УДК 519.254

Доц. А.М. Волк
(БГТУ, г. Минск)

АНАЛИЗ ДИСПЕРСНОГО СОСТАВА ЧАСТИЦ ДРОБЛЕНИЯ

Многие процессы в различных отраслях промышленности происходят с дисперсными системами. Это тепло- и массообмен, сепарация в аппаратах химической промышленности, процессы дробления промышленных материалов, изготовление вяжущих смесей и красок, сгорание горючих веществ, очистка выбросов от опасных компонентов и т. д. Качественный анализ дисперсной системы позволяет повысить эффективность расчетов исследуемых процессов. При этом необходимо знать распределение частиц по размерам δ и выразить определенные характеристики дисперсного состава среды. Такими характеристиками являются средние диаметры частиц: δ_{10} – средний диаметр; δ_{20} – средний квадратичный диаметр; δ_{30} – средний кубический диаметр; δ_{32} – средний кубический диаметр, взвешенный по удельной поверхности (средний диаметр Заутера); δ_{31} – средний кубический диаметр, взвешенный по суммарной длине (средний диаметр Проберта) [1].

Если известна плотность распределения количества частиц по их размерам $f(\delta)$, то средние значения могут быть выражены общей формулой

$$\delta_{pq}^{p-q} = \left(\int_0^{+\infty} \delta^p f(\delta)d\delta\right) / \left(\int_0^{+\infty} \delta^q f(\delta)d\delta\right) \qquad (1)$$

Из (1) следуют соотношения:

$$\delta_{pq}^{p-q}\delta_{pl}^{p-l} = \delta_{pl}^{p-l}; \quad \delta_{pq}^{p-q} = \left(\delta_{qp}^{q-p}\right)^{-1}.$$

Средние значения могут быть выражены через начальные моменты распределения случайной величины δ:

$$\delta_{pq}^{p-q} = \nu_p / \nu_q.$$

Доминирующее положение в теории вероятностей и математической статистике занимает нормальный закон распределения непрерывной случайной величины. Разумовский предложил данным законом описывать распределение логарифмов веса частиц золота в пробах [2]. Колмогоров теоретически обосновал логарифмически нормальный закон распределения объемов частиц дробления [3, 4]

$$f(\delta) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}\lg\sigma} e^{-\frac{(\lg\delta - \lg\delta_m)^2}{2\lg^2\sigma}}, \qquad (2)$$

где δ_m – медиана распределения объема; $lg\sigma$ – среднеквадратическое отклонение логарифмов диаметров частиц от их среднего диаметра.

Данный закон получен при условии, что скорость дробления постоянна, и требует эмпирического определения параметров.

Из эмпирических распределений наиболее популярным является распределение Вейбулла – Гнеденко [4, 5] с функцией распределения массы частиц по их диаметрам:

$$F(\delta) = 1 - \mathrm{e}^{-b\delta^n}. \tag{3}$$

При двойном дифференцировании функции остатка

$$R(\delta) = \mathrm{e}^{-b\delta^n}$$

получается линейная зависимость, и параметры могут быть найдены без сложных вычислений [4]: графически или методом наименьших квадратов.

В [4, 6, 7] показано, что обобщением многих аналитических форм для законов статистического распределения однокомпонентных случайных величин служит функция плотности

$$f(\delta) = A\delta^m \mathrm{e}^{-b\delta^n}, \tag{4}$$

имеющая степенно-показательный вид и содержащая четыре параметра: A, m, b, n.

Шифрин [8] описал свойства функции (3) и с ее помощью – распределение в облаках количества капель по их диаметрам. Лышевский [6], использовав (3) для описания распределения количества капель по их диаметрам при распыливании топлива дизельными форсунками, получил коэффициент A и моду распределения. Авдеев [7] на основе (3) описывал распределение массы по диаметрам взвешенных твердых частиц. Им дан способ нахождения параметров распределения по четырем специально выбранным опытным значениям. Этот способ не выясняет смысла параметров распределения и требует сложных вычислений.

Широко применяемые законы распределения Колмогорова (2) и Вейбулла – Гнеденко (3) не дают достаточно точного распределения близких к нулю размеров частиц. Наиболее точны четырех параметрические формулы, но возникают некоторые трудности при определении их параметров [4].

Распределения (4) рассмотрено в работе [9] и названо обобщенным гамма-распределением. Функцию плотности данного распределения удобно представить в виде

$$f(x)=\frac{|c|}{\theta\Gamma\left(\frac{b}{c}\right)}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{b-1}\exp\left(-\left(\frac{x}{\theta}\right)^{c}\right). \qquad (5)$$

Данное распределение рассматривалось ранее и было переоткрыто позднее другими исследователями [10].

Гамма распределения более полутора столетий используются при моделировании реальных процессов и явлений. Обобщенное гамма-распределение также используется в теории надежности, при прогнозировании продолжительности лечения и затрат на медицинское обслуживание, в расчетах инженерных рисков и рисков катастроф (землетрясений и наводнений), при обработке изображений и дистанционном зондировании, в качестве моделей распределения доходов [11, 12].

При описании дисперсного состава частиц дробления обобщенным гамма-распределением для определения его параметров может быть использован метод моментов [13]. Но данный метод не выявляет свойств оценок и не гарантирует их единственность. Автор данной работы независимо от других авторов, определился с названием распределения (1), рассмотрел его свойства и предложил статистическую оценку параметров методом максимального правдоподобия [14, 15]. Метод максимального правдоподобия требует решения трех алгебраических уравнений, что не сложно выполнить с помощью математических пакетов прикладных программ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Распыливание жидкостей / Ю. Ф.Дитякин, Л. А. Клячко, Б.В.Новиков, В. И. Ягодкин. – М.: Машиностроение, 1977. – 208 с.

2. Разумовский Н. К. Характер распределения содержаний металла в рудных месторождениях / Н. К. Разумовский // Доклады АН СССР. – 1940. – Т. 28. – С. 55–57.

3. Колмогоров, А. Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении / А. Н. Колмогоров // Доклады АН СССР. – 1944. – Т. 31. – С. 99–101.

4. Коузов П. А. Основы анализа дисперсного состава промышленных пылей и измельченных материалов / 3-е изд., перераб. – Л.: Химия, 1987. – 264 с.

5. Вадзинский Р. Н. Справочник по вероятностным распределениям. – СПб.: Наука, 2001. – 295 с.

6. Лышевский А. С. Процессы распыливания топлива дизельными форсунками. – М.: Машгиз,1963. – 180 с.

7. Авдеев Н. Я. Об аналитическом методе расчета седиментометрического анализа / Н. Я. Авдеев. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростов, гос. универ., 1964. – 202 с.
8. Шифрин К. С. О вычислении радиационных свойств облаков // Труды ГГО им. А.И. Воейкова. – 1955. – Вып. 46 (108). – С. 5–33
9. Stacy E. W. A generalization of the gamma distribution // Ann. Math. Statistics. 1962. Vol. 33. P. 1187–1192.
10. Кудрявцев А. А. О представлении гамма-экспоненциального и обобщенного отрицательного биномиального распределений // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13. – Вып. 4. – С. 76–80.
11. Королев В. Ю., Крылов В. А., Кузьмин В. Ю. Устойчивость конечных смесей обобщенных гамма-распределений относительно возмущений параметров // Информатика и ее применения. – 2011. – Т. 5. – Вып. 1. – С. 31–38.
12. Кудрявцев А. А. Априорное обобщенное гамма-распределение в байесовских моделях баланса // Информатика и ее применения. – 2019. – Т. 13.– Вып. 3. – С. 27–33.
13. Левданский Э. И., Волк А. М., Плехов И. М. О законе распределения частиц при дроблении // ТОХТ. – 1986. – № 5. – С. 672-677.
14. Волк А. М. Обобщенное гамма–распределенние // Актуальные проблемы информатики: Сб. трудов VI Междун. науч. конф. (26–30 окт. 1998 г., Минск): В 3 ч. Ч.2 . – Мн.: БГУ, 1998. – С. 426-432.
15. Волк А. М. Статистическая оценка параметров обобщенного гамма-распределения // Труды БГТУ. – 2016. – № 6: Физ.-мат. науки и информатика. – С. 10–13.

УДК 535+539.196.5+517.925

Проф. В.А. Савва; асп. С.А. Банжак
(БГТУ, г. Минск)

ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТРАЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ И НЕПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ НАСЕЛЕННОСТЕЙ УРОВНЕЙ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОГЕРЕНТНЫМ ИЗЛУЧЕНИЕМ

Предложенный алгоритм использует два пространства: энергия – время, где записаны динамические уравнения для искомых функций $a_n(t)$, и спектральное пространство Фурье этих функций. Алгоритм приводят к точному аналитическому решению, к дискретному вероятностному распределению частиц по энергетическим уровням и пока-