selected from each table. We admit a possibility to select more than one reaction simultaneously, provided that selected reactions are not mutually exclusive. The problem formulated in this way represents a kind of a fuzzy clusterization. We present an original method of its solution taking into account a number of training behavioral tables.

Key words: electronic learning, cluster, the shortest distance, fuzzy recognition.

Введение. В статье излагается техника принятия управленческих решений, использующая множество обучающих таблиц. Каждая таблица

описывает один тип реакции как нечеткую переменную. Для всех таблиц определено множество условий взаимоисключения, так что в конечном

итоге допускается одновременно выдача нескольких реакций, но при условии их совместности. Данная статья развивает подход к моделированию обучения, описанный в работах [1–4], внося в него новые представления и теоретические решения. Подход можно использовать не только для моделирования обучения, но и для применения в других сферах: электронном менеджменте, управлении беспилотными транспортными средствами, электронной медицине и др. В основе описываемого подхода лежит использование поведенческих таблиц (по сути, обучающих таблиц, таблиц решений [5]). Поведенческая таблица содержит столбцы, соответствующие переменным состояниям системы. Значениями в столбцах являются соответствующие значения переменных состояния. Последний столбец определяет управляющую реакцию на данное состояние. Поскольку управляющих реакций может быть несколько, то число поведенческих таблиц в общем случае превосходит одну. Рассматриваемая в статье задача состоит в выборе управляющей реакции (реакций) на текущую наблюдаемую ситуацию. Имеет место следующая специфика задачи. Во-первых, поведенческая таблица не должна быть противоречивой, т. е. для одного и того же состояния не может быть реализовано две и более взаимоисключающих реакций. Однако допускается, что из нескольких поведенческих таблиц производится выбор нескольких различных реакций, некоторые из которых образуют несовместные пары. Таким образом, дополнительным нюансом в общей задаче является финальная выборка окончательного множества реакций с учетом условий их совместности. Эта задача в действительности является хорошо разработанной задачей булевого программирования с алгоритмом решения, предложенным Э. Балашем [6]. Во-вторых, каждая переменная состояний должна иметь (нечеткое) значение в каждой строке таблицы. При этих ограничениях специфика задачи далее состоит в указании для управляющей реакции нечеткой меры релевантности. Значение этой меры выставляется человеком-экспертом, хорошо владеющим предметной проблематикой. В связи с реализацией рассматриваемого подхода отдельно стоит проблема формирования системных переменных (критериев). Этот вопрос представляет вполне самостоятельную и нередко сложную задачу. Для ее решения следует определить критерии, значения которых используются в качестве системных переменных, а также способы оценки критериев. Например, как оценить критерий «аудитория воспринимает материал безразлично»? Ясно, что оценку степени безразличия можно составить только из визуального наблюдения за аудиторией, т. е. за каждым учеником

в отдельности. Признаком безразличия будет отсутствие взгляда на экран, где демонстрируется учебный материал. Таким образом, нужно уметь оценивать направление зрачков, а это предполагает распознавание лиц и глаз обучаемых при сканировании аудитории камерой наблюдения. Разумеется, вопросы оценки критериев специфичны для каждого приложения и требуют самостоятельного изучения.

Основная часть. Пусть дана поведенческая таблица, описывающая реакцию «поднять эмоциональный фон» (табл. 1).

Таблица 1

Поднять эмоциональный фон – y_1

№ п/п	x_1 (активность)	x_2 (однообразие)	y_1
1	1,0	0,3	0,1
2	0,6	0,4	0,7
3	0,6	0,8	0,2
4	0,5	0,3	0,7
5	0,7	0,5	0,1
6	0,8	0,8	0,4
7	0,3	0,7	0,9

Интерпретация этой таблицы достаточно очевидна: чем меньше активности со стороны обучаемых и чем больше монотонность (однообразие) материала, тем больше необходимость в поднятии эмоционального фона. Это можно сделать, например, демонстрацией ролика или проигрыванием аудиофайла с интересной содержательной историей по теме изложения.

Предположим далее, что текущая ситуация характеризуется следующим набором значений переменных состояния: $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,3$. Каково значение y_1 ? Рассмотрим технику получения ответа на основе кластеризационного подхода [7]. Для построения кластеров будем привлекать дискриминаторные функции [8]. В простейшем случае дискриминаторная функция является линейной. Отыскание коэффициентов линейной модели можно реализовать путем решения системы линейных алгебраических неравенств, составленных по данным обучающей таблицы. В случае невозможности получения линейного представления можно использовать обучение нейронной сети [9] или механизм нелинейной регрессии [10]. Вопрос построения математической модели по эмпирической таблице может решаться с разных позиций [11]. Мы опускаем его, имея в виду технический характер этого вопроса. У нас имеется два кластера: $y_1 = 0$ (истинный кластер) и $y_1 = 1$ (ложный кластер). В 1-кластере не предусмотрено управляющее воздействие, связанное с поднятием эмоционального

фона. В 0-кластере, напротив, следует некоторым образом поднять эмоциональный фон. Табл. 1 нужно перестроить так, чтобы были представлены оба кластера. Это сделать несложно, если иметь в виду, что отрицание нечеткой меры принадлежности дает нечеткую меру принадлежности к дополнительному кластеру:

$$\mu(x) = 1 - \mu(\sim x),$$

где знак \sim означает операцию отрицания. Получаем следующую табл. 2.

Таблица 2

Указание кластеров

№ п/п	x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1	Кластер
1	1,0	0,3	0,1	Истина
2	1,0	0,3	0,9	Ложь
3	0,6	0,4	0,7	Истина
4	0,6	0,4	0,3	Ложь
5	0,6	0,8	0,2	Истина
6	0,6	0,8	0,8	Ложь
7	0,5	0,3	0,7	Истина
8	0,5	0,3	0,3	Ложь
9	0,7	0,5	0,1	Истина
10	0,7	0,5	0,9	Ложь
11	0,8	0,8	0,4	Истина
12	0,8	0,8	0,6	Ложь
13	0,3	0,7	0,9	Истина
14	0,3	0,7	0,1	Ложь

Первая строка табл. 2 означает, что если активность $x_1 = 1,0$ (высокая) и однообразие $x_2 = 0,3$ (низкое), то имеем 1-кластер, в котором релевантность операции «поднять эмоциональный фон» низка ($y_1 = 0,1$).

№ п/п	x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1	Кластер
1	1,0	0,3	0,1	Истина

Вторая строка читается иначе: «если активность $x_1 = 1,0$ (высокая) и однообразие $x_2 = 0,3$ (низкое), то имеем 0-кластер, в котором релевантность операции «поднять эмоциональный фон» высока ($y_1 = 0,9$)».

№ п/п	x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1	Кластер
2	1,0	0,3	0,9	Ложь

Для табл. 2 определяем линейную дискриминаторную функцию, отделяющую один кластер от другого:

$$F = 0,98 - x_1 + 0,9x_2 - 1,5y_1. \quad (1)$$

В рассматриваемом примере мы использовали Excel и надстройку «Поиск решения» для

составления и решения системы линейных неравенств для определения коэффициентов дискриминаторной функции. Заметим попутно, что отыскиваемое решение будет тем точнее соответствовать задаче исследования, чем полнее представлена поведенческая таблица (т. е. чем больше ситуаций она «схватывает»). Считаем нужным также обратить внимание на возможность использования техники планирования эксперимента для определения числа состояний и их значений в каждой поведенческой таблице.

Если значение дискриминаторной функции на данном наборе значений переменных состояния больше 0, то имеем кластер «Истина», в противном случае – кластер «Ложь». Для входного набора $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,3$ нам не известно значение нечеткой меры y_1 . Будем опираться на подход, использованный в работе [12], который здесь мы существенно упрощаем. Пограничное значение y_1 легко отыскать из уравнения

$$F = 0 = 0,98 - 0,4 + 0,9 \cdot 0,3 - 1,5y_1. \quad (2)$$

Отсюда находим: $y_1 = 0,56$. Итак, кластер «Истина» имеет граничную меру $y_1 = 0,56$. Получаем для кластера «Ложь» $\sim y_1 = 0,44 < 0,56$ и, следовательно, повышаем эмоциональный уровень аудитории. Пусть входные значения таковы: $x_1 = 0,8$; $x_2 = 0,0$. Тогда $y_1 = 0,12$. Вопрос о повышении уровня эмоциональности изложения решается в этом случае отрицательно.

Теперь остается рассмотреть вопрос о взаимном исключении управляющих решений.

Отношения взаимоисключения управленческих решений передаются системой логических уравнений. Для простоты изложения рассмотрим следующую систему управленческих решений:

- y_1 = «повысить эмоциональный фон»;
- y_2 = «усложнить тест»;
- y_3 = «дать дополнительное объяснение»;
- y_4 = «рассмотреть новый пример».

Будем считать, что несовместимы следующие пары управленческих решений: (y_1, y_2) , (y_1, y_3) , (y_1, y_4) , (y_2, y_3) , (y_2, y_4) .

Далее допустим, что определены меры истинности управленческих решений: $\mu(y_1) = 0,6$, $\mu(y_2) = 0,8$, $\mu(y_3) = 0,4$, $\mu(y_4) = 0,7$.

Сформулируем задачу оптимизации в следующем формальном виде:

$$\sum z_i \mu(y_i) \rightarrow \max,$$

$$z_i + z_j \leq 1, \text{ если решения } y_i \text{ и } y_j \text{ несовместимы;}$$

$$z_k \in \{0, 1\},$$

$$\mu(y_k) \geq 0,5.$$

В нашем случае имеем:

$$0,6z_1 + 0,8z_2 + 0,7z_4 \rightarrow \max, \quad (3)$$

$$z_1 + z_2 \leq 1, \quad z_1 + z_4 \leq 1, \quad z_2 + z_4 \leq 1.$$

Данную задачу можно решить методом Э. Балаша. Решение в нашем случае тривиально: $y_2 = 1$, т. е. нужно выбрать управление y_2 , а остальные управления игнорировать.

Указанный подход можно обобщить на некоторые варианты задачи. Рассмотрим вариант, когда в некоторых ситуациях один или более критериев не имеют значения для выбора управляющей реакции. Например, рассмотрим такую ситуацию:

x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1
1,0	*	0,1

Здесь символ «*» означает «безразличное» значение критерия «однообразиие». Данный вариант можно естественным образом привести к ранее полученному, если ввести в рассмотрение различные дискретные значения критерия «однообразиие». В результате можно получить такое представление:

x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1
1,0	0,0	0,1
1,0	0,1	0,1
1,0	0,2	0,1
...
1,0	1,0	0,1

Минус этого варианта замены заключается в увеличении размерности поведенческой таблицы за счет дополнительных строк, число которых определяется принимаемой точностью. Некоторого эффекта можно достичь перекодировкой значений критериев. Так, неопределенное значение «*» можно кодировать вектором $\langle 0,5, 0,5 \rangle$. Нечеткое значение μ кодируем как $\langle \mu, 1,0 \rangle$. Четкое значение кодируем как вектор $\langle \mu, 0,0 \rangle$. Как интересную возможность отметим, что вектор $\langle \mu, \alpha \rangle$ можно трактовать следующим образом: «критерий имеет нечеткое значение μ со степенью уверенности α ». Так, табл. 3 с исходными данными перепишем как табл. 4.

Таблица 3

Неопределенные значения

x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1
1,0	*	0,1
0,6	0,4	0,7
0,6	0,8	0,2
*	0,3	0,7

Таблица 4

Неопределенные значения заменены векторами

x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1
1,0	1,0	0,5
0,6	1,0	0,5
0,6	1,0	0,4
0,6	1,0	0,8
0,5	0,5	0,3
0,5	1,0	0,7

Последний вариант удваивает число столбцов, но взамен дает дополнительные функциональные возможности. Развивая описываемый подход, можно ввести многозначные меры вместо нечетких оценок. В частности, закодируем нечеткие значения 0, 0,1, 0,2, ..., 0,9, 1,0 векторами $\langle 0, 0, 0, 0 \rangle$, $\langle 0, 0, 0, 1 \rangle$, $\langle 0, 0, 1, 0 \rangle$, ..., $\langle 1, 0, 1, 0 \rangle$, выделив для неопределенного значения «*», например, $\langle 1, 0, 1, 1 \rangle$. Теперь каждый двоичный разряд вектора соответствует отдельному столбцу поведенческой таблицы.

Идею, аналогичную рассмотренным выше, можно использовать при наличии противоречивых строк поведенческой таблицы. Приведем такую иллюстрацию:

x_1 (активность)	x_2 (однообразиие)	y_1
1,0	0,0	0,1
1,0	0,0	0,9

Здесь реакция y_1 для одних и тех же значений критериев различна. Теоретически обработать подобную ситуацию можно в том случае, если известны вероятности (или субъективные отношения предпочтения, определяемые экспертами). Тогда значение вероятности нужно выделить в качестве отдельного столбца, как мы делали с нечеткой мерой. Ясно, что для четких ситуаций значение вероятности равно 1,0.

Рассмотрим теперь оценку сложности вычислений при принятии решений. Вычислительная сложность изложенного метода достаточно низка, если не принимать во внимание решение задачи булевого программирования методом Э. Балаша. Действительно, дело сводится к отысканию корня единственного линейного уравнения. Что касается метода Балаша, то следует иметь в виду ограниченное число управляющих воздействий для многих практических задач рассматриваемого класса. Кроме того, можно ограничиться какой-либо эвристической процедурой. Так, задача (3) по форме близка к задаче упаковки в контейнер (в нашем случае число контейнеров равно 3). В ослабленном варианте получим классическую задачу об упаковке в контейнер, сложив все неравенства в (3):

$$0,6z_1 + 0,8z_2 + 0,7z_4 \rightarrow \max, \\ 2z_1 + 2z_2 + 2z_4 \leq 3. \quad (4)$$

Решение отыскивается так: в первую очередь включаем в решение ту переменную z_i , которая имеет максимальное значение отношения коэффициентов a_i / b_i , где a_i – коэффициент при z_i в целевой функции, b_i – коэффициент при этой же переменной в ограничении. В примере (4) выбираем переменную z_2 ($z_2 = 1$), после чего система переписывается следующим образом:

$$\begin{aligned} 0,6z_1 + 0,7z_4 &\rightarrow \max, \\ 2z_1 + 2z_4 &\leq 1. \end{aligned} \quad (5)$$

Система (5) имеет единственное решение $z_1 = 0, z_4 = 0$.

Решение задачи (5) об упаковке в контейнер [13] на основе эвристического подхода характеризуется вычислительной сложностью $O(n^2)$, где n – число переменных задачи оптимизации, определяемое одним-двумя десятками, так что решение можно искать полным перебором. Как следствие, общая эффективность предлагаемого подхода зависит не столько от размерности, сколько от качества информации в обучающих поведенческих таблицах.

Заключение. Вычислительная сложность изложенного метода, очевидно, полиномиальна, если не брать во внимание решение задачи булевого программирования методом Э. Балаша (проблематика вычислительной сложности описана в [14]). Отыскание корня линейного алгебраического уравнения требует линейных временных затрат. Что касается метода Балаша,

который, как известно, в общем случае обладает экспоненциальной временной сложностью, но ввиду ограниченного числа управляющих воздействий для многих практических задач рассматриваемого класса его реализация даже в случае полного перебора вариантов не отразится на оперативности принимаемых решений. Действительно, число управляющих переменных определяется одним-двумя десятками, так что решение можно искать полным перебором. Как следствие, общая эффективность изложенного подхода является достаточно высокой при создании системы мониторинга учебного процесса и зависит в первую очередь от принимаемых управляющих решений. Последнее обстоятельство определяется способом выбора и оценки системных критериев, устанавливаемых экспертами. В связи с высокими темпами цифровизации и интеллектуализации различных сфер деятельности, описанный в статье подход может быть использован в интерактивных обучающих системах уже в достаточно близкой перспективе [15, 16].

Литература

1. Гури́н Н. И., Герман О. В., Герман Ю. О. Технология разработки компьютерных обучающих систем с функциями виртуального преподавателя // Труды БГТУ. 2011. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 146–150.
2. Герман Ю. О. Формализованная модель виртуального учителя // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 1. С. 69–74.
3. German Ju. O. Decision making in contradictory knowledge base // Information technologies and systems (ITS 2013): materials of the International conference / BSUIR. Minsk, October 2013. P. 258–259.
4. Герман Ю. О., Гури́н Н. И., Герман О. В. Задача коррекции поведения системы взаимодействующих автоматов // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 161–165.
5. Хамби Э. Программирование таблиц решений. М.: Мир, 1976. 86 с.
6. Балаш Э. Аддитивный алгоритм для решения задач линейного программирования с переменными, принимающими значения 0 или 1 // Кибернетический сборник. Новая серия. 1969. Вып. 6. С. 217–258.
7. Мандель И. Д. Кластерный анализ. М.: Финансы и статистика, 1988. 176 с.
8. Rencher A. Methods of multivariate analyses // Willey&Sons. 2002. P. 727.
9. Горбань А. Н. Обучение нейронных сетей. М.: Параграф, 1990. 160 с.
10. Демиденко Е. З. Линейная и нелинейная регрессия. М.: Финансы и статистика, 1981. 302 с.
11. Мышкис А. Д. Элементы теории математических моделей. М.: Наука, 1994. 192 с.
12. Боброва Н. Л., Герман О. В. Психофизиологические показатели организма человека в процессе физического, спортивного совершенствования в экстремальных условиях. Минск: Бестпринт, 2015. 122 с.
13. Martello S., Toth P. Knapsack problems. Algorithms and computer implementations // Willey&Sons. 1990. P. 306.
14. Calude C. Theories of computational complexity // Elsevier North-Holland. 1988. P. 488.
15. Chiong R. Intelligent systems for automated learning and adaptation // USA. IGI Global. 2010. P. 340.
16. Intelligent Learning Technologies: Applications of Artificial Intelligence to Contemporary and Emerging Educational Challenges / V. Chaudhry [et al.] // AI Magazine. 2013. Vol. 34. P. 10–12.

References

1. Gurin N. I., German O. V., German Yu. O. A technology of the computer learning programs development with virtual teacher functions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2011, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 146–150 (In Russian).

2. German Yu. O. A formalized model of virtual teacher. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 1, pp. 69–74 (In Russian).
3. German Ju. O. Decision making in contradictory knowledge base. *Materials of the International conference "Information technologies and systems (ITS 2013)"*. Minsk, 2013, pp. 258–259.
4. German Yu. O., Gurin N. I., German O. V. A problem of the interacting automata behavior correction. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 161–165 (In Russian).
5. Khambi E. *Programmirovaniye tablits resheniy* [Solution tables programming]. Moscow, Mir Publ., 1976. 86 p.
6. Balash E. An additive algorithm to solve a linear programming problem with 0,1-variables. *Kiberneticheskiy sbornik. Novaya seriya* [Cybernetic collection], 1969, issue 6, pp. 217–258 (In Russian).
7. Mandel I. D. *Klasternyy analiz* [Cluster analysis]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1988. 176 p.
8. Rencher A. Methods of multivariate analyses. *Willey&Sons*, 2002, p. 727.
9. Gorban A. N. *Obucheniye neyronnykh setey* [Neural sets learning]. Moscow, Paragraf Publ., 1990. 160 p.
10. Demidenko E. Z. *Lineynaya i nelineynaya regressiya* [Linear and non-linear regression]. Moscow, Finansy i statistika Publ., 1981. 302 p.
11. Myshkis A. D. *Elementy teorii matematicheskikh modeley* [Elements of the theory of mathematical models]. Moscow, Nauka Publ., 1994. 192 p.
12. Bobrova N. L., German O. V. *Psikhofiziologicheskiye pokazateli organizma cheloveka v protsesse fizicheskogo, sportivnogo sovershenstvovaniya v ekstremal'nykh usloviyakh* [Psycho-physiological characteristics of a man in athletic development under extreme conditions]. Minsk, BestPrint Publ., 2015. 122 p.
13. Martello S., Toth P. Knapsack problems. Algorithms and computer implementations. *Willey&Sons*, 1990, p. 306.
14. Calude C. Theories of computational complexity. *Elsevier North-Holland*, 1988, p. 488.
15. Chiong R. Intelligent systems for automated learning and adaptation. *USA. IGI Global*, 2010, p. 340.
16. Chaudhry V., Chad Lane H., Gunning D., Roschelle J. Intelligent Learning Technologies: Applications of Artificial Intelligence to Contemporary and Emerging Educational Challenges. *AI Magazine*, 2013, vol. 34, pp. 10–12.

Информация об авторах

Герман Юлия Олеговна – кандидат технических наук, старший преподаватель кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: juliagerman@tut.by

Герман Олег Витольдович – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: ovgerman@tut.by

Богатко Иван Николаевич – аспирант. Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники (220600, г. Минск, ул. П. Бровки, 6, Республика Беларусь). E-mail: inbogatko@gmail.com

Information about the authors

German Yuliya Olegovna – PhD (Engineering), Senior Lecturer, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: juliagerman@tut.by

German Oleg Vitol'dovich – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: ovgerman@tut.by

Bogatko Ivan Nikolaevich – PhD student. Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics (6, P. Brovki str., 220600, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: inbogatko@gmail.com

Поступила 25.03.2019

ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ

УДК 004.738.1:004.738.5

В. С. Хворост, Н. П. Шутько

Белорусский государственный технологический университет

ВЕБ-САЙТ КАК ИНСТРУМЕНТ ПРОДВИЖЕНИЯ КОМПАНИИ В СЕТИ ИНТЕРНЕТ (НА ПРИМЕРЕ РАЗРАБОТКИ ПРОТОТИПА САЙТА ДЛЯ СТУДИИ ДИЗАЙНА ИНТЕРЬЕРА)

Статья посвящена описанию процесса разработки прототипа веб-сайта для студии дизайна интерьера в соответствии с задачами студии. На основе исходных данных были выделены общие задачи разрабатываемого веб-сайта. В статье приведены основные показатели эффективности веб-сайта, которые позволят студии дизайна интерьера оценить продуктивность разработанного веб-сайта. В рамках исследования целевая аудитория была разбита на группы, каждая из которых, в свою очередь, имеет уровни взаимодействия с веб-сайтом. Кроме того, были сформулированы специализированные задачи сайта. Разработанный авторами прототип сайта для студии дизайна интерьера основывается на результатах исследования целевой аудитории и продуманных общих и специализированных задачах веб-сайта. Каждый элемент прототипа решает определенные проблемы представителей целевой аудитории, находящихся на различном уровне взаимодействия с веб-сайтом. Информация в размещаемых разделах была структурирована таким образом, чтобы она была легка для понимания тем, кто находится на этапе оценки альтернатив, но в то же время несла пользу человеку, решившему заказать проект.

Ключевые слова: веб-сайт, пользовательский опыт, прототип, целевая аудитория.

V. S. Hovorost, N. P. Shut'ko

Belarusian State Technological University

WEBSITE AS A TOOL OF COMPANY PROMOTION IN THE INTERNET (ON THE EXAMPLE OF A PROTOTYPE SITE OF AN INTERIOR DESIGN STUDIO)

This article is devoted to the description of the development process of a prototype site of an interior design studio. The development is carried out in accordance with the objectives of the company. After the analysis of the theoretical basis, the type of the site has been determined: the site is a place of communication with its users. The main tasks of the website have been identified on the basis of the data received from the company. The interior design studio can evaluate the effectiveness of the website using performance indicators that have also been identified. After conducting audience research, the target audience of the design studio was divided into groups, each of which has a level of interaction with the website. Specialized tasks of the website have been developed based on the main needs of the target audience of the website. The prototype of the website developed by the authors is based on the results of the analysis of the target audience and thought-out general and specialized tasks of the website. Each element of the prototype solves certain problems of representatives from the target audience at different levels of interaction with the website. The information in the sections is structured in such a way that it is clear to beginners, but at the same time is beneficial to a potential client.

Key words: website, user experience, prototype, target audience.

Введение. Одной из основных тенденций современного рынка является увеличение количества веб-сайтов компаний различной направленности: начиная от сайтов-визиток и заканчивая производственными предприятиями. Каждый бизнес, не представленный в интернете, теряет огромное количество клиентов, партнеров и сотрудников. Это объясняется тем, что интернет на данный момент является медиаресурсом,

превосходящим по популярности и удобству средства массовой информации. Таким образом, веб-сайт является инструментом бизнеса по достижению целей.

Веб-сайт как средство продвижения бизнеса выполняет ряд важнейших функций: обеспечение актуальной информацией пользователей на постоянной основе, привлечение новых клиентов, простой способ коммуникации с клиентами,

формирование имиджа компании. Таким образом, сайт является инструментом влияния на пользователей. Для того чтобы наиболее эффективно построить взаимодействие, в первую очередь необходимо определиться с основной функцией сайта: сайт как продукт и сайт как место коммуникации. Веб-сайт как продукт – это аналог продукта компании, программного обеспечения или услуги. Сайт как место коммуникации – это пространство для общения с пользователями с целью убедить их в важности и пользе вашего продукта. Далее, зная предназначение веб-сайта, формулируются его общие цели для бизнеса, проводятся исследования целевой аудитории и на основе полученных данных реализуется прототип веб-сайта.

Основная часть. Важнейшей функцией веб-сайта для студии дизайна интерьера является коммуникация с пользователями посредством предоставления актуальной информации о студии и ее проектах, ответов на самые распространенные вопросы и размещения отзывов клиентов студии. Студия дизайна интерьера, для которой проектируется веб-сайт в рамках выполнения данного исследования, имеет несколько инструментов для коммуникации с потенциальными клиентами:

- 1) веб-сайт;
- 2) поисковая оптимизация;
- 3) контекстная реклама;
- 4) инстаграм-аккаунт.

Таким образом, сайт выступает в качестве инструмента для решения задач компании. Определение задач для сайта является первой и самой важной ступенью в разработке веб-сайта для любой компании. Это, в первую очередь, объясняется тем, что при наличии задач владелец бизнеса может оценить, соответствует ли разработанный сайт задачам бизнеса. В силу того, что сайт – это инструмент для компании по достижению задач, то цель сайта как таковую мы выделить не можем. Цель есть у бизнес-проекта, включающего не только сайт как основу, но и остальные каналы продвижения, например, поисковую оптимизацию.

Совместно с руководством студии дизайна интерьера были сформулированы следующие задачи для веб-сайта:

- преобразовать 5% органических посетителей (пришедших из поисковой системы) веб-сайта в потенциальных клиентов путем получения их почты или номера телефона;
- сформировать на сайте положительную коммуникацию с пользователями разного уровня;
- разработать системы точек соприкосновения с посетителями за счет логически структурированного контента;
- увеличить количество положительных отзывов от клиентов компании и уменьшить количество жалоб;

– сократить количество жалоб на сторонних сайтах.

Рассмотрим пути решения описанных выше задач. Для достижения 5%-ной конверсии необходимо помимо размещения блоков «Получить консультацию» еще использовать и такие, которые будут предоставлять какую-либо полезную информацию для посетителя, например, «Гид по стилям интерьера» или тест для определения стиля интерьера, подходящего пользователю.

Для формирования положительной коммуникации с пользователем следует продумать опыт взаимодействия с сайтом каждого представителя целевой аудитории и с помощью правильной организации структуры разработать простой и понятный интерфейс, т. е. юзабилити сайт. Юзабилити – удобство использования [1].

Контент на веб-сайте должен выполнять определенную функцию, поэтому для формирования системы точек соприкосновения с посетителем необходимо сформировать требования к содержанию. Требования формируются на основе целевой аудитории и ее потребностей, для выяснения которых проводятся исследования [2].

Вопрос отзывов касается не только веб-сайта, но работы персонала студии, поэтому выполнение этой задачи будет косвенным. Веб-сайт может сформировать систему быстрого реагирования на жалобу, например, с помощью добавления раздела «Тема обращения», в котором пользователь выберет: отзыв, жалоба, предложение. Таким образом, работа с негативом в компании будет проводиться быстрее.

Последняя задача веб-сайта также является косвенной. В первую очередь, она зависит от организации рабочего процесса в студии. Например, после завершения проекта представитель компании может попросить об обратной связи и дать ссылку на сайт компании, таким образом уменьшится показатель негативных отзывов на сторонних сайтах. Однако система отзывов на сайте должна быть максимально прозрачной и удобной для того, чтобы пользователи оставляли отзыв именно там.

Указанные выше задачи были сформулированы для того, чтобы компания могла оценить эффективность веб-сайта, проанализировав, на каком уровне находится выполнение той или иной задачи. Ввиду того, что этот процесс не всегда является простым, были введены показатели эффективности веб-сайта:

1) конверсия K – отношение количества посетителей, оставивших свои контактные данные, к общему числу посетителей веб-сайта:

$$K \equiv \frac{\text{sum_tar}}{\text{sum_all}} 100\%,$$

где sum_tar – это количество посетителей, совершивших целевое действие (например, прошедших

тест, оставивших свои данные); sum_all – все посетители сайта за определенный период;

2) время использования веб-сайта t ;

3) количество отзывов на сайте am ;

4) соотношение положительных отзывов (am_p) к отрицательным:

$$K_am \equiv \frac{am_p}{am} 100\%;$$

5) число посетителей, возвратившихся на веб-сайт студии am_r .

Показатели эффективности могут быть рассчитаны после публикации сайта в сети интернет, однако их определение влияет на процесс разработки веб-сайта.

После определения задач веб-сайта, путей их достижения и показателей его эффективности было сформулировано назначение веб-сайта. Веб-сайт студии дизайна интерьера, над которым ведется работа в рамках данного исследования, предназначен для эффективной двусторонней коммуникации с целевой аудиторией, представители которой могут находиться на различных этапах взаимоотношений с компанией.

Из назначения веб-сайта следует выделение групп целевой аудитории [3]. Основываясь на данных, полученных от студии дизайна интерьера, были выделены следующие группы целевой аудитории, которые приведены в таблице.

Рассмотрим каждую группу подробнее.

Первая группа – женщины от 30 до 60 лет, в основном замужем, которым необходим ремонт квартиры в данный момент или он планируется в ближайшем будущем. Образование – среднее специальное или высшее. Уровень дохода – выше среднего. Профессия не имеет значения. Национальность – русские, белорусы, украинцы, однако не исключены и другие национальности. Проживают в Республике Беларусь. Ввиду того, что представители данной группы проводят большое количество времени дома, в кругу семьи, очень ответственно относятся к дизайну интерьера в каждой комнате и гармоничному сочетанию всех элементов. Их основными

требованиями являются квалифицированность персонала компании, взаимопонимание с дизайнером, который будет работать над их жильем, разработка интерьера в современном стиле и в соответствии со вкусами заказчика, при этом, чтобы жилье оставалось уютным, а также учет образа жизни заказчицы и ее семьи при планировании помещения. Мотиваторами данной группы являются оптимальное использование пространства и технологичность решений.

Ко второй группе относятся молодые пары в возрасте от 25 до 40 лет, как женатые, так и нет, по профессии программисты. Зарубочный заработок высокий, образование различное: от базового до высшего. Преимущественно жители Беларуси, России и Украины.

Этой группе необходим полноценный дизайн-проект их квартиры в новостройке с ремонтом под ключ и, чаще всего, с авторским надзором. Как правило, представители группы планируют детей, поэтому одним из критериев является ориентированность дизайнера на семью. Однако бывают холостые представители, которые приобрели квартиру-студию. Планировка такого жилья ориентирована на его развлечения, хобби и комфортный отдых.

Ключевыми ценностями являются наличие у дизайнера проектов, совпадающих с их интересами и вкусами, так как заказчики не обладают достаточным свободным временем для долгого принятия решения. Дизайн-проект должен быть современным и молодежным. Мотиваторами являются наличие у студии достаточного опыта, а также минимальное включение в проект заказчика и экономия его времени.

Необходимо отметить, что представитель любой из аудиторий может находиться на следующих стадиях:

- новичок, пришедший решить конкретный вопрос и находящийся на этапе оценки вариантов;
- потенциальный клиент, находящийся на стадии принятия решения;
- клиент, воспользовавшийся услугами компании.

Целевая аудитория студии дизайна интерьера

Параметры	Группа 1	Группа 2
Пол	Женский	Мужской
Возраст	30–60 лет	25–40 лет
Состав семьи	Замужем, есть дети	Не женаты, женаты, без детей
Образование	Высшее, среднее специальное	Высшее, среднее специальное
Профессия, род деятельности	Домохозяйки в данный момент, успешные в своей профессии женщины	Программисты, тестировщики, веб-дизайнеры и другие ИТ-специалисты
Доход в месяц	Семейный доход более 2000 долл. США	Семейный доход 2000–3000 долл. США
Страна	Беларусь, Россия, Украина	Беларусь, Россия, Украина

Для качественного проектирования взаимодействия пользователей с веб-сайтом на основе выделенных выше профилей пользователей были разработаны персонажи. Персонажи – это не реальные люди, но они представляют реальных людей в процессе проектирования. Будучи воображаемыми, они, тем не менее, определяют достаточно жестко и точно [4].

Первый персонаж – Кристина Милайковская, 43 года, замужем, есть двое детей. Является финансовым директором в логистической компании. Кристина с мужем купили квартиру и планируют начать ремонт через полгода. Находится на стадии анализа студий дизайна интерьера и поиска понравившегося дизайна.

Сценарий использования веб-сайта: Кристина заходит на сайт и видит раздел с работами компании. Выбирает работу студии по разработке дизайн-проекта квартиры. Читает описание и смотрит качественные фото дизайн-проекта. Чтобы посмотреть еще работы, возвращается на главную страницу и выбирает другой дизайн-проект. После изучения проектов компании женщина остается довольной и стилистикой работ, и идеями организации пространства. Теперь ей важно узнать ценовую политику компании. На главной странице она находит калькулятор расчета стоимости по их требованиям и метражу помещения.

Второй персонаж – Марат Бернадский, 26 лет, не женат, живет с котом породы золотая шиншилла в двухкомнатной квартире в Минске. Работает техническим директором в филиале американской ИТ-компании в Минске, имеет доход выше среднего. Марат купил квартиру-студию и находится в поиске студии дизайна интерьера, которая возьмет на себя все заботы по дизайну и ремонту. Марат уже знаком со студией, так как она занималась дизайн-проектом для его коллег.

Сценарий использования веб-сайта: Марат зашел на главную страницу веб-сайта и увидел калькулятор, в котором можно было выбрать все, что ему нужно. Он выбрал пункты «Дизайн-проект», «Ремонт по проекту» и «Авторский надзор», затем выбрал «Квартира» и ввел площадь, нажал кнопку «Рассчитать». Появился раздел со стоимостью работы студии, и Марат решил не откладывать и заказать проект по текущей стоимости.

Третий персонаж – Дмитрий Михальниченко, 34 года, женат, детей нет. Дмитрий работает в ИТ-компании Бреста, они с женой хотели сделать ремонт в квартире, так как необходимо, чтобы он подходил для проживания семьи с детьми. Студия дизайна интерьера предоставляла им услуги по созданию дизайн-проекта и проведению ремонта без авторского надзора. Дмитрий зашел на сайт, чтобы оставить отзыв о совместной работе.

Сценарий использования веб-сайта: Дмитрий сотрудничал с компанией в течение года, работа ему понравилась, и он зашел оставить свой отзыв. На главной странице он выбрал пункт меню «Отзывы» и перешел к нужному разделу. После выбора кнопки «Оставить отзыв» Дмитрий заполнил все поля и нажал кнопку «Отправить». Затем появилось сообщение о том, что отзыв появится на веб-сайте в течение получаса.

После разработки сценария использования веб-сайта целевой аудиторией можно сформулировать требования к нему. Требования к продукту делятся на функциональные (то, что система позволяет сделать, желаемая функциональность) и нефункциональные (требования к оборудованию, операционной системе и т. п.). Для формализации функциональных требований применяются диаграммы вариантов использования.

На основе потребностей описанной выше целевой аудитории была составлена диаграмма вариантов использования сайта (рис. 1).

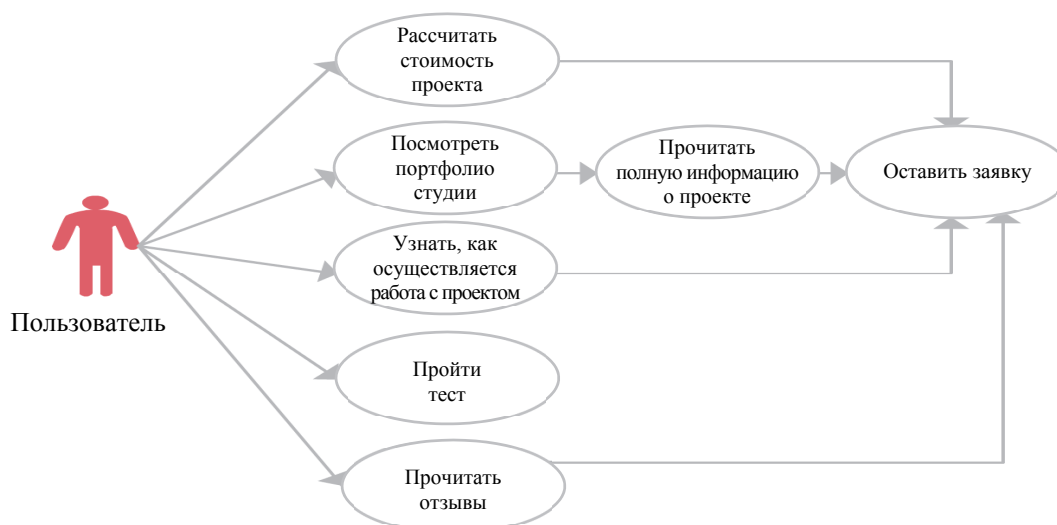


Рис. 1. Диаграмма вариантов использования сайта

Основываясь на определении целевой аудитории, задачах пользователей, общих задачах веб-сайта и диаграмме вариантов использования, был разработан прототип. Опишем более детально реализацию каждого из разделов веб-сайта.

Раздел «Калькулятор» (рис. 2) помогает как новичкам, так и потенциальным клиентам ознакомиться с ценовой политикой компании, а также с основными услугами, влияющими на итоговую стоимость.

Рис. 2. Прототип раздела «Калькулятор»

Данный раздел формирует положительную коммуникацию с клиентами. Также он содержит акционное предложение, помогающее потенциальным клиентам быстрее принять решение о покупке. В данном разделе предусмотрены следующие варианты: дизайн-проект, техно-проект (включает только планировку, без визуализаций интерьера), авторский надзор (что способствует привлечению клиентов из второй целевой группы), а также возможность выбора типа помещения (является дополнительным критерием разделения аудитории). По итогу расчета клиенту предлагается заказать разработку по этой стоимости путем нажатия на кнопку «Хочу проект за эту цену».

Раздел «Экосистема» (рис. 3) представляет главную идею студии дизайна интерьера: создание не просто красивого дизайн-проекта, а разработка экосистемы жизни клиента посредством дизайна. Дизайнер при разработке проекта будет учитывать такие моменты, как режим дня клиента, спорт, сон, гигиена, работа, хобби, отдых.

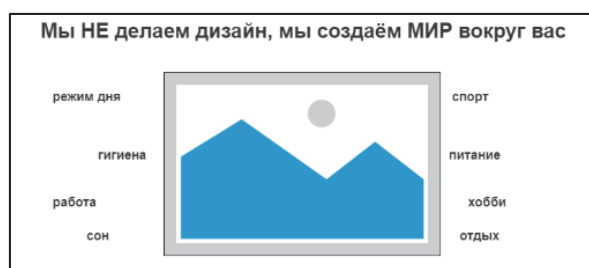


Рис. 3. Прототип раздела «Экосистема»

Раздел «Шаги работы» (рис. 4) содержит информацию о процессе работы со студией. Такая информация будет полезна как посетителям, находящимся на стадии новичок, так и потенциальным клиентам, потому что они смогут оценить процесс работы и сравнить с тем, что предлагают другие студии, а также понять, подходит ли им такая организация работы. Информация разбита на этапы, что улучшает восприятие. Кроме того, каждый из этапов имеет кнопку «Получить консультацию», если у клиента возникают вопросы. К тому же кнопка способствует достижению задачи сайта по получению контактных данных клиентов.

Как будет создаваться экосистема Вашей жизни через дизайн?			
8 простых шагов			
1 консультация Вы оставляете заявку на сайте. Менеджер в течение 5 минут связывается с Вами для ответа на любые Ваши вопросы. консультация	2 обсуждение и замеры Встречаемся на объекте для проведения замеров, заполнения анкеты и подписания договора	3 разработка и корректировка планировок Дизайнеры делают планировки с расстановкой мебели, учитывая образ жизни Вас и Вашей семьи. Корректируем планировки после обсуждения с Вами.	4 разработка и редактирование визуализаций Создаем фотореалистичные изображения (3D визуализации). Редактируем 3D визуализации после обсуждения с Вами.
5 документация Готовим рабочую документацию для строителей (план розеток, план монтажа и т. д.)	6 ремонт и комплектация Ведём авторский надзор за строительством и комплектуюем объект (опционально)	7 подписание акта Вы подписываете акт приема объекта после проверки ремонта.	8 Ваш новый интерьер Вы наслаждаетесь удобным и красивым интерьером

Рис. 4. Прототип раздела «Шаги работы»

Раздел «Часто задаваемые вопросы» (рис. 5) также сегментирует аудиторию по проблемам, которые они пытаются решить с помощью веб-сайта студии. В списке вопросов есть как вопросы для новичка, так и вопросы, связанные с ценами и способами оплаты. Рядом с вопросами есть форма для уточнения имеющихся на сайте вопросов или для того, чтобы задать свой вопрос.

Рис. 5. Прототип раздела «Часто задаваемые вопросы»

Раздел «Тест» (рис. 6) был разработан таким образом, чтобы получить контактные данные пользователей. Он подходит как для новичков, которые находятся на стадии принятия решения, так и для потенциальных клиентов. В данном разделе предлагается пройти двухминутный

тест для определения стиля интерьера, который подходит посетителю, на основе выбора вариантов понравившихся дизайнов.

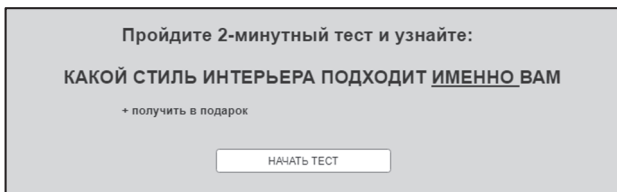


Рис. 6. Прототип раздела «Тест»

Раздел «Рекомендации» (рис. 7) помимо создания положительного образа компании предоставляет возможность пользователям оставить отзыв или жалобу на работу с компанией. В силу

многофункциональности раздела он решает задачи пользователей всех уровней.



Рис. 7. Прототип раздела «Рекомендации»

Раздел «Наши проекты» (рис. 8) сегментирует аудиторию, пришедшую на сайт.



Рис. 8. Прототип раздела «Наши проекты»

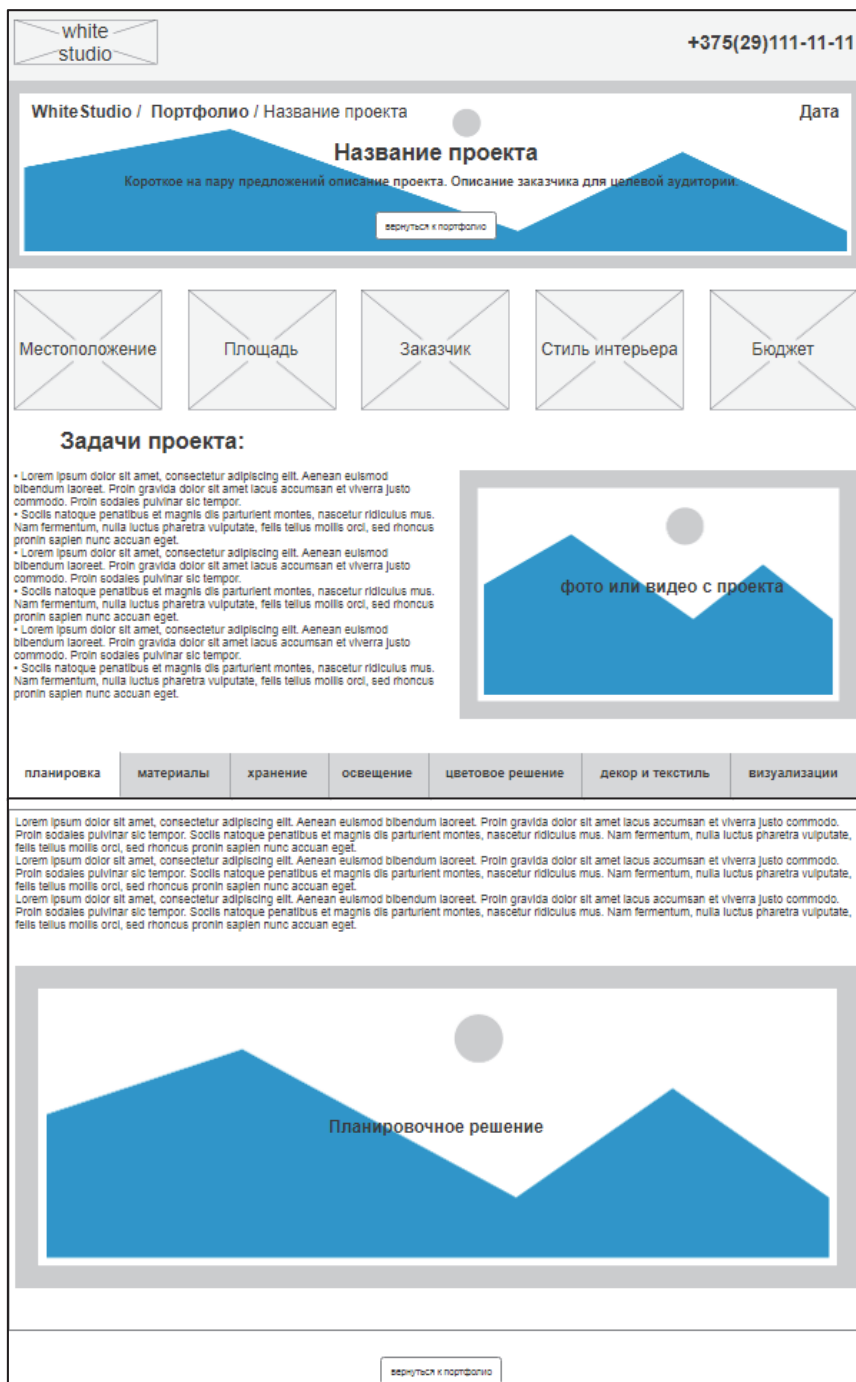


Рис. 9. Прототип страницы с проектом

Например, первой целевой группе будет интересно прочитать отзыв домохозяйки Риты, а второй – программиста Сергея, и каждой из групп оценить преимущества работы со студией в своей ситуации. Таким образом, клиент будет видеть не только преимущества работы со студией в его ситуации, но и разработанный проект. В этом же разделе есть кнопка «Больше проектов», при нажатии на которую пользователь получает доступ к галерее проектов компании, также сегментирующей выбор посетителей. Сегментация есть по полу, площади помещения,

а также по типу помещения. Таким образом, пользователь может более узко выбирать работы компании для просмотра.

Каждый проект, размещенный на сайте, имеет страницу, предоставляющую полную информацию о нем: местоположение, площадь помещения, заказчик, стиль интерьера, бюджет (рис. 9). Такой пункт, как заказчик, позволяет посетителю соотнести себя с приведенным примером. Стиль интерьера дает понимание пользователю о его вкусах. Бюджет предоставляет информацию не о стоимости проекта для заказчика, а о стоимости самого ремонта.

Таким образом, потенциальный клиент может анализировать интерьеры и понимать, подходят ли они ему не только по стилю, но и по бюджету. Посетитель может не только посмотреть визуализации интерьера, но и прочесть информацию о задачах, поставленных перед дизайнером, и посмотреть на решение этих задач. Описание дизайн-проекта для упрощения восприятия разбито на следующие категории: планировка, материалы, хранение, цветовое решение, освещение, декор и текстиль, визуализации.

Заключение. При разработке прототипа веб-сайта для студии дизайна интерьера была

выбрана стратегия, учитывающая назначение веб-сайта, сформулированы основные задачи веб-сайта, математически описаны показатели эффективности и потребности целевой аудитории, находящейся на различных этапах взаимодействия с веб-сайтом. Такой подход доказал свою эффективность. Кроме того, были определены группы целевой аудитории разрабатываемого веб-сайта, детально описаны персонажи. Разработанный прототип полностью соответствует требованиям к структурированию контента и функциональности веб-сайта, он в полной мере решает проблемы персонажей.

Литература

1. Уолтер А. Эмоциональный веб-дизайн. М.: Манн, Иванов и Фербер (МИФ), 2012. 120 с.
2. Гарретт Дж. Веб-дизайн: книга Джесса Гарретта. Элементы опыта взаимодействия. СПб.: Символ-Плюс, 2008. 192 с.
3. Унгер Р., Чендлер К. UX-дизайн. Практическое руководство по проектированию опыта взаимодействия. СПб.: Символ-Плюс, 2011. 336 с.
4. Брусенцова Т. П., Кишкурно Т. В. Дизайн и юзабилити интерфейсов пользователей. Минск: БГТУ, 2017. 76 с.

References

1. Uolter A. *Emotsional'nyy veb-dizayn* [Designing for Emotion]. Moscow, Mann, Ivanov i Ferber (MIF) Publ., 2012. 120 p.
2. Garrett Dzh. *Veb-dizayn: kniga Dzhessa Garretta. Elementy opyta vzaimodeystviya* [The Elements of User Experience: User-Centered Design for the Web and Beyond]. St. Petersburg, Simvol-Plyus Publ., 2008. 192 p.
3. Unger R., Chendler K. *UX-dizayn. Prakticheskoye rukovodstvo po proektirovaniyu opyta vzaimodeystviya* [A Project Guide to UX Design: for User Experience Designers in the Field or in the Making]. St. Petersburg, Simvol-Plyus Publ., 2011. 336 p.
4. Brusentsova T. P., Kishkurno T. V. *Dizayn i yuzabiliti interfeysov pol'zovateley* [Design and Usability of User Interfaces]. Minsk, BGTU Publ., 2017. 76 p.

Информация об авторах

Хворост Вероника Сергеевна – магистрант кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: nikakhvorost@gmail.com

Шутько Надежда Павловна – кандидат технических наук, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: NPCh@belstu.by

Information about the authors

Hvorost Veronika Sergeevna – Master's degree student, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: nikakhvorost@gmail.com

Shut'ko Nadezhda Pavlovna – PhD (Engineering), Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: NPCh@belstu.by

Поступила 14.05.2019

АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ

УДК 519.86

Н. Н. Буснюк

Белорусский государственный технологический университет

РАЗНОВИДНОСТИ ЗАДАЧИ СЕТЕВОГО ПЛАНИРОВАНИЯ, НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ И АЛГОРИТМИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ

В статье рассматривается обобщенная задача сетевого планирования и выделяются четыре ее подзадачи в зависимости от количества и качества трудовых ресурсов. Обобщенная задача предполагает наличие в графе-сети кратных дуг. От количества трудовых ресурсов зависит, смогут ли все работы выполняться без простоев и будет ли критический путь являться решением задачи. Качество трудовых ресурсов определяет переменные либо константные веса дуг сетевого графа.

В статье уделяется внимание одной из четырех подзадач. В ней возможны простои работ и длина критического пути не всегда будет являться решением. Это зависит от структуры графа и весов дуг. При этом предполагается, что сетевой граф содержит мультиребра. Сформулировано и обосновано утверждение о том, когда могут возникать простои работ в зависимости от структуры сетевого графа. Предложен метод назначения работников на работы, минимизирующий время простоя работ и минимально удлиняющий критический путь. Этот метод имеет прикладное значение для корректировки последовательности выполнения работ на проекте в тех случаях, когда менеджер принимает решения о перемещении работников или назначении их на критические работы. Также в статье даны некоторые оценки алгоритмической сложности для частных случаев задачи 2А.

Ключевые слова: сетевой график, критический путь, событие, резерв времени, переменные веса, задача сетевого планирования, простои, оптимизация, оценка сложности, алгоритм.

N. N. Busnyuk

Belarusian State Technological University

VARIETIES OF THE NETWORK PLANNING PROBLEM, SOME METHODS OF THEIR SOLUTION AND ALGORITHMIC ESTIMATES

The article discusses the generalized task of network planning, and outlines its four subtasks depending on the quantity and quality of labor resources. The generalized task assumes the presence of multiple arcs in the graph-network. It depends on the amount of labor resources whether all the work can be done without downtime, and whether the critical path will be the solution to the problem. The quality of labor resources determines the variables or constant weights of the arcs of the network graph.

This article focuses on one of four subtasks. In such task downtime is possible and the length of the critical path will not always be a solution to the problem. It depends on the graph structure and the arc weights. It is assumed that the network graph contains a multi-edges. A statement was formulated and substantiated when job idle times may occur depending on the network structure. A method for assigning workers to jobs that minimizes downtime and minimally extends the critical path is proposed. This method has practical significance for adjusting the sequence of execution of jobs on a project in those cases when the manager takes decisions about relocating employees or assigning them to critical jobs. The article also provides some estimates of algorithmic complexity for particular cases of problem 2A.

Key words: network chart, critical path, event, time reserve, variable weights, network planning task, downtime, optimization, complexity estimate, algorithm.

Введение. Известные компьютерные программы планирования графика выполнения работ и отслеживания хода работы над проектом собирают статистические данные, строят диаграммы, но окончательное решение остается за менеджером. Он корректирует план и график в случае незапланированных ситуаций, например,

при запаздывании выполнения некоторых задач и угрозе простоя отдельных работ, принимает решение о привлечении дополнительных трудовых ресурсов или перемещении работников с одних задач на другие, более критичные. Классическая задача сетевого планирования не предполагает простоев (задержки времени начала)

работ, например, по причине отсутствия работников либо занятости их в этот момент на других работах. Ситуация с задержками выполнения работ может возникнуть, когда много работ могут выполняться одновременно, а работников (рабочих бригад) ограниченное количество. Точное решение такой задачи нельзя получить методами, решающими классическую задачу сетевого планирования.

Кроме того, длительности выполнения работ (на практике – производительности работников) могут не быть постоянными величинами. Если они непрерывны и ограничены в каких-то пределах, то разработаны вероятностные методы для решения подобных задач. Но если длительности меняются в дискретных значениях, то алгоритмическая сложность решения такой задачи значительно возрастает. Предлагаемый в данной статье метод позволяет минимизировать время простоя работ и удлинения найденного критического пути для некоторых разновидностей задач сетевого планирования (ЗСП).

Основная часть. В [1] была рассмотрена задача, объединяющая в себе задачу о назначении и задачу сетевого планирования. Веса дуг сетевого графа являлись переменными величинами, и была предложена методика назначений на работы для случая, когда работников меньше, чем работ.

В [2] предложен алгоритм решения задачи оптимального назначения в сетевом планировании с ограничением на количество работ, выполняемых одновременно. Этот алгоритм позволяет строить локально-оптимальный план за время, линейно зависящее от количества дуг в сетевом графе.

Сформулируем задачу в общем виде. Допустим, что сетевой граф $G(V, E)$ содержит n работ (дуг), а в наличии у исполнителя имеется m работников.

Каждому работнику присуща своя производительность для каждой из работ. Эти производительности (длительности выполнения работ) определены целочисленной матрицей назначений A . Строки этой матрицы соответствуют рабочим, столбцы – работам, а элементы $a_{ij} > 0$ – длительностям выполнения работ. Веса дугам выбираются из матрицы назначений A .

Классическое определение сетевого графа полагает отсутствие кратных дуг. В данной статье мы такие дуги допускаем, поскольку это упрощает получение алгоритмических оценок и экономическую интерпретацию.

Выделим четыре возможных вида ЗСП в зависимости от количества и качества трудовых ресурсов:

1А. $m \geq n$, a_{ij} – константы по всем i .

2А. $m < n$, a_{ij} – константы по всем i .

1Б. $m \geq n$, a_{ij} – переменные по i .

2Б. $m < n$, a_{ij} – переменные по i .

Задачи типа 1А равносильны обычной ЗСП, поскольку веса дуг фиксированы, не играет роли, какого рабочего на какую работу назначать, и простоев работ не возникает при любой структуре сетевого графа.

Рассмотрим задачи типа 2А. В данном случае возможны простои работ и длина критического пути не всегда будет являться решением задачи. Это зависит от структуры графа и весов дуг. Например, уже при $m = n - 1$ возможен простой одной работы, если сетевой график предусматривает параллельное (одновременное) выполнение всех работ. С другой стороны, если в таком графе найдутся две дуги, сумма весов которых не больше длины критического пути, то простой работы не приведет к коррекции решения, равного длине критического пути.

Введем следующие обозначения:

K – критический путь;

$T(K)$ – длина критического пути;

$T(G)$ – сумма весов всех дуг графа G ;

Θ – оптимальная длительность выполнения проекта (оптимальное решение).

Если $m = 1$, то все работы выполняются одним работником (неделимой бригадой). В такой ситуации сетевое планирование и критический путь классической роли не играют. Граф G задает последовательность выполнения работ, и оптимальная длительность выполнения проекта равна

$$\Theta = T(G).$$

Рассмотрим более общий случай $1 < m < n - 1$. Исследование зависит от количества параллельных (одновременно выполняемых) работ и значений матрицы A .

Для выполнения работ на критическом пути в каждый момент времени необходимо и достаточно одного работника. Поэтому если $T(G) \leq 2T(K)$, то достаточно двух работников для выполнения проекта таким образом, чтобы критический путь не удлинился. Вторым работником выполнит работы не на критическом пути. В общем случае

$$\Theta = O(nT(K)), \text{ если один работник;}$$

$$\Theta = O\left(\frac{n}{2}T(K)\right), \text{ если два работника и т. д.}$$

Примером, когда такие оценки достигаются, является оргграф, в котором все дуги параллельны (одно мультиребро кратности n).

Поскольку вершина графа соответствует моменту времени завершения самой поздней из «входящих» работ и началу выполнения «выходящих» работ, то именно в этот момент времени

начинаются простои некоторых работ в случае нехватки работников. При дискретных весах дуг время наступления каждого события также дискретно.

В случае, если простоев не возникает, задача решается обычными методами для ЗСП. Количество работников m , достаточное для того, чтобы простоев работ не возникло, регламентирует следующее утверждение.

Утверждение. Минимальное достаточное количество работников m равно максимально возможному количеству одновременно выполняемых работ g .

Для демонстрации справедливости утверждения воспользуемся понятиями полустепеней захода и исхода вершин ориентированного графа. Рассмотрим сеть G . Каждая вершина v_i – это событие начала и окончания работ; $d^-(v_i)$ – полустепень захода вершины v_i , означает, сколько работ закончилось и работников освободилось; $d^+(v_i)$ – полустепень исхода вершины v_i , означает, сколько работ может начаться параллельно, т. е. сколько требуется работников, чтобы работы не простаивали; разность $\Delta d_i = d^+(v_i) - d^-(v_i)$ задает изменение количества параллельных работ при наступлении события v_i , т. е. дополнительно требуемое число работников в данный момент v_i .

Занумеруем вершины «правильно», т. е. дуга ведет из вершины с меньшим номером в вершину с большим номером. Тогда $\sum_{i=1}^k \Delta d_i$ задает количество работ, которые могут выполняться одновременно в момент наступления события v_k .

Проследим ход выполнения работ проекта. Пока соблюдается условие $m \geq g$, проект выполняется оптимальным образом, т. е. $\Theta = T(K)$.

Пусть в момент наступления события v_i выполнено условие $\sum_{i=1}^k \Delta d_i > m$. Несложно под-

брать веса дуг так, чтобы у всех g работ длительность простоя превысила их резервы времени. И тогда $\Theta > T(K)$.

Ниже приводится метод назначения работников на работы, минимизирующий время простоя и минимально удлиняющий критический путь.

Введем дополнительные обозначения.

Допустим, что событие w_0 – это окончание последней из «входящих» работ j , высвобождение работника i , выполнившего эту работу (все остальные работники задействованы), и начало более чем одной работы; p_i – метка для работника под номером i , означает срок, к которому работник i освободится после выполнения очередной работы.

Поскольку элементы в строках матрицы A постоянны, то работники «обезличены», т. е.

не важен порядковый номер работника. Поэтому введем массив меток $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$, упорядоченных по возрастанию $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_m$. Обозначим ожидающие очереди работы через $(w_0, w_1), \dots, (w_0, w_s)$, а их резервы времени через $\Delta_{01}, \Delta_{02}, \dots, \Delta_{0s}$. Обозначим множество этих работ через W . Запись $i \in w_0 w_c$ будет означать, что работник под номером i назначен на работу $w_0 w_c$.

С помощью одного из классических методов [3, 4] найдем K и резервы времени Δ_{ij} для работ (i, j) . Минимальное время простоя работ с момента w_0 будет $\Delta p = p_2 - p_1$.

Рассмотрим варианты выбора следующей работы. Определяющим будет максимизация резерва времени других работ. Возможны два варианта.

$$C1. \Delta p \leq \min_{1 \leq j \leq s} \{a_{0j}\}.$$

В этом случае назначаем первого работника на работу, соответствующую $\min_{1 \leq j \leq s} \{\Delta_{0j}\}$. Пересчитываем Δ_{ij} для оставшихся параллельных работ и их продолжений путей по формуле

$$\Delta_{ij} := \Delta_{ij} - \Delta p.$$

Также корректируем массив P . (На практике такой случай наиболее реален, поскольку большая вероятность того, что промежуток времени завершения работы короче, чем длительность целой работы.)

$$C2. \Delta p > \min_{1 \leq j \leq s} \{a_{0j}\}.$$

В этом случае сравниваем два возможных варианта назначений.

Не нарушая общности рассуждений, положим, что $\Delta_{01} \leq \Delta_{02} \leq \dots \leq \Delta_{0s}$.

$$\text{Обозначим } a_{0c} = \min_{1 \leq j \leq s} \{a_{0j}\}.$$

Если $1 \in w_0 w_1$, то скорректированный $\min_{1 \leq j \leq s} \{\Delta_{0j}\} = \min\{\Delta_{01}, \Delta_{02} - a_{01}\}$.

Если $1 \in w_0 w_c$ и при этом $w_0 w_1 \neq w_0 w_c$, то скорректированный $\min_{1 \leq j \leq s} \{\Delta_{0j}\} = \min\{\Delta_{0c}, \Delta_{01} - a_{0c}\}$.

Из этих двух вариантов выбираем тот, который сохраняет наибольшим резерв времени, т. е. находим $\max\{\Delta_{02} - a_{01}, \Delta_{01} - a_{0c}\}$.

Как вытекает из сформулированного выше утверждения, такой метод выбора очередной работы актуален лишь в те моменты времени, когда $m > g$. Поскольку сетевой граф можно разложить на подграфы, в которых возникает неопределенность (много параллельных работ),

и подграфы без неопределенности, то достаточно рассмотреть решение задачи лишь на подграфе. В нем может быть несколько источников со своими метками и несколько стоков. Несколько источников соответствуют нескольким незанятым работникам к данному моменту времени.

Заключение. В статье предпринята попытка классифицировать и расширить понятие задач сетевого планирования исходя из практической и теоретической значимости. Теоретический интерес может представлять применимость методов

решения таких классических задач, как задача о назначениях, задачи теории расписаний, задача нахождения оптимального паросочетания, к решению модифицированной ЗСП. В силу алгоритмической сложности представляют интерес приближенные алгоритмы с рассчитываемыми оценками их сложности и точности решения.

Предложенный в статье метод позволяет автоматизировать принятие решения менеджером при корректировке графика выполнения работ над проектом на любой стадии его реализации.

Литература

1. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод оптимального решения задачи о назначениях в сетевом планировании // Труды БГТУ. 2016. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 170–172.
2. Буснюк Н. Н., Новиков В. А. Метод решения задачи сетевого планирования при ограниченных трудовых ресурсах // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2017. № 2. С. 126–128.
3. Буснюк Н. Н., Черняк А. А. Математическое моделирование. Минск: Беларусь, 2014. 216 с.
4. Плескунув М. А. Задачи сетевого планирования. Екатеринбург: Уральский университет, 2014. 92 с.

References

1. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Optimal solution method of assignment problem in network planning. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2016, no. 6: Physics and Mathematics. Informatics, pp. 170–172 (In Russian).
2. Busnyuk N. N., Novikov V. A. Solution method of network planning task with restricted manpower. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics and Mathematics. Informatics, 2017, no. 2, pp. 126–128 (In Russian).
3. Busnyuk N. N., Chernyak A. A. *Matematicheskoye modelirovaniye* [Mathematical modeling]. Minsk, Belarus Publ., 2014. 216 p.
4. Pleskunov M. A. *Zadachi setevogo planirovaniya* [Network planning problems]. Ekaterinburg, Ural'skiy universitet Publ., 2014. 92 p.

Информация об авторе

Буснюк Николай Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных систем и технологий. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: busnnn@belstu.by

Information about the author

Busnyuk Nikolay Nikolaevich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Information Systems and Technologies. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: busnnn@belstu.by

Поступила 20.06.2019

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ФИЗИКА

УДК 537.633.2

В. Р. Мадьяров

Белорусский государственный технологический университет

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ НОСИТЕЛЕЙ В ПОЛУПРОВОДНИКАХ С ПОМОЩЬЮ ЧАСТОТНЫХ ЗАВИСИМОСТЕЙ ФАЗОВОГО СДВИГА ЗОНДИРУЮЩЕГО СВЧ-ИЗЛУЧЕНИЯ

В данной работе предложена методика оценки времени релаксации носителей заряда в пластинках *n*-Si и *n*-Ge. В технически достижимом диапазоне частот 30–80 ГГц становится заметной зависимость диэлектрической проницаемости образца от частоты зондирующего излучения. Время релаксации τ оценивается по наклону зависимости частотного уменьшения диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ от квадрата частоты, которая в этом диапазоне частот с достаточной степенью точности пропорциональна τ^3 . Значения $\Delta\epsilon$ определялись с помощью интерферометра по величине сдвига фазы зондирующей волны. Для исследуемых образцов полученные значения τ находятся в диапазоне 0,2–0,8 пс. Аппроксимация полученных температурных зависимостей времени релаксации степенными функциями показывает, что наблюдаемое уменьшение времени релаксации описывается зависимостями $\tau = 7 \cdot 10^{-10} T^{-1,34}$ для Ge и $\tau = 3,8 \cdot 10^{-10} T^{-1,28}$ для Si. Наиболее вероятным механизмом такого поведения является рассеяние носителей заряда на тепловых колебаниях решетки. В сочетании с методами определения концентрации носителей заряда и удельной проводимости предлагаемая методика может применяться для оценки эффективной массы носителей заряда в полупроводниковых материалах в широком температурном диапазоне.

Ключевые слова: волны миллиметрового диапазона, время релаксации носителей, перенос носителей заряда, частотная зависимость.

V. R. Mad'yarov

Belarusian State Technological University

ESTIMATION THE RELAXATION TIME OF THE CARRIERS IN SEMICONDUCTORS USING THE PHASE SHIFT FREQUENCY DEPENDENCES OF THE PROBING MICROWAVE RADIATION

The paper proposes a method to estimate the relaxation time of charge carriers in *n*-Si and *n*-Ge wafers. In the technically achievable frequency range of 30–80 GHz, the observed dependence of the dielectric constant of the sample on probing radiation frequency becomes appreciable. The relaxation time τ is estimated by the slope of the dependence of dielectric constant decrease value $\Delta\epsilon$ on frequency squared, which in this range is proportional to the cubic power of τ with sufficient accuracy. The values of $\Delta\epsilon$ were determined by interferometer from the phase shift of the probing wave. For both samples, the obtained values τ are in the range of 0.2–0.8 ps. The approximation of the obtained relaxation time temperature dependences shows that the observed decrease in the relaxation time can be described by the equations $\tau = 7 \cdot 10^{-10} T^{-1,34}$ for Ge and $\tau = 3.8 \cdot 10^{-10} T^{-1,28}$ for Si. The most likely mechanism of this behavior is the scattering of free charge carriers by lattice thermal vibrations. Combined with the concentration and conductivity measurement methods the proposed technique may be used to evaluate the effective mass of charge carriers in semiconductor materials in a wide temperature range.

Key words: millimeter waves, carrier relaxation time, charge carrier transfer, frequency dependence.

Введение. Методы на основе зондирования полупроводников излучением СВЧ-диапазона применяются для определения параметров электронного

переноса, а также для регистрации проводимости поверхности полупроводников при определении коэффициента рекомбинации [1–3]. Из решения

кинетического уравнения Больцмана следует выражение для частотного сдвига диэлектрической проницаемости в СВЧ-области через параметры зонной структуры полупроводника. Эти решения существенно упрощаются, если в измерениях использовать монокристаллический образец с заданной ориентацией кристаллографической плоскости относительно направления зондирования, для которой энергетическая поверхность наиболее близка к сферической. В этом случае для оценки времени релаксации применимы упрощенные соотношения. В данной работе представлены результаты экспериментального определения времени релаксации τ по величине частотного уменьшения $\Delta\epsilon$ диэлектрической проницаемости, полученной из интерферометрических измерений.

Основная часть. Для определения частотной зависимости $\Delta\epsilon$ использовалось решение уравнения Больцмана для переноса носителей заряда под действием электрического поля волны. Функция распределения носителей заряда по энергии $f(W)$ в пространстве волновых векторов \vec{k} в приближении сферических энергетических долин удовлетворяет уравнению

$$e\vec{E} \cdot \frac{1}{\hbar} \nabla_{\vec{k}} f(\vec{k}, \vec{r}) = -\frac{f(\vec{k}, \vec{r}) - f_0}{\tau}, \quad (1)$$

где e – элементарный заряд; \vec{E} – локальная напряженность электрического поля волны с частотой ω , $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$; f_0 – равновесная часть функции распределения; τ – время релаксации.

В предположении, что f_0 является функцией Максвелла – Больцмана, из кинетических соотношений следует выражение для диэлектрической проницаемости образца [4]:

$$\epsilon = \epsilon_{ст} - \frac{1}{1 + [\epsilon_0 \omega / e^2 L(\omega)]^2}, \quad (2)$$

где

$$L(\omega) = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} \left\langle \frac{\tau}{1 + i\omega\tau} \right\rangle \sum_k \frac{n_k}{m_k^*}, \quad (3)$$

а $\epsilon_{ст}$ – диэлектрическая проницаемость на постоянном токе; ϵ_0 – диэлектрическая постоянная; m_k^* и n_k – эффективные массы и концентрации носителей в k -й энергетической долине.

Из (2) с учетом (3) для Ge и Si в приближении сферических энергетических поверхностей следует формула для $\Delta\epsilon$:

$$\Delta\epsilon = \epsilon_{ст} - \epsilon = \frac{\sigma_0 \tau}{\epsilon_0 [1 + (\omega\tau)^2]}, \quad (4)$$

где σ_0 – удельная проводимость на постоянном токе.

Из выражения (4) можно оценить время τ , если измерить $\Delta\epsilon$ на различных частотах. Частотная зависимость $\Delta\epsilon$ будет заметно сказываться, если

параметр $\omega\tau = 2\pi\nu\tau \sim 1$. Значения τ составляют обычно 10^{-13} – 10^{-12} с, поэтому частоты, на которых целесообразно проводить измерения фазового сдвига, лежат, по крайней мере, в диапазоне ~50–100 ГГц. Для этого диапазона частот из формулы (4) следует, что скорость изменения $\Delta\epsilon$ в зависимости от квадрата частоты пропорциональна τ^3 :

$$\frac{d(\Delta\epsilon)}{d(\nu^2)} \approx 4\pi^2 \sigma_0 \tau^3. \quad (5)$$

Очевидно, эта зависимость заметнее проявляется для образцов с более высокой проводимостью. Из (5) следует формула для определения времени релаксации по наклону частотной зависимости $\Delta\epsilon(\nu^2)$:

$$\tau = \left[\frac{\epsilon_0}{4\pi^2 \sigma_0} \frac{d(\Delta\epsilon)}{d(\nu^2)} \right]^{\frac{1}{3}}. \quad (6)$$

Частотные измерения диэлектрической проницаемости проводились на двухплечевом интерферометре, собранном по схеме фазовой компенсации.

На рис. 1 представлена схема экспериментальной установки. В качестве источника зондирующей волны применялся генератор Г4-142, рабочая частота которого перестраивается в диапазоне 30–80 ГГц (что соответствует диапазону длин волн 3,75–10,00 мм). Зондирующая волна через волновод подавалась в разветвитель, а после него – на секцию с образцом и на фазовращатель. Выравнивание амплитуд прошедшей волны в обоих плечах обеспечивалось с помощью аттенюатора. Прошедшее излучение регистрировалось пленочным термомпарным приемником, подключенным к осциллографу. Значение сдвига диэлектрической проницаемости рассчитывалось по измеренному фазовому сдвигу $\Delta\phi$ прошедшей волны. Значение $\Delta\phi$ определялось по шкале фазовращателя при появлении минимального сигнала с детектора. Точность определения фазового угла составляла не хуже $0,5^\circ$. Измерения проводились на низкоомных монокристаллических образцах германия и кремния n -типа толщиной 0,55 и 0,45 мм соответственно. Образцы зондировались в направлении оси [100]. Предварительно измерялся эффективный коэффициент пропускания образцов, по величине которого определялись коэффициент пропускания образца за один проход k_1 и удельная проводимость. Учет многократных отражений приводит к формуле коэффициента k_1 в области высоких частот:

$$k_1 = \frac{e^{-\alpha d} (1 - \rho^2)}{[1 - \rho^2 (1 - \rho) e^{-2\alpha d}]} = \frac{k_0 (1 - \rho^2)}{[1 - \rho^2 (1 - \rho) k_0^2]}, \quad (7)$$

где α – коэффициент поглощения зондирующего излучения; d – толщина образца; ρ – измеренное значение коэффициента отражения от поверхности образца; k_0 – измеренный эффективный коэффициент пропускания.

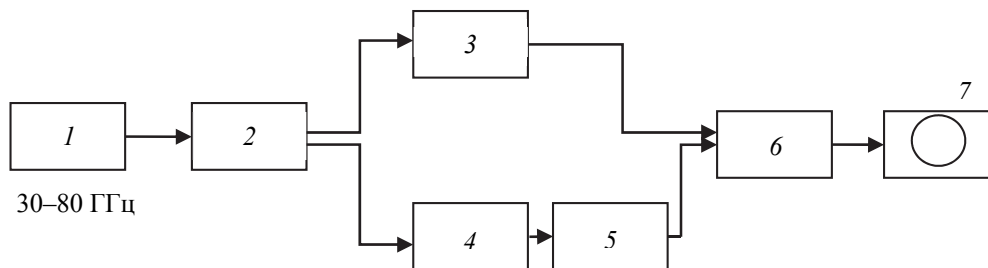


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:

1 – перестраиваемый СВЧ-генератор (Г4-142); 2 – разветвитель; 3 – образец; 4 – аттенуатор; 5 – образцовый фазовращатель; 6 – приемник (пленочная термопара); 7 – осциллограф

На рис. 2 представлены зависимости фазового сдвига $\Delta\phi$ от частоты в диапазоне 30–75 ГГц для образцов *n*-Ge и *n*-Si. Наблюдается рост фазового сдвига с частотой, причем для германия значение сдвига $\Delta\phi$ больше по сравнению со значениями, полученными для *n*-Si.

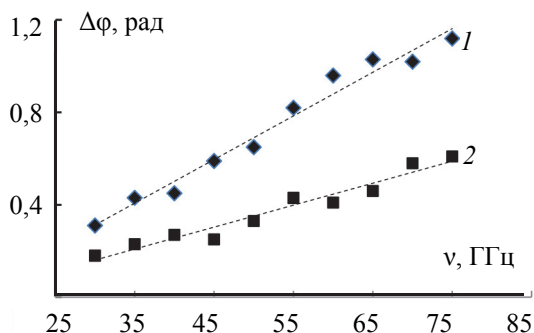


Рис. 2. Зависимости фазового сдвига зондирующей волны от частоты для образцов: 1 – *n*-Ge с концентрацией примеси $\sim 7 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, $\sigma_0 = 96 \text{ См/м}$, $d = 0,55 \text{ мм}$; 2 – *n*-Si, $\sim 5 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$, $\sigma_0 = 102 \text{ См/м}$, $d = 0,45 \text{ мм}$ ($T = 295 \text{ К}$)

На рис. 3 и 4 приведены зависимости частотного сдвига диэлектрической проницаемости $\Delta\epsilon$ от частоты для образцов *n*-Ge и *n*-Si.

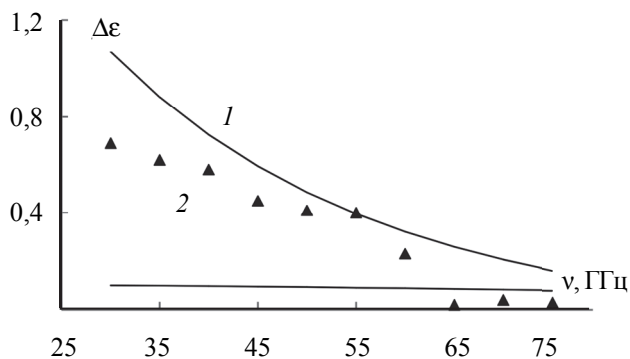


Рис. 3. Расчетные (сплошные линии) и измеренная зависимости частотного сдвига диэлектрической проницаемости от частоты для образца *n*-Ge, $\sigma_0 = 96 \text{ См/м}$, $d = 0,55 \text{ мм}$ ($T = 295 \text{ К}$): 1 – $\tau = 0,8 \text{ пс}$; 2 – $\tau = 0,2 \text{ пс}$

Сплошные кривые построены путем расчета диэлектрической проницаемости по формуле (4) для значений времени релаксации $\tau = 2 \cdot 10^{-13}$ и $8 \cdot 10^{-13} \text{ с}$. Значение $\epsilon_{ст}$, которое использовалось в расчетах, измерялось при комнатной температуре и составило 16,4 для германия и 11,9 для кремния.

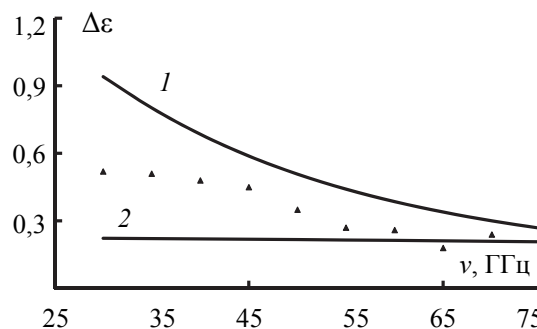


Рис. 4. Расчетные (сплошные линии) и измеренная зависимости частотного сдвига диэлектрической проницаемости от частоты для образца *n*-Si, $\sigma_0 = 102 \text{ См/м}$, $d = 0,45 \text{ мм}$ ($T = 295 \text{ К}$): 1 – $\tau = 0,8 \text{ пс}$; 2 – $\tau = 0,2 \text{ пс}$

Значения $\Delta\epsilon$, определенные по измеренному сдвигу разности фаз, укладываются между указанными расчетными кривыми до частоты 50 ГГц. На более высоких частотах наблюдается увеличение разброса величины сдвига $\Delta\epsilon$. Для образца кремния этот разброс несколько меньше и наблюдается на более высоких частотах. Анализ данных показывает, что кривые, полученные для измеренных значений τ , лучше всего соответствуют времени $\tau \sim (3-5) \cdot 10^{-13} \text{ с}$.

Такое значение по порядку величины соответствует времени релаксации носителей вследствие их рассеяния на тепловых колебаниях решетки.

На рис. 5 представлены зависимости времени релаксации τ от температуры для обоих образцов, полученные путем расчета по формуле (6). Предварительно для каждой температуры определялось значение производной $d(\Delta\epsilon) / d(\nu^2)$ из соответствующей зависимости, в диапазоне зондирующих частот 30–55 ГГц. В этом диапазоне зависимость $\Delta\epsilon(\nu^2)$ близка к линейной и наблюдается наименьший разброс $\Delta\epsilon$.

Аппроксимация полученных экспериментальных данных степенными функциями показывает, что наблюдаемое уменьшение времени релаксации описывается следующими зависимостями: $\tau = 7 \cdot 10^{-10} T^{-1,34}$ для Ge и $\tau = 3,8 \cdot 10^{-10} T^{-1,28}$ для Si.

В рассматриваемой области температур основным механизмом, влияющим на подвижность, является рассеяние на тепловых колебаниях решетки. Поэтому подвижность носителей в таких полупроводниках должна быть обратно пропорциональна температуре.

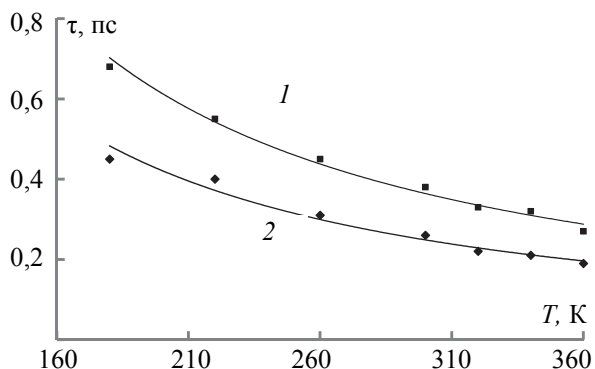


Рис. 5. Измеренные температурные зависимости времени релаксации для *n*-Ge (1) и *n*-Si (2) и аппроксимирующие кривые

В исследуемом температурном диапазоне концентрация электронов в образце почти не изменяется. Тогда наблюдаемая температурная зависимость времени релаксации согласуется с известной температурной зависимостью подвижности носителей заряда, которая пропорциональна времени релаксации [5]. Оценка подвижности для кремния с использованием значения $\tau = 3 \cdot 10^{-13}$ с (при $T = 295$ К) и эффективной массы $m^* = 0,55m_0$ (m_0 – масса электрона) дает $\mu = e\tau / m^* = 0,16$ м²/(В · с), что хорошо согласуется с известными данными.

Заключение. Предложена методика бесконтактного определения времени релаксации носителей заряда в плоских образцах примесных полупроводников, в основе которой лежит измерение фазового сдвига зондирующей волны на частотах $\sim 10^{11}$ Гц. Полученные значения времени релаксации согласуются с известными данными. Наблюдаемое поведение времени релаксации с температурой в диапазоне 180–300 К находится в соответствии с известными представлениями о зависимости подвижности от температуры. В сочетании с методами определения концентрации и удельной проводимости предлагаемая методика может применяться для определения эффективной массы носителей заряда в полупроводниковых материалах в широком температурном диапазоне.

Литература

1. Excess carrier lifetime measurement for plasma-etched GaN by the microwave photoconductivity decay method / H. Watanabe [et al.] // *Jap. J. Appl. Phys.* 2007. Part 1. Vol. 46, no. 1. P. 35–39.
2. Palais O., Arcary A. Contactless measurement of surface recombination velocity in silicon wafers // *J. Appl. Phys.* 2003. Vol. 93, no. 8. P. 4686–4690.
3. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities in semiconductor wafer by a single laser microwave photoconductance / F. X. Chen [et al.] // *Scnicond. Sci. Technol.* 2004. No. 19. P. 959–963.
4. Зеегер К. Физика полупроводников. М.: Мир, 1977. 615 с.
5. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М.: Мир, 1984. 455 с.

References

1. Watanabe H., Kato M., Ichimura M., Arai E., Kanechika M., Ishiguro O., Kachi T. Excess carrier lifetime measurement for plasma-etched GaN by the microwave photoconductivity decay method. *Jap. J. Appl. Phys.*, 2007, part 1, vol. 46, no. 1, pp. 35–39.
2. Palais O., Arcary A. Contactless measurement of surface recombination velocity in silicon wafers. *J. Appl. Phys.*, 2003, vol. 93, no. 8, pp. 4686–4690.
3. Chen F. X., Cui R. Q., L Xu L., Meng F. Y., Zhao Z. X., Zhou Z. B. Separation of the bulk lifetime and surface recombination velocities in semiconductor wafer by a single laser microwave photoconductance. *Scnicond. Sci. Technol.*, 2004, no. 19, pp. 959–963.
4. Zeeger K. *Fizika poluprovodnikov* [Physics of semiconductors]. Moscow, Mir Publ., 1977. 615 p.
5. Zi S. *Fizika poluprovodnikovykh priborov* [Physics of semiconductor devices]. Moscow, Mir Publ., 1984. 455 p.

Информация об авторе

Мадьяров Владимир Рафкатович – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: Madyarov@belstu.by

Information about the author

Mad'yarov Vladimir Rafkatovich – PhD (Physics and Mathematics), Associate Professor, Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Madyarov@belstu.by

Поступила 19.03.2019

УДК 339.9:658:630

А. Н. Лаппо, А. В. Мисевич, А. Е. Почтенный
Белорусский государственный технологический университет
**ФОТОЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГЕТЕРОСТРУКТУРЫ
ФТАЛОЦИАНИН МЕДИ – ПЕРИЛЕН**

Изучены фотоэлектрические свойства органических сенсорных гетероструктур на основе фталоцианина меди (CuPc) и N,N'-диметилдидиимида перилентетракарбоновой кислоты (перилен). Установлено, что экстремумы на спектрах фотопроводимости и фото-ЭДС соответствуют экстремумам на спектрах оптического поглощения слоев перилена и CuPc, что указывает на увеличенную светочувствительную область и спектральную ширину области преобразования излучения по сравнению с однослойными элементами на основе барьера Шоттки.

Экспериментально показана возможность управления электрофизическими свойствами гетероперехода между двумя органическими полупроводниками с прыжковым механизмом проводимости путем внедрения адсорбированных примесей на границу раздела между органическими полупроводниками. Установлено, что уменьшение концентрации адсорбированного кислорода на границе раздела между слоями перилена и CuPc позволяет увеличить фото-ЭДС солнечного элемента Au/перилен/CuPc/ITO до 0,35 В.

Ключевые слова: фото-ЭДС, гетероструктура, перилен, фталоцианин меди, фотопроводимость, вольт-амперная характеристика гетероструктуры.

A. N. Lappo, A. V. Misevich, A. E. Pochtenny
Belarusian State Technological University
**PHOTOELECTRIC PROPERTIES OF COPPER
PHTHALOCYANINE – PERYLENE HETEROSTRUCTURE**

Photoelectric properties of organic sensory heterostructures based on copper phthalocyanine (CuPc) and perilentetracarboxylic acid N,N'-dimethyldiimide (perylene) have been studied. It has been established that the extremes in the photo-emf spectra correspond to the extremes in the optical absorption spectra of the layers of perylene and CuPc, which indicates an increased photosensitive region and the spectral width of the radiation pre-formation region compared to single-layer elements based on the Schottky barrier.

The experiment has shown the possibility of controlling the electrophysical properties of a heterojunction between two organic semiconductors with a hopping mechanism of conduction by introducing adsorbed impurities at the interface between organic semiconductors. It has been established that a decrease in the concentration of adsorbed oxygen at the interface between the layers of perylene and CuPc allows increasing the photo-emf of the Au/perylene/CuPc/ITO heterostructure to 0.35 V.

Key words: photo-emf, heterostructure, perylene, phthalocyanine, photoconductivity, voltage-current characteristic of heterostructures.

Введение. В последние годы интенсивно проводятся исследования в области органических электронных материалов и, в частности, молекулярных полупроводников [1–3]. Интенсивно изучаются возможности применения органических материалов и сопутствующих им технологий для создания солнечных элементов, светоизлучающих диодов, химических сенсоров и элементов молекулярной электроники. Основными преимуществами молекулярных полупроводников по сравнению с традиционными монокристаллическими полупроводниками являются широкие возможности изменения свойств материала и низкая себестоимость создаваемых электронных устройств. Цель данной работы – исследовать фотопроводимость и фотоэлектрические свойства гетероструктуры на основе двух органических материалов с различным типом

проводимости и имеющих полосы поглощения электромагнитного излучения в разных частях оптического диапазона. В качестве таких материалов были выбраны: фталоцианин меди, который имеет дырочную проводимость и полосы поглощения в красно-оранжевой области видимого излучения, и периленовый пигмент N,N'-диметилдидиимид перилентетракарбоновой кислоты, у которого электронный тип проводимости и полосы поглощения в сине-зеленой области видимого излучения. Дополнительной целью исследования являлось изучение влияния на фотоэлектрические свойства гетероструктуры примесей, адсорбированных на границу раздела из окружающей среды.

Основная часть. Тонкопленочные гетероструктуры осаждались на подложки из стекла. Они состояли из нескольких слоев (рис. 1): слоя

прозрачного полупроводника – окислов индия и олова (ITO), слоя фталоцианина меди (CuPc) толщиной ~50 нм, слоя N,N'-диметилдидиимида перилентетракарбоновой кислоты (перилен) толщиной ~50 нм и верхнего полупрозрачного электрода – золота (Au) толщиной ~50 нм.

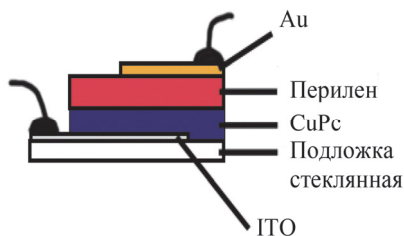


Рис. 1. Схематическое изображение структуры CuPc – перилен

Осаждение пленок проводилось в вакуумной камере универсального вакуумного поста ВУП-5 при остаточном давлении не более $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ Па. Чтобы иметь возможность последовательно осаждать два органических слоя и металлический электрод в одном технологическом цикле, т. е. без нарушения вакуума, использовался метод термического распыления из нескольких испарителей. Все слои имели различную конфигурацию, поэтому вещества напылялись через изготовленные из фольги маски, для смены которых была сконструирована специальная система смены масок. Подложки крепились над резистивными испарителями, на незначительном расстоянии от подложек располагались маски. Смена масок осуществлялась их параллельным смещением относительно подложек при помощи электрического двигателя, управление которым выполнялось с панели управления ВУП-5. Испарение мелкодисперсных порошков органических соединений происходило из резистивных испарителей эффузионного типа, золото распылялось из резистивного испарителя-корзинки. Скорость испарения регулировалась изменением мощности нагревателя и составляла для пленок CuPc и перилена около 0,01 нм/с, а для пленки золота – 0,3 нм/с.

Установка для измерения спектров фото-ЭДС показана на рис. 2. Фото-ЭДС, создаваемая в цепи, измерялась электрометром В7Э-42. Источником монохроматического излучения был монохроматор спектрофотометра SPECORD M40. Установка для измерения спектров фотопроводимости гетероструктуры была аналогична установке для измерения спектров фото-ЭДС, но электрометром В7Э-42 в цепи измерялся ток, а напряжение в цепи создавалось источником постоянного напряжения.

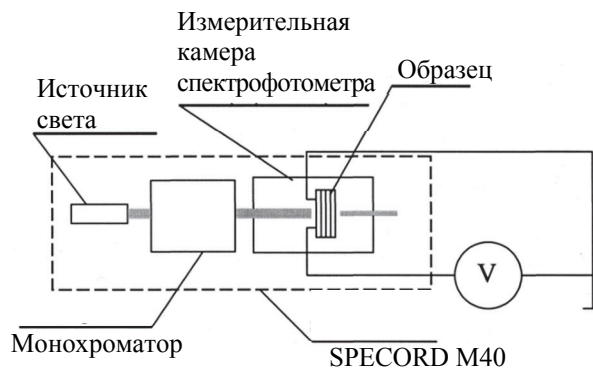


Рис. 2. Схема измерения спектров фото-ЭДС

На рис. 3 представлены спектры поглощения гетероструктуры и отдельных слоев органических материалов – фталоцианина меди и перилена. Фталоцианин меди имеет два максимума поглощения при 690,6 и 615 нм, перилен – два пика при 571 и 476,7 нм. Как показано на рис. 3, спектр поглощения гетероструктуры образуется путем наложения спектров поглощения отдельных материалов. На спектре поглощения гетероструктуры можно отметить те же пики, что и для фталоцианина и перилена.

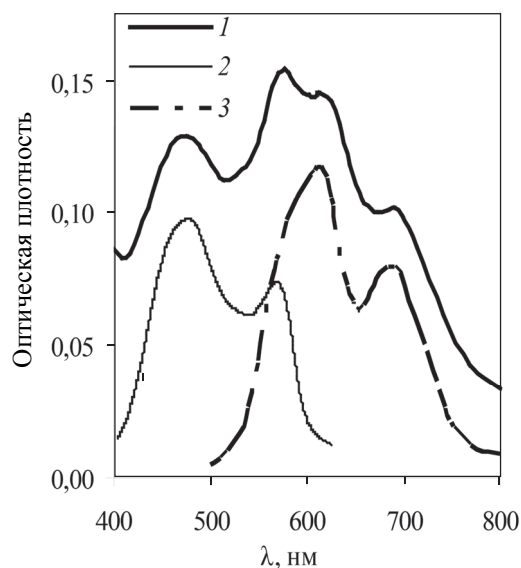


Рис. 3. Спектры поглощения гетероструктуры (1), N,N'-диметилдидиимида перилентетракарбоновой кислоты (2), фталоцианина меди (3)

На рис. 4 приведены спектры фото-ЭДС для гетероструктуры фталоцианин меди – перилен. Наблюдается различная величина фото-ЭДС для излучения одной длины волны при освещении через слой полупрозрачного золотого электрода и через слой ITO.

Максимумы фото-ЭДС отмечаются при длинах волн, соответствующих максимумам поглощения фталоцианина меди и перилена. Таким образом, используя двухслойную гетероструктуру,

состоящую из фталоцианина меди и перилена, можно увеличить светочувствительную область и спектральную ширину области поглощения.

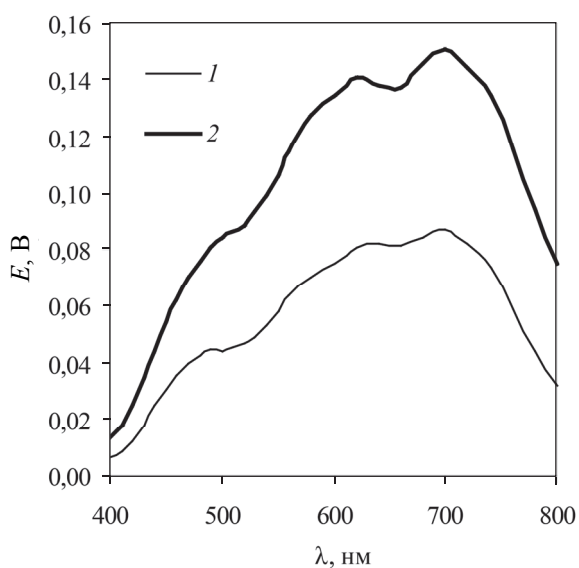


Рис. 4. Спектры фото-ЭДС гетероструктуры при освещении через золото (1) и через ИТО (2)

На рис. 5 показаны спектры фотопроводимости для гетероструктуры при напряжении между электродами 1 В и при положительном потенциале на золотом электроде. На изображении спектров фотопроводимости видно, что спектральная зависимость фотопроводимости гетероструктуры определяется спектром поглощения полупроводников, входящих в состав гетероструктуры, а фотопроводимость в интервале длин волн от 400 до 800 нм обусловлена собственной фотопроводимостью материалов гетероструктуры.

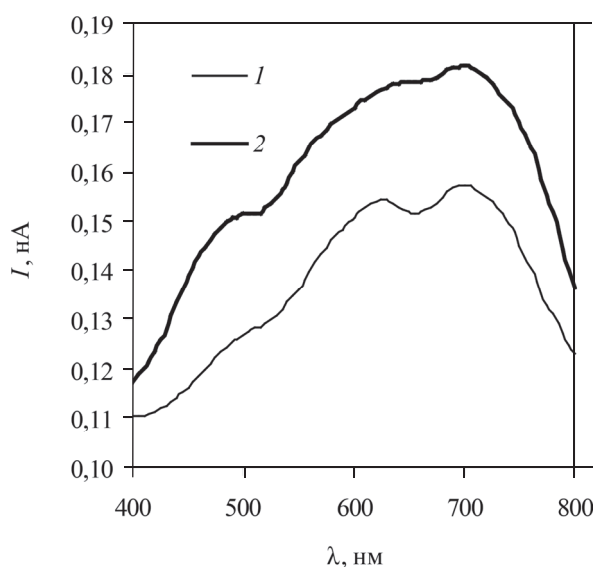


Рис. 5. Спектры фотопроводимости гетероструктуры при освещении через золото (1) и через ИТО (2)

В данной работе были измерены вольт-амперные характеристики гетероструктуры при освещении и в темноте (рис. 6). Изменение наклона при освещении свидетельствует о наличии фотопроводимости в гетероструктуре, при этом световая вольт-амперная характеристика не проходит через начало координат, что указывает на наличие фото-ЭДС гетероперехода около 0,35 В.

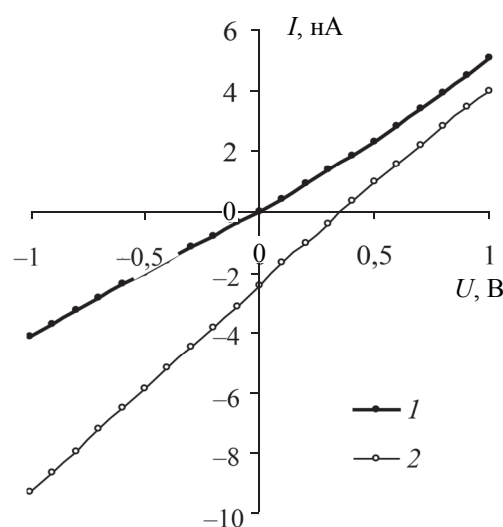


Рис. 6. Вольт-амперная характеристика для гетероструктуры Au/перилен/CuPc/ИТО, измеренная в темноте (1) и при освещении через ИТО (2)

Для изучения влияния адсорбированного кислорода на свойства органической гетероструктуры были проведены исследования гетероструктуры с повышенной концентрацией адсорбированного кислорода на границе раздела между фталоцианином меди и периленом. Для этого при получении некоторых органических гетероструктур был осуществлен напуск воздуха в вакуумную камеру после напыления первого органического слоя (с выдержкой на воздухе в течение суток), что позволило увеличить концентрацию адсорбированного кислорода в области гетероперехода. На вольт-амперной характеристике такой гетероструктуры также наблюдается изменение наклона при освещении, но то, что они проходят через начало координат, показывает, что фото-ЭДС гетероперехода очень мала.

Заключение. Были получены органические гетероструктуры на основе фталоцианина меди и перилена. Установлено, что максимумы и минимумы на спектрах фотопроводимости и спектрах фото-ЭДС соответствуют максимумам и минимумам на спектрах оптического поглощения слоев перилена и CuPc. Это доказывает, что в гетероструктуре на основе двух органических

слоев светочувствительная область и спектральная ширина области преобразования излучения больше, чем в однослойных элементах на основе барьера Шоттки [4].

Экспериментально показана возможность управления электрофизическими свойствами гетероперехода между двумя органическими полупроводниками с прыжковым механизмом проводимости путем внедрения адсорбированных

примесей на границу раздела между полупроводниками.

Изучение влияния адсорбированного кислорода на электрофизические свойства гетероперехода перилен/CuPc подтвердило, что при увеличении концентрации кислорода на границе раздела перилен/CuPc происходит уменьшение фото-ЭДС, тогда как фотопроводимость органических слоев сохраняется.

Литература

1. Photosensitive heterostructures made of sulfonamide zinc phthalocyanine and organic semiconductor / P. Lutsyk [et al.] // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 2011. Vol. 535. P. 18–29.
2. Electrical transport in crystalline perylene derivatives films for electronic devices / A. Stanculescu [et al.] // *Solid State Sciences*. 2008. Vol. 10, no. 12. P. 1762–1767.
3. Optical and photoelectric properties of heterostructures of fullerene C60 with phthalocyanines and tetracyanoquinodimethane (TCNQ) / M. P. Gorishnyi [et al.] // *Molecular Crystals and Liquid Crystals*. 2011. Vol. 535. P. 49–56.
4. Лаппо А. Н., Мисевич А. В., Почтенный А. Е. Фотоэлектрические свойства гетероструктуры фталоцианин-периленовый пигмент // *Физико-математические науки: материалы 83-й науч.-техн. конф. профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1–14 февр. 2019 г. / Белорус. гос. технол. ун-т. Минск, 2019. С. 7.*

References

1. Lutsyk P., Vertsimakha Ya., Nespurek S., Pomaz I. Photosensitive heterostructures made of sulfonamide zinc phthalocyanine and organic semiconductor. *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2011, vol. 535, pp. 18–29.
2. Stanculescu A., Socol M., Grigorescu O., Stanculescu F. Electrical transport in crystalline perylene derivatives films for electronic devices. *Solid State Sciences*, 2008, vol. 10, no. 12, pp. 1762–1767.
3. Gorishnyi M. P., Koval'chuk O. V., Verbitsky A. B., Vovk V. E., Koval'chuk T. N. Optical and photoelectric properties of heterostructures of fullerene C60 with phthalocyanines and tetracyanoquinodimethane (TCNQ). *Molecular Crystals and Liquid Crystals*, 2011, vol. 535, pp. 49–56.
4. Lappo A. N., Misevich A. V., Pochtennyu A. E. [Photoelectric properties of the phthalocyanine-perylene pigment heterostructure]. *Materialy 83-y nauchno-tekhnicheskoy konferentsii professorsko-prepodavatel'skogo sostava, nauchnykh sotrudnikov i aspirantov (Fiziko-matematicheskiye nauki)* [Materials of the 83rd scientific and technical conference of the teaching staff, scientific collaborators and graduate students (Physical and mathematical sciences)]. Minsk, 2019, p. 7 (In Russian).

Информация об авторах

Лаппо Аляся Николаевна – ассистент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: lappo_alesya@mail.ru

Мисевич Алексей Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: misevich@rambler.ru

Почтенный Артем Евгеньевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: pae@tut.by

Information about the authors

Lappo Alesya Nikolaevna – assistant lecturer, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: lappo_alesya@mail.ru

Misevich Aleksey Vasil'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: misevich@rambler.ru

Pochtennyu Artyem Evgen'yevich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: pae@tut.by

Поступила 15.05.2019

УДК 539.211:539.1.06

О. Г. Бобрович, В. В. Яскельчик

Белорусский государственный технологический университет

**МОРФОЛОГИЯ И СВОЙСТВА ПОВЕРХНОСТИ СПЛАВА АМg2М,
МОДИФИЦИРОВАННОГО ОСАЖДЕНИЕМ ТИТАНА
В УСЛОВИЯХ ИОННОГО АССИСТИРОВАНИЯ**

В данной работе изучали закономерности смачивания и микротвердость поверхности алюминиевого сплава АМg2М после модифицирования осаждением титана в условиях ионного ассистирования при ускоряющем напряжении 3, 6, 9 и 12 кВ для ассистирующих ионов Ti^+ и интегральных потоков ионов $(1,1-2,1) \cdot 10^{17} Ti^+/cm^2$. Морфология поверхности исходных и модифицированных образцов исследовалась с использованием атомно-силовой микроскопии в контактном режиме. Смачивание исходных и модифицированных образцов сплава АМg2М дистиллированной водой определяли по равновесному краевому углу θ смачивания (РКУС). Средняя шероховатость исходного образца сплава АМg2М составляла 34,3 нм и снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^+ до 8,5 нм при $U = 6$ кВ и 14,4 нм при $U = 12$ кВ. При внедрении сравнимых доз ионов титана в образцы сплава с ростом ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличивались. Исходная поверхность сплава была гидрофильной ($\theta = 64,8^\circ$) и оставалась такой после модифицирования при $U = 12$ кВ. Относительное изменение микротвердости модифицированных образцов увеличилось на 13–15% ($U = 3, 6$ кВ) и уменьшилось на 8% ($U = 9$ кВ) при малых нагрузках на индентор микротвердомера.

Ключевые слова: сплав алюминия АМg2М, Ti-покрытия, смачиваемость, гидрофильная поверхность, микротвердость.

O. G. Bobrovich, V. V. Yaskel'chik

Belarusian State Technological University

**MORPHOLOGY AND SURFACE PROPERTIES OF ALLOY 5251, MODIFIED
BY DEPOSITION OF TITANIUM IN CONDITIONS OF ION ASSISTANCE**

In this paper we studied the wetting behavior and microhardness of the surface of the aluminum alloy 5251 after modification by the deposition of titanium under ion assisting conditions at an accelerating voltage of 3, 6, 9 and 12 kV for assisting Ti^+ ions and integral ion fluxes of $(1.1-2.1) \cdot 10^{17} Ti^+/cm^2$. The morphology of the surface of the initial and modified samples was studied using atomic-force microscopy in the contact regime. Wetting of the initial and modified samples of the alloy 5251 with distilled water was determined from the equilibrium contact angle θ of the wetting. The average roughness of the initial sample of the alloy 5251 was 34.3 nm and decreased with an increase in the accelerating voltage for the assisting Ti^+ ions to 8.5 nm at $U = 6$ kV and 14.4 nm at $U = 12$ kV. When the comparable doses of titanium ions were introduced into the samples of the alloy with an increase in the accelerating voltage, the values of the contact angle of wetting also increased. The initial surface of the alloy was hydrophilic ($\theta = 64.8^\circ$) and remained hydrophilic after modification at $U = 12$ kV. The relative change in the microhardness of the modified samples increases by 13–15% at $U = 3, 6$ kV and decreases by 8% at $U = 9$ kV at low loads on the microhardness indenter.

Key words: aluminum alloy 5251, Ti-coating, wettability, hydrophilic surface, microhardness.

Введение. Алюминиевые сплавы находят широкое применение во многих отраслях промышленности в качестве конструкционных материалов современной техники [1]. Функциональные и эксплуатационные характеристики, такие как износостойкость, коррозионная стойкость, микротвердость, смачивание поверхности, определяются структурой и свойствами поверхности и приповерхностных слоев алюминиевых сплавов [2–4]. Применение ионных пучков вызывает в материале как химические, так и физические изменения. Для улучшения физико-механических и физико-химических свойств

алюминиевых сплавов используются различные методы ионно-лучевой модификации. В данной работе изучали закономерности смачивания и микротвердость поверхности алюминиевого сплава АМg2М после модифицирования осаждением титана в условиях ионного ассистирования. Покрытия Ti наносились на сплав АМg2М с использованием резонансного ионного источника вакуумной электродуговой плазмы. Данный источник создает плазму вакуумного электродугового разряда, в которой одновременно генерируются положительные ионы и нейтральная фракция из материала электродов источника ионов.

В качестве материала электродов применялся чистый титан 99,9%. Осаждение титанового покрытия проводили при ускоряющем напряжении 3, 6, 9 и 12 кВ для ассистирующих ионов Ti^{+} и интегральных потоков ионов $(1,1-2,1) \cdot 10^{17} Ti^{+}/cm^2$. Морфологию поверхности исходных и модифицированных образцов изучали с использованием атомно-силовой микроскопии (АСМ) в контактном режиме (атомно-силовой микроскоп NT-206, зонды CSC21), а измерение микротвердости проводили на приборе AFFRI-MVDM8 методом Виккерса. Смачивание исходных и модифицированных образцов сплава АМг2М дистиллированной водой устанавливали по равновесному краевому углу θ смачивания (РКУС). Краевой угол определяли по основным размерам капель воды, наносимой на исследуемые образцы: по высоте и диаметру ее основания. Для получения воспроизводимых результатов капли воды, наносимые на образцы, имели примерно одинаковый объем $V = (47,6 \pm 0,3) \cdot 10^{-3}$ мл. Погрешность в измерении РКУС составляла не более 2%.

Основная часть. Метод атомно-силовой микроскопии использовался для изучения топографии и шероховатости исходных и модифицированных образцов сплава алюминия. На рис. 1 показаны изображения исходной поверхности сплава АМг2М и модифицированной осаждением Ti в условиях ионного ассистирования при ускоряющем напряжении ($U = 12$ кВ) для ионов Ti^{+} .

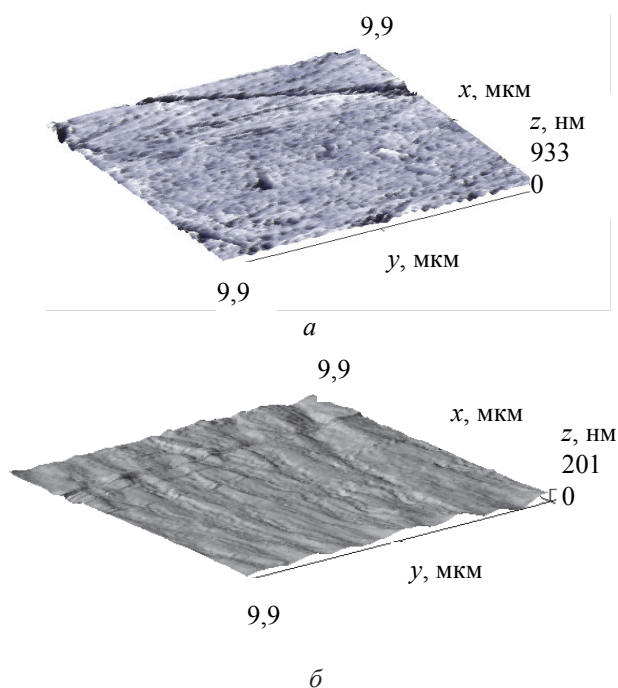


Рис. 1. АСМ-изображения исходной (а) и модифицированной (б) осаждением Ti в условиях ионного ассистирования при $U = 12$ кВ для ионов Ti^{+} поверхности сплава АМг2М

Характеристики поверхности исходного сплава АМг2М и сплава с нанесенным Ti -покрытием представлены в табл. 1.

Таблица 1

Параметры морфологии поверхности исходного алюминиевого сплава АМг2М и после его модифицирования осаждением титана в условиях ионного ассистирования

Ион	U , кВ	Θ , град	R_a , нм	R_q , нм	Z , нм
–	0	64,8	34,3	48,3	655,8
Ti	3	78,1	13,9	20,2	218,2
Ti	6	83,7	8,5	11,2	122,4
Ti	9	89,3	19,5	27,7	371,7
Ti	12	87,4	14,4	19,3	207,1

Средняя шероховатость исходного образца сплава АМг2М составляла 34,3 нм и снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^{+} до 8,5 нм при $U = 6$ кВ и 14,4 нм при $U = 12$ кВ. При внедрении сравнимых доз ионов титана в образцы сплава с ростом ускоряющего напряжения значения РКУС также увеличивались (рис. 2). Исходная поверхность сплава была гидрофильной ($\Theta = 64,8^\circ$) и оставалась гидрофильной после модифицирования при всех значениях ускоряющих напряжений для ассистирующих ионов титана. После модифицирования сплава при $U = 9, 12$ кВ для ассистирующих ионов значения РКУС поверхности были близки к $\Theta = 90^\circ$, что позволяет предположить дальнейшее увеличение РКУС при росте ускоряющего напряжения.

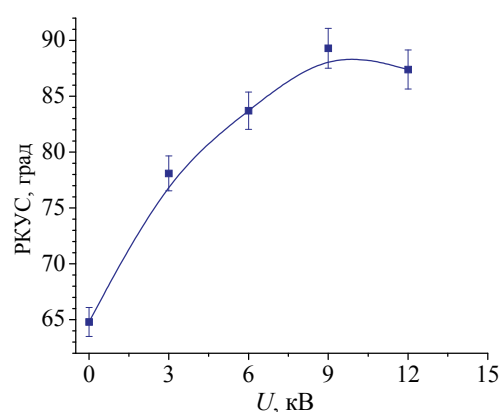


Рис. 2. Зависимость краевого угла смачивания дистиллированной водой поверхности сплава АМг2М от ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^{+}

Аналогичное увеличение значения РКУС поверхности с ростом ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов наблюдалось в работе [5] по модифицированию сплава АМг2М

осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования. Так, увеличение ускоряющего напряжения до значений $U = 9, 12, 15$ кВ приводило к тому, что поверхность сплава становилась гидрофобной и значение РКУС увеличивалось до $\theta = 98,1^\circ$ при $U = 15$ кВ.

Полученные результаты указывают на возможность управления шероховатостью поверхности пленки и ее смачиваемостью путем изменения ускоряющего напряжения для ассистирующего осаждение покрытия ионов Ti^+ и их дозы при модифицировании сплава алюминия АМг2М, как сообщалось ранее некоторыми авторами [6].

При измерении чисел микротвердости, чтобы исключить влияние масштабного эффекта, относительное изменение микротвердости $\Delta H / H_{исх}$ модифицированных образцов сплава алюминия определялось для одинаковых глубин проникновения индентора микротвердомера. Нагрузка на индентор P менялась в интервале от 10 до 100 г, что соответствовало изменению глубины проникновения индентора от $(2,2 \pm 0,1)$ до $(7,5 \pm 0,3)$ мкм. Следует отметить, что толщина модифицированного слоя была на 1–2 порядка меньше глубины проникновения индентора микротвердомера в поверхность модифицированного образца. Данные об относительном изменении микротвердости поверхности сплава алюминия после ионно-ассистируемого осаждения Ti -покрытий приведены в табл. 2.

Таблица 2

Относительное изменение микротвердости сплава алюминия марки АМг2М, модифицированного ионно-ассистируемым осаждением Ti -покрытий, в зависимости от ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^+

Относительное изменение микротвердости	$P, \text{ г}$	$U, \text{ кВ}$			
		3	6	9	12
$\Delta H / H_{исх}$	10	+0,13	+0,06	-0,08	0,00
	25	+0,03	+0,15	-0,02	+0,10
	50	+0,03	0,00	+0,01	+0,06
	100	+0,03	+0,01	+0,03	+0,04

Полученные экспериментальные данные изменения микротвердости с увеличением глубины проникновения индентора для сплава алюминия марки АМг2М, модифицированного ионно-ассистируемым осаждением Ti -покрытий, представлены на рис. 3.

Приведенные в табл. 2 и на рис. 3 результаты свидетельствуют о том, что при нагрузках на индентор, равных 50 и 100 г, относительное изменение микротвердости сплава алюминия лежит в пределах погрешности измерений чисел микротвердости. Увеличение относительного изменения микротвердости на 13% наблюдается при

осаждении Ti -покрытий при ускоряющем напряжении $U = 3$ кВ, на 15% ($U = 6$ кВ) – при малых нагрузках (10 и 25 г) на индентор микротвердомера и уменьшение на 8% ($U = 9$ кВ) – при нагрузке 10 г на индентор микротвердомера.

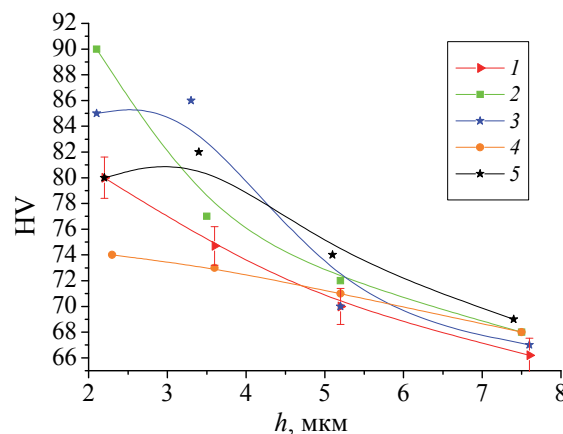


Рис. 3. Графики зависимости микротвердости поверхности сплава алюминия марки АМг2М от глубины проникновения индентора в поверхность исходного образца (1) и модифицированных образцов ионно-ассистируемым осаждением Ti -покрытий при ускоряющих напряжениях: 2 – 3 кВ; 3 – 6 кВ; 4 – 9 кВ; 5 – 12 кВ

Изменение микротвердости поверхности сплава алюминия марки АМг2М при ионно-ассистируемом осаждении покрытий обусловлено, по-видимому, конкуренцией двух механизмов. Один механизм – это формирование на поверхности сплава алюминия слоев с повышенными прочностными свойствами. Причинами увеличения микротвердости, как известно, являются образование в приповерхностных областях карбидов металлов и структурных дефектов, формируемых при ионно-лучевом воздействии в разных условиях модифицирования образцов, а также твердорастворное упрочнение, обусловленное присутствием атомов легирующих элементов в алюминии. Второй механизм связан с разупрочнением приповерхностных слоев полученных структур. При осаждении покрытий в приповерхностных слоях сформированных структур содержится водород. Нами ранее были проведены исследования методом ядерных реакций [7], которые установили, что в покрытиях, полученных ионно-ассистируемым осаждением, содержится ~6–10 ат. % водорода, что приводит к уменьшению прочности поверхности образца.

Заключение. В результате выполненных исследований установлена возможность управления шероховатостью поверхности пленки и ее смачиваемостью путем изменения ускоряющего напряжения для ассистирующего осаждения

покрытия ионов Ti^{+} и их дозы при модифицировании сплава алюминия АМг2М. Средняя шероховатость модифицированных образцов сплава АМг2М снижалась при увеличении ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^{+} до 8,5 нм при $U = 6$ кВ и 14,4 нм при $U = 12$ кВ. При внедрении сравнимых доз ионов титана в образцы сплава с ростом ускоряющего напряжения значения РКУС поверхности также увеличивались. Исходная поверхность сплава была гидрофильной ($\theta = 64,8^{\circ}$) и оставалась такой после модифицирования при $U = 12$ кВ. Однако

повышение ускоряющего напряжения для ассистирующих ионов Ti^{+} до значений $U = 9, 12$ кВ приводит к увеличению значения РКУС, что позволяет предположить дальнейшее повышение значения краевого угла смачивания при росте ускоряющего напряжения и, соответственно, может вызвать гидрофобизацию поверхности. Относительное изменение микротвердости модифицированных образцов увеличилось на 13–15% ($U = 3, 6$ кВ) и уменьшилось на 8% ($U = 9$ кВ) при малых нагрузках на индентор микротвердомера.

Литература

1. Давыдов В. Г. О некоторых актуальных проблемах разработки алюминиевых сплавов и технологий для авиакосмического применения // Известия вузов. Цветная металлургия. 2001. № 4. С. 32–36.
2. Анищик В. М., Васильева Л. А., Жукова С. И. Влияние имплантации высокоэнергетических ионов неона на структуру сплава алюминий-марганец // Физика и химия обработки материалов. 1998. № 1. С. 5–8.
3. Углов В. В., Черенда Н. Н., Кулешов А. К. Трибологические свойства углеродных покрытий, осажденных на алюминий // Взаимодействие излучения с твердым телом: материалы III Междунар. науч. конф., Минск, 6–8 окт. 1999 г.: в 2 ч. / Белорус. гос. ун-т. Минск, 1999. Ч. 2. С. 270–272.
4. Бобрович О. Г., Ташлыков И. С., Тульев В. В. Микротвердость поверхности сталей марок 40Х, 45 и СТ3, модифицированной осаждением тонких покрытий в условиях ассистирования ионами титана и кремния // Труды БГТУ. 2012. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 78–81.
5. Морфология и свойства поверхности сплава АМг2М, модифицированного осаждением молибдена в условиях ионного ассистирования / О. Г. Бобрович [и др.] // Труды БГТУ. Сер. 3, Физ.-мат. науки и информатика. 2018. № 2. С. 62–66.
6. Ташлыков И. С., Туровец А. И. Свойства поверхности системы Мо/подложка, формируемой при ионном ассистировании // Взаимодействие излучений с твердым телом: материалы X Междунар. науч. конф., Минск, 24–27 сент. 2013 г. / Белорус. гос. ун-т. Минск, 2013. С. 314–316.
7. Изучение ядерно-физическими методами металлосодержащих (Ti, Co)-покрытий, осажденных методом ионного ассистирования на кремний / О. Г. Бобрович [и др.] // Физика и химия обработки материалов. 2006. № 1. С. 54–58.

References

1. Davydov V. G. On some topical problems of the development of aluminum alloys and technologies for aerospace applications. *Izvestiya vuzov. Tsvetnaya metallurgiya* [Proceedings of high schools. Non-ferrous metallurgy], 2001, no. 4, pp. 32–36 (In Russian).
2. Anishchik V. M., Vasil'eva L. A., Zhukova S. I. Effect of high-energy implantation of neon ions at the alloy of aluminum and manganese. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 1998, no. 1, pp. 5–8 (In Russian).
3. Uglov V. V., Cherenda N. N., Kuleshov A. K. [Tribological properties of carbon coatings deposited on aluminum]. *Materialy III Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Vzaimodeystviye izlucheniya s tverdyim telom)* [Materials of III International Scientific Conference (Interaction of radiation with solids)]. Minsk, 1999, part 2, pp. 270–272 (In Russian).
4. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V. Microhardness of the surfaces of steels 40X, 45 and ST3 modified by deposition of thin coatings under the conditions of titanium and silicon ions. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], 2012, no. 6: Physics and mathematics. Informatics, pp. 78–81 (In Russian).
5. Bobrovich O. G., Barayshuk S. M., Turovets A. I., Yaskel'chik V. V. Morphology and surface properties of alloy 5251, modified by deposition of molybdenum in conditions of ion assistance. *Trudy BGTU* [Proceedings of BSTU], series 3, Physics [and mathematics. Informatics], 2018, no. 2, pp. 62–66 (In Russian).
6. Tashlykov I. S., Turovets A. I. [The surface properties of the Mo system/substrate formed by ion assisting]. *Materialy X Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii (Vzaimodeystviye izlucheniya s tverdyim telom)* [Materials of X International Scientific Conference (Interaction of radiation with solids)]. Minsk, 2013, pp. 314–316 (In Russian).

7. Bobrovich O. G., Tashlykov I. S., Tul'ev V. V., Barayshuk S. M. The study of nuclear-physical methods of metal (Ti, Co)-coating deposited by ion-assisting of on silicon. *Fizika i khimiya obrabotki materialov* [Physics and chemistry of material processing], 2006, no. 1, pp. 54–58 (In Russian).

Информация об авторах

Бобрович Олег Георгиевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

Яскельчик Валентин Валентинович – ассистент кафедры химии, технологии электрохимических производств и материалов электронной техники. Белорусский государственный технологический университет (220006, г. Минск, ул. Свердлова, 13а, Республика Беларусь). E-mail: yaskelchik@belstu.by

Information about the authors

Bobrovich Oleg Georgievich – PhD (Physics and Mathematics), Assistant Professor, the Department of Physics. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: olegbobrovich@belstu.by

Yaskel'chik Valentin Valentinovich – assistant lecturer, the Department of Chemistry, Technology of Electrochemical Productions and Electronic Engineering Materials. Belarusian State Technological University (13a, Sverdlova str., 220006, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: yaskelchik@belstu.by

Поступила 15.05.2019

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ	5
МАТЕМАТИКА	5
Борковская И. М., Пыжкова О. Н. Построение регуляторов по типу обратной связи для решения задач стабилизации и управляемости динамических систем.....	5
Соловьева И. Ф. Исследование влияния малого параметра на решение граничных задач с пограничным слоем.....	12
Якименко А. А. Достаточное условие модальной управляемости для систем нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями	17
Можей Н. П. Специально редукирующие однородные пространства	22
ФИЗИКА	28
Наркевич И. И. Статистическое обоснование предсказанного Бразовским перехода термодинамической системы из однородного состояния в неоднородное.....	28
Наркевич И. И., Фарафонтова Е. В. Разработка компьютерной программы для расчета структурных и термодинамических характеристик кристаллических наночастиц разных размеров.....	34
Карлович Т. Б., Сухоцкий А. Б., Данильчик Е. С. Температурное распределение в слое загрязнения оребренной трубы с учетом неравномерного нагрева теплоотдающей поверхности	40
Тульев В. В. Влияние плотности потока ассистирующих ионов на толщину покрытия, полученного методом динамического атомного перемешивания.....	46
ИНФОРМАТИКА И ТЕХНИЧЕСКИЕ НАУКИ	51
МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ И УПРАВЛЕНИЕ В ТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ	51
Урбанович П. П. Моделирование и анализ надежностных параметров полупроводниковой памяти информационно-вычислительных устройств.....	51
Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Оробей И. О., Сухорукова И. Г. Математическая модель формирования измерительного сигнала в электрокинетическом преобразователе переменного сдвига	58
Гринюк Д. А., Олиферович Н. М., Сухорукова И. Г. Метод настройки ПИД-регулятора через deadbeat-регулятор на различные интегральные критерии.....	66
Акиншева И. В. Математическое моделирование и проектирование комплекса для перемещения грузов на подвесе	74
Тимофеев А. М. Скорость передачи информации однофотонного канала связи с приемным модулем на основе счетчика фотонов с мертвым временем продлевающегося типа	79
СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ И ОБУЧАЮЩИЕ СИСТЕМЫ	87
Герман Ю. О., Герман О. В., Богатко И. Н. Моделирование процесса обучения на основе кластерного подхода	87

ОБРАБОТКА И ПЕРЕДАЧА ИНФОРМАЦИИ	93
Хворост В. С., Шутько Н. П. Веб-сайт как инструмент продвижения компании в сети интернет (на примере разработки прототипа сайта для студии дизайна интерьера)	93
АЛГОРИТМИЗАЦИЯ И ПРОГРАММИРОВАНИЕ.....	101
Буснюк Н. Н. Разновидности задачи сетевого планирования, некоторые методы их решения и алгоритмические оценки	101
КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ.....	105
ФИЗИКА.....	105
Мадьяров В. Р. Определение времени релаксации носителей в полупроводниках с помощью частотных зависимостей фазового сдвига зондирующего СВЧ-излучения.....	105
Лапко А. Н., Мисевич А. В., Почтенный А. Е. Фотоэлектрические свойства гетеро-структуры фталоцианин меди – перилен.....	109
Бобрович О. Г., Яскельчик В. В. Морфология и свойства поверхности сплава АМг2М, модифицированного осаждением титана в условиях ионного ассистирования	113

CONTENTS

.....

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES	5
MATHEMATICS	5
Borkovskaya I. M., Pyzhkova O. N. The construction of regulators on type of feedback for solving the problems of stabilization and controllability of dynamic systems	5
Solov'yeva I. F. Study of the influence of a small parameter on the solution of boundary problems with a boundary layer	12
Yakimenka A. A. Sufficient condition of modal controllability for neutral type systems with commensurate delays	17
Mozhey N. P. Specially reductive homogeneous spaces	22
PHYSICS	28
Narkevich I. I. Statistical justification of the predicted Brazovian transition of a colloidal solution from a unique condition to a inhomogeneous	28
Narkevich I. I., Farafontova E. V. Development of a computer program for the calculation of the structural and thermodynamic characteristics of crystalline nanoparticles of different sizes	34
Karlovich T. B., Sykhotskii A. B., Danilchik E. S. Temperature distribution in the contamination layer of the finned pipe taking into account the uneven heating of the heat-release surface	40
Tul'ev V. V. Effect of the density of the flow of assistant ions on the coating thickness obtained by the dynamic atomic mixing method	46
COMPUTER SCIENCE AND ENGINEERING SCIENCES	51
MODELLING OF PROCESSES AND MANAGEMENT IN TECHNICAL SYSTEMS	51
Urbanovich P. P. Modeling and analysis of reliable parameters of semiconductor memory of information and computing devices	51
Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Orobei I. O., Suhorukova I. G. Mathematical model of formation of measuring signal in electrokinetic converter of variable shift	58
Hryniuk D. A., Oliferovich N. M., Suhorukova I. G. Method of PID-controller tuning through deadbead-regulator for various integral criteria	66
Akinsheva I. V. Mathematical modeling and designing of the complex for transportation of loads on pendent	74
Timofeev A. M. Information transfer rate of a single photon communication channel with a receiver module based on a photon counter with a dead time of a prolonged type	79
SYSTEMS ANALYSIS AND TRAINING SYSTEMS	87
German Yu. O., German O. V., Bogatko I. N. Modelling of the process of learning on the basis of clusterization approach	87
ALGORITHMIC AND PROGRAMMING	93
Hvorost V. S., Shut'ko N. P. Website as a tool of company promotion in the internet (on the example of a prototype site of an interior design studio)	93

PROCESSING AND TRANSMISSION OF INFORMATION	101
Busnyuk N. N. Varieties of the network planning problem, some methods of their solution and algorithmic estimates	101
BRIEF MESSAGES	105
PHYSICS	105
Mad'yarov V. R. Estimation the relaxation time of the carriers in semiconductors using the phase shift frequency dependences of the probing microwave radiation.....	105
Lappo A. N., Misevich A. V., Pochtenny A. E. Photoelectric properties of copper phthalocyanine – perylene heterostructure	109
Bobrovich O. G., Yaskel'chik V. V. Morphology and surface properties of alloy 5251, modified by deposition of titanium in conditions of ion assistance	113

Редактор *Е. С. Ватечкина*
Компьютерная верстка *О. А. Солодкевич, А. А. Селиванова, Е. В. Ильченко*
Корректор *Е. С. Ватечкина*

Подписано в печать 13.09.2019. Формат 60×84¹/₈.
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать ризографическая.
Усл. печ. л. 14,2. Уч.-изд. л. 15,5.
Тираж 100 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
изготовителя, распространителя печатных изданий
№ 1/227 от 20.03.2014.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.