УДК 625.033.38

Н.П. Вырко, профессор; А.М. Волк, доцент; И.И. Тумашик, ассистент;
С.В. Ярмолик, ассистент

МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ПРОЧНОСТИ ЛЕСНЫХ ТРАНСПОРТНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПУТЕЙ

In this article present mathematical model which designed as functions to toughness of the transport way from time with provision for influences is waited-climatic factor and volume wood. Using divined mathematical model with provision for parameter, characterizing type of the covering and condition to usages, on the grounds of given field studies with sufficient validity possible to forecast the full destruction to road design that.

В период эксплуатации лесотранспортных путей нарушается их прочность и устойчивость под воздействием различных погодно-климатических факторов. В связи с этим возникает необходимость оценки прочности лесных транспортно-технологических путей и определения вероятности их отказа. Для этого разработана математическая модель, являющаяся функцией прочности транспортного пути от времени, с учетом воздействия погодно-климатических факторов и объема вывозки заготавливаемой древесины. Используя данную математическую модель с учетом параметров, характеризующих тип покрытия и условия эксплуатации, на основании данных полевых исследований с достаточной достоверностью можно прогнозировать полное разрушение дорожной конструкции, что, в свою очередь, позволит рассчитывать конкретные сроки проведения ремонтов и упрочнения лесотранспортных путей.

Модуль упругости, характеризующий прочность грунтов земляного полотна и общий модуль упругости дорожной одежды $E_{общ}$, изменяется в течение года, т. е. модуль упругости является случайной величиной – функцией времени $E_{общ}(t)$. Дорожная конструкция считается работоспособной, если общий модуль упругости на ее поверхности $E_{общ}(t)$ находится в пределах

$$0{,}95E_{тр} < E_{общ}(t) < 1{,}05E_{тр}, \tag{1}$$

где $E_{тр}$ – требуемый модуль упругости дорожной конструкции, МПа.

Для оценки надежности дорожного покрытия рассмотрим распределение минимумов функции E(t). Дорожная конструкция будет работоспособной, если ее минимумы укладываются в пределы допуска при любом x ($x = E_{max} - E_{min}$), т.е. $x_{min} > x_{крит} = \alpha E_{тр}$. На достаточно большом промежутке времени $[0,+\infty]$ можно говорить о распределении и рассматривать случайную величину его минимумов $\xi = x$. Для этого используем распределение вида

$$f(x;\theta,p,c) = \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\right). \tag{2}$$

Распределение (2) обобщает гамма-распределение (c = 1), распределения: Релея (p = 2, c = 2), Вейбулла – Гнеденко (p = c), Максвелла (p = 3, c = 2). Данные распределения применяются в статистических методах исследования физических процессов, в теории надежности и др. [1, 2].

Параметр θ является параметром масштаба, а p и c есть параметры формы. Выполним переход к безразмерной случайной величине $\eta=\xi/\theta$:

$$f(t;\theta,p,c) = \frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}t^{p-1}\exp\left(-t^{c}\right). \tag{3}$$

Функция распределения непрерывной случайной величины η

$$F(t;\theta,p,c)=\frac{|c|}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_0^t \tau^{p-1}\exp\left(-\tau^c\right)d\tau \tag{4}$$

заменой $\tau^c=z$ сводится к неполной гамма-функции [3].

Если $c>0$, то

$$F(t;\theta,p,c)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_0^{t^c} z^{\frac{p}{c}-1}\exp(-z)dz=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^c\right),$$

а при $c<0$

$$F(t;\theta,p,c)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\int_{+\infty}^{t^c} z^{\frac{p}{c}-1}\exp(-z)dz=1-\frac{1}{\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\gamma\left(\frac{p}{c},t^c\right).$$

Если $\frac{p-1}{c}>0$, то распределение (2 – 4) имеет моду $x_{mod}=\theta t_{mod}=\theta\left(\frac{p-1}{c}\right)^{\frac{1}{c}}$.

Для функции распределения мода будет точкой перегиба. На рисунке показаны графики функций плотности случайной величины η для различных значений параметров p и c.

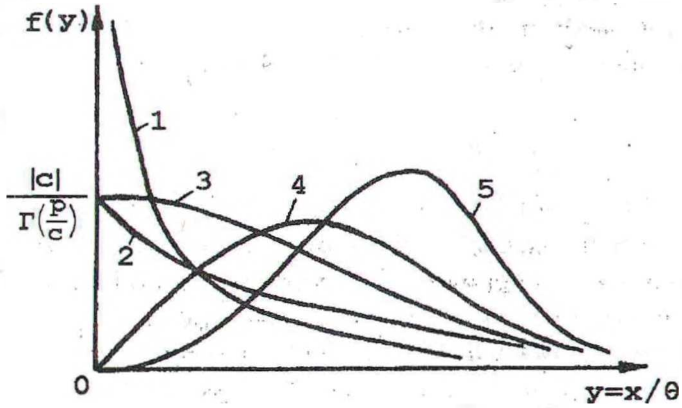

Рис. Функция плотности распределения (3) случайной величины η:
$1 - 0<p<1,\ c>0$ или $p<0,\ c<0$; $2 - p=1,\ 0<c\le 1$;
$3 - p=1,\ c>1$; $4 - 1<p\le 2,\ c>0$; $5 - p>2,\ c>0$

Выполним статистическую оценку параметров распределения (3) методом наибольшего правдоподобия.

Пусть имеется некоторая выборка $X=(x_1, x_2,..., x_n)$ генеральной совокупности обобщенного Г-распределения.

Рассмотрим функцию правдоподобия

$$L=\prod_{i=1}^{n}\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left\{-\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}=\frac{|c|}{\theta^{np}\Gamma^n\left(\frac{p}{c}\right)}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\right\}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{p-1}. \tag{5}$$

Прологарифмируем ее и рассмотрим функцию

$$F=\frac{\ln L}{n}=\ln\frac{|c|}{\theta}-\ln\Gamma\left(\frac{p}{c}\right)+(p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c. \qquad (6)$$

Максимум данной функции совпадает с максимумом функции правдоподобия (5). Находим частные производные функции F:

$$\frac{\partial F}{\partial\theta}=-\frac{p}{\theta}+\frac{c}{\theta}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c;\quad \frac{\partial F}{\partial p}=-\frac{1}{c}\psi\left(\frac{p}{c}\right)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta};$$

$$\frac{\partial F}{\partial c}=\frac{1}{c}+\frac{p}{c^2}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\theta}.$$

Из уравнения $\partial F/\partial\theta=0$ получим оценку наибольшего правдоподобия для параметра масштаба θ, если p и c известны:

$$\theta=\left(\frac{c}{p}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,c}\right)^{\frac{1}{c}}. \qquad (7)$$

Если известны θ и c, то уравнение правдоподобия

$$\frac{1}{c}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}=0 \qquad (8)$$

имеет единственное решение $p=c\,\psi^{-1}\left(\frac{c}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}\right)$ относительно параметра p, так как логарифмическая производная гамма-функции монотонно возрастает, непрерывна в интервале $(0,+\infty)$ и принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ [3].

Уравнение правдоподобия

$$\frac{1}{c}+\frac{p}{c^2}\psi\left(\frac{p}{c}\right)-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^c\ln\frac{x_i}{\theta}=0 \qquad (9)$$

разрешимо относительно параметра c при известных θ и p. Решение уравнений (7–9) дает статистическую оценку параметров распределения (3–4).

Проведенный анализ позволил установить, что распределение Вейбулла – Гнеденко наиболее подходит для лесотранспортных путей, имеющих грунтовое и гравийное покрытия ввиду равенства параметров формы. Рассмотрим распределение Вейбулла – Гнеденко (при $c=p$)

$$f(x;\theta,p,c)=\frac{|p|}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{p-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^p\right), \qquad (10)$$

$$F(x)=1-\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^p\right). \qquad (11)$$

Составим функцию F

$$F=\frac{\ln L}{n}=\ln\frac{|p|}{\theta}+(p-1)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{x_i}{\theta}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i}{\theta}\right)^p.$$

Уравнения правдоподобия для этой функции будут

$$\theta = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^{\,p} \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{x_i}{\theta} \right)^{c} \right) \ln \frac{x_i}{\theta} = 0 . \qquad (12)$$

Решение этих уравнений при заданной выборке дает значения параметров функции (10) и (11).

Для решения полученных уравнений составлена программа в пакете математического моделирования MathCAD. Применяя данную методику, можно рассчитать сроки проведения работ по повышению прочности лесных транспортно-технологических путей в зависимости от их текущего состояния.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гнеденко Б.В., Беляев Ю.К., Соловьев А.Д. Математические методы в теории надежности. – М., 1965. – 236 с.
2. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1984. – Т. 2. – 738 с.
3. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции: формулы, графики, таблицы. – М.: Наука, 1977. – 458 с.