$$T = \frac{1+i}{i+\left(1+i\right)\ln(1+i)} \ .$$

Понятно, что это более сложное уравнение, чем некоторая из линий второго порядка, однако используя компьютерные графические системы, можно убедиться, что линия сильно напоминает, с учетом положительности обоих аргументов, ветвь гиперболы. Следует также помнить, что эти коэффициенты не являются однородными функциями и рассматривается случай, когда оба аргумента (T, i) немного увеличатся с сохранением пропорций (то есть случай $\lambda \approx 1, \lambda > 1$). Для больших изменений эти выводы не совсем корректны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Чайковский, М. В. Дифференциальное исчисление как один из инструментов финансового анализа / М. В. Чайковский // Информационные технологии: материалы докладов 84-й научно-технической конференции, посвященной 90-летнему юбилею БГТУ и Дню белорусской науки (с международным участием), Минск, 03-14 февраля 2020 г. – Минск : БГТУ, 2020. – С. 157-160.

УДК 517.948

Доц. С.В. Пономарева[1]; зав. каф. О.Н. Пыжкова[2]
([1]БГУ, г. Минск; [2]БГТУ, г. Минск)

РАЗНОСТНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Данная работа продолжает обсуждение темы дробного интегро-дифференцирования периодических функций (см [1]).

Конструкция Г. Вейля (см [2]) для периодических функций кажется наиболее подходящей из всех известных авторам видов обобщения производных на нецелые порядки дифференцирования (Римана-Лиувилля, Адамара, Грюнвальда-Летникова, Вейля, Чженя, Капуто-Герасимова и др.), т. к. сохраняет важнейшее свойство таких функций – их периодичность.

Однако с точки зрения удобства в приближенных вычислениях часто используется еще другой подход к дробному интегродифференцированию – разностный. Этот подход широко известен в теории дифференциальных уравнений целого порядка дифференцирования для функций, имеющих сложное аналитическое представление.

Для производных нецелого порядка вычисление с помощью конечных разностей было предложено еще А. Грюнвальдом и А.В. Летниковым в 1867-1868гг. (см [3]).

Определяются конечные разности дробного порядка следующим образом. Для функции $x(t)$, заданной на всей прямой, положим

$$\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha}{k}x(t-kh),\quad \alpha>0,$$

где $\binom{\alpha}{k}=\frac{(-1)^{k-1}\alpha\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(k+1)}$ – биномиальные коэффициенты, Г – гамма-функция Эйлера, α – порядок дифференцирования.

Дробной производной Грюнвальда-Летникова функции $x(t)$ порядка α называют функцию

$$x^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to+0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)}{h^\alpha},\quad \alpha>0, \tag{1}$$

где предел может рассматриваться в зависимости от изучаемых вопросов поточечный, почти всюду или по норме пространства (в этом случае речь идет о сильной производной).

Оказывается (см [2]), для 2π–периодических функций из $L_p(0,2\pi),\ 1<p<\infty$ производная Грюнвальда-Летникова совпадает с производной Вейля.

Приведем определение дробной производной Вейля.

Пусть $x(t)$ является 2π–периодической функцией с нулевым средним значением по периоду $\int_0^{2\pi}x(t)dt=0$. Другими словами, функция $x(t)$ может быть разложена в ряд Фурье. Учитывая свойства свертки Фурье, определение интеграла дробного порядка в форме Вейля для периодических функций выглядит следующим образом:

$$I_\pm^{(\alpha)}x=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}x(t-s)\Psi_\pm^{(\alpha)}(s)ds,\quad \alpha>0,$$

где $\Psi_\pm^{(\alpha)}(t)=2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\cos(kt\mp\alpha\pi/2)}{k^\alpha}$.

Дробная производная по Вейлю при $0<\alpha<1$ определяется равенством

$$D_\pm^{(\alpha)}x=\pm\frac{d}{dt}I_\pm^{(1-\alpha)}x. \tag{2}$$

Заметим, что при значениях порядка дифференцирования α>1 придется выделить целую и дробную части α, затем после применить к оператору (2) дифференцирование n=[α] раз. Это наложит на функцию дополнительные ограничения по гладкости.

Производную нецелого порядка с помощью конечных разностей можно определить еще другим симметричным образом:

$$x^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{2\cos(\alpha\pi/2)}\lim_{h\to 0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)+\left(\Delta_{-h}^\alpha x\right)(t)}{|h|^\alpha},\quad \alpha>0, \tag{3}$$

в таком случае она совпадает с операцией, обратной риссову потенциалу (см [2])

$$x^{(\alpha)}(t)=\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)\cos(\alpha\pi/2)}\int_0^\infty\frac{2x(t)-x(t-s)-x(t+s)}{s^{1+\alpha}}ds.$$

Поэтому (3) называют производной Грюнвальда-Летникова-Рисса. Исследование (3) полностью аналогично (2).

Результаты, полученные в ([2]) можно расширить на $L_p(0,2\pi),\ 1\le p<\infty$:

Теорема. *На* 2π *–периодических функциях* $x(t)$ из пространства $L_p(0,2\pi),\ 1\le p<\infty$ *с нулевым средним значением дробная производная порядка* $0<\alpha<1$ *Грюнвальда-Летникова совпадает с дробными производными Вейля*

$$x^{(\alpha)}(t)=\lim_{h\to+0}\frac{\left(\Delta_h^\alpha x\right)(t)}{h^\alpha}=\frac{1}{2\pi}\left(\pm\frac{d}{dt}\right)\int_0^{2\pi}x(t-s)\Psi_\pm^{(1-\alpha)}(s)ds,\quad 0<\alpha<1,$$

где интеграл понимается как условно сходящийся

$$\int_{-\infty}^t\frac{x(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}=\lim_{n\to\infty}\int_{t-2\pi n}^t\frac{x(s)ds}{(t-s)^{1-\alpha}}.$$

Утверждение теоремы прямо следует из того факта, что существование у функции $x(t)$ сильной производной Грюнвальда-Летникова равносильно представимости функции дробным интегралом Вейля (с точностью до постоянного слагаемого) (см [2], теорема 20.1), а также из вложения $1\le p\le q\le\infty,\ \Rightarrow L_q\subset L_p$ для шкалы лебеговых пространств и равенства нулю среднего значения функции по периоду.

Представляет интерес изучение подобных свойств производных дробного порядка для почти периодических функций в виду широкого применения такого класса функций в прикладных дифференциальных уравнениях с почти периодическими коэффициентами. Т.к. почти периодические функции можно представить, как сумму (или предел суммы) периодических функций, то некоторые свойства периодических функций переносятся и на почти периодические.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пономарева С.В., Пыжкова О.Н. К вопросу о дробных производных Вейля./ Материалы 85-й науч.-техн. конференции профессорско-преподавательского состава, научных сотрудников и аспирантов (с международным участием), Минск, 1-13 февраля 2021 г– Минск: БГТУ, 2021. С. 143 – 145.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Oldham, K. and Spanier, J. The Fractional Calculus – Publisher: Academic Press, 1974. – 234 p.

УДК 517.444

Доц. Г. С. Ромащенко
(БГУ, г. Минск)

О ПОДОБИИ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

В работе описаны достаточные условия подобия вольтеррового оператора вида

$$K : f \to \int_0^x K(x,t) f(t) dt, \quad f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t)) \qquad (1)$$

оператору $J \otimes B$ в пространствах Соболева вектор-функций $W_p^k[0,1] \otimes C^n$, где $J : f \to \int_0^x f(t)dt$ – оператор интегрирования, а B – невырожденная $n \times n$-матрица.

Подобие операторов такого вида в пространствах $L_2[0,1] \otimes C^n$ изучалось в работах Сахновича [1], Хилла [2] и Маламуда [3]. Именно, Л. А. Сахнович [1] нашел достаточные условия подобия K и $J \otimes B$ с $B = (I_{n_1}, -I_{n_2})$. Л. Т. Хилл получил достаточные условия подобия оператора свертки $K : f \to \int_0^x K(x-t) f(t) dt$ оператору $J \otimes B$ с $B = I_n$. М. М. Маламуд в [3] получил достаточное условие подобия K вида (1) и $J \otimes B$ для произвольной $B = B^* = diag(\lambda_1 I_{n_1}, \ldots, \lambda_r I_{n_r})$. Здесь мы обобщаем этот результат на случай пространства Соболева.