УДК 536.242

В.М. Собин

ТЕПЛООБМЕН ПРИ ЛАМИНАРНОМ СТЕКАНИИ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ НА ТЕРМИЧЕСКОМ НАЧАЛЬНОМ УЧАСТКЕ И ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ПЕРВОГО РОДА

Свободное стекание пленок жидкости широко используется в различных областях промышленности и позволяет интенсифицировать процессы тепломассообмена.

Разработка надежных методов расчета процессов тепломассообмена в стекающих пленках жидкости требует развития как экспериментальных, так и теоретических исследований. Однако при аналитическом описании таких задач, даже в предположении плоской поверхности пленки, возникают значительные математические трудности. Для теплообмена в ламинарно стекающей с параболическим профилем скорости пленки жидкости на термическом начальном участке до настоящего времени известно приближенное решение Нуссельта [1] и решение [2], полученные для постоянной температуры стенки. В [2] решение представлено через вырожденную гипергеометрическую функцию и справедливо при относительно больших значениях безразмерной продольной координаты. В [3] также при постоянной температуре стенки найдено численное решение.

Данная работа в основном предпринята с целью установления возможности применения излагаемого ниже метода к подобным задачам. Однако полученное решение представляет и самостоятельный интерес. Рассматривается теплообмен на термическом начальном участке при ламинарном стекании пленки жидкости по вертикальной поверхности и граничных условиях первого рода. При этом течение считается гидродинамически стабилизированным с параболическим профилем скорости, физические свойства жидкости считаются постоянными.

При этих предположениях уравнение конвективного теплообмена с соответствующими условиями имеет вид

$$(2\eta-\eta^2)\frac{\partial\theta}{\partial\xi}=\frac{\partial^2\theta}{\partial\eta^2}, \tag{1}$$

$$\theta(0,\eta)=0;\ \theta(\xi,0)=\theta_c(\xi);\quad \frac{\partial\theta(\xi,1)}{\partial\eta}=0. \tag{2}$$

7 Зак. 5808

В (1), (2) $\theta = t - t_н$; $\theta_c = t_c - t_н$; $t_н$, t_c – температура жидкости на входе и стенки; $\eta = y/\delta, \xi = x/\delta$ Pe–безразмерные координаты; x,y–продольная и поперечная координаты; δ – толщина пленки; $Pe = u_o\delta/a$ – число Пекле; u_o – скорость на свободной поверхности пленки; a – коэффициент температуропроводности жидкости.

Для приближенного решения (1), (2) используется интегральный метод [4], сущность которого сводится к априорному заданию профиля температур функцией с двумя неизвестными обобщенными координатами, что позволяет наиболее полно учесть особенности профиля. Подобный метод хорошо зарекомендовал себя при решении одномерных нестационарных задач теплопроводности. При этом в теории теплопроводности параметр профиля назначается произвольно [5] или определяется из некоторых дополнительных условий [6]. Однако установлено, что параметр профиля сильно влияет на точность аппроксимации профиля. В настоящем методе параметр профиля находится в процессе решения из законов сохранения, непосредственно следующих из дифференциального уравнения. Последнее позволяет существенно повысить точность и расширить возможности применения метода.

По длине ξ выделим два характерных участка: участок тепловой стабилизации и участок стабилизированного теплообмена.

На участке тепловой стабилизации происходит развитие теплового пограничного слоя, и профиль температур с хорошим приближением можно представить в виде

$$\theta = \theta_c \left[1 - \frac{\eta}{q(\xi)} \right]^{s_1}. \tag{3}$$

Здесь s_1 – параметр профиля; $q(\xi)$ – толщина теплового пограничного слоя. Участок тепловой стабилизации заканчивается при q=1.

На участке стабилизированного теплообмена осуществляется изменение температуры θ_1 на границе $\eta = 1$, и профиль температур будем искать в виде

$$\theta = (\theta_c - \theta_1)(1 - \eta)^{s_2} + \theta_1. \tag{4}$$

Таким образом, для определения неизвестных функций q, θ_1 и параметров s_1, s_2 необходимо иметь по два уравнения на каждом участке.

Поясним, например, метод нахождения q и s_1. Находя первый интеграл (1) с учетом (3), приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка относительно q, последующее интегрирование которого дает соотношение для определения q с неизвестным параметром s_1. Умножая (1) на θ и интегрируя в пределах пограничного слоя, после соответствующих преобразований и последующего интегрирования находим второе соотношение для q. Сопоставление найденных соотношений для q приводит к уравнению связи для определения s_1.

Аналогичным образом находятся θ_1 и s_2 на втором участке.

В результате для участка тепловой стабилизации находим следующие два уравнения:

$$\frac{s_1\theta_c}{q} = \frac{2}{(s_1+1)(s_1+2)}\frac{d}{d\xi}[\theta_c(q^2 - \frac{1}{s_1+3}q^3)], \tag{5}$$

$$\frac{s_1(s_1-1)}{2s_1-1}\cdot\frac{\theta_c^2}{q} = \frac{1}{(2s_1+1)(2s_1+2)}\frac{d}{d\xi}[\theta_c^2(q^2 - \frac{1}{2s_1+3}q^3)]. \tag{6}$$

Для произвольной θ_c приближенные решения нелинейных уравнений (5) и (6) могут быть получены методом возмущений, считая коэффициенты при q^3 в правых частях малыми параметрами. Сопоставление полученных уравнений приводит к уравнению связи для определения s_1 в общем случае.

Для возможности сопоставления с известными решениями приведем более подробные результаты в случае θ_c = const. В этом случае уравнения (5) и (6) интегрируются непосредственно. Сопоставление последних при q= 1 дает

$$96s_1^4 + 194s_1^3 - 167s_1^2 - 405s_1 - 90 = 0,$$

положительный корень которого – $s_1 = 1{,}4583$. Из уравнения (6) также найдено явное выражение для q, которое имеет вид

$$q = (C_1\xi)^{1/3} + \frac{3}{8(2s_1+3)}(C_1\xi)^{1/3}. \; C_1 = \frac{3s_1(s_1^2-1)(2s_1+1)}{2s_1-1}. \tag{7}$$

Для участка стабилизированного теплообмена соответственно имеем

$$s_2(\theta_c - \theta_1) = 2\frac{d}{d\xi}[\frac{\theta_c - \theta_1}{(s_1+1(s_1+2)} + \frac{1}{3}\theta_1], \tag{8}$$

$$s_2(\theta_c - \theta_1)[1 - \frac{s_2(\theta_c-\theta_1)}{2s_2-1}] = \frac{d}{d\xi}[\frac{(\theta_c-\theta_1)^2}{(2s_1+1)(2s_1+3)} + \frac{2\theta_1(\theta_c-\theta_1)}{(s_2+1)(s_2+3)} + \frac{1}{3}\theta_1^2]. \tag{9}$$

Разрешая (9) относительно $s_2(\theta_c-\theta_1)$ и сравнивая с (8), можно найти уравнение связи для s_2 в общем случае. В случае θ_c = const находим

$$4s_2^3 + 20s_2^2 - 7s_2 - 38 = 0$$

действительным положительным корнем $s_2 = 1{,}3667$,

8 Зак. 5808

Табл. 1. **Сравнение средних чисел $\overline{Nu}$**

ξ	$6{,}66\cdot 10^{-3}$	0,02	0,05	0,1	0,5	1	2	∞
Данный метод	5,721	3,984	2,812	2,398	2,020	1,973	1,949	1,926
Решение Нуссельта [1]	5,433	3,837	2,947	2,498	1,959	1,946	1,915	1,883
Численное решение [3]	5,550	3,760	2,800	2,450	1,960	1,900	1,870	

$$\theta_1 = \theta_c \left\{1 - \exp\left[-c_2(\xi - \xi_1)\right]\right\},\ C_2 = \frac{3(s_2+1)(s_2+3)}{2(s_2+4)}, \tag{10}$$

где ξ_1 – безразмерная длина участка тепловой стабилизации, равная по (7) $\xi_1 = 0{,}0804$.

С учетом (7) и (10) найдены локальные числа Нуссельта $Nu = \alpha\delta/\lambda$ соответственно на первом и втором участках:

$$Nu = \frac{s_1}{q} \Big/ \left[1 - \frac{3}{(s_1+1)(s_1+2)} q^2 + \frac{3}{(s_1+1)(s_1+2)(s_1+3)} q^3\right], \tag{11}$$

$$Nu = \frac{(s_2+1)(s_2+3)}{s_2+4} = \text{const} = 1{,}9257\,. \tag{12}$$

Из (11) имеем следующее соотношение для среднего числа Nu на участке тепловой стабилизации:

$$\overline{Nu} = -\frac{2}{3\xi}\ln\left[1 - \frac{3}{(s_1+1)(s_2+2)} q^2 + \frac{3}{(s_1+1)(s_2+2)(s_1+3)} q^3\right]. \tag{13}$$

Результаты сравнения средних чисел $\overline{Nu}$, вычисленных по (12) и (13) и по данным [1], [3], представлены в табл. 1. Из таблицы видно, что наблюдается очень хорошее согласование результатов, которое может свидетельствовать о применимости метода к подобным задачам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Воронцов Е.Г., Тананайко Ю.М. Теплообмен в жидкостных пленках. – Киев, 1972. – 194 с. 2. Beschkov V., Boyadjiev C., Peev C. On the mass transfer into a falling laminar film with dissolution. – Chem. Eng. Sci., 1978, 33, p. 65. 3. Seban R.A. Faghri A. Wave effects on the transport to

falling laminar liquid films. – Trans ASME J. Heat transfer, 1978,100, N 1, p. 143. 4. С о б и н В.М. Теплообмен в стекающей пленке жидкости на термическом начальном участке. – ИФЖ, 1980, т. 39, № 4, с. 592–596. 5. B i o t M.A. Variational princeples in heat transfer. – Oxford University Press, 1970, p. 31. 6. V u j a – n o v i c B., D j u k i c Dj. On the variational princeple of Hamilton's type for nonlinear heat transfer problem. – Jnt. J. Heat Mass Transfer, 1972, 15, N 5, p. 1111.