$$=\frac{1}{\tau}+O\left(x^2\right)-\frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}\right]+$$

$$-\frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1-i\tau/2)}{\Gamma(1/2+i\tau/2)}-1\right)+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1+i\tau/2)}{\Gamma(1/2-i\tau/2)}-1\right)\right].$$

Отсюда следует следующая теорема для (4) и аналогично для (5).

Теорема. Справедливы представления при $x\to+0$ и $\tau<\infty$:

$$C_s(x,\tau)=\frac{2}{\tau}\sin^2\left(\frac{\tau\ln(x/4)}{2}\right)+\frac{1}{\tau}\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1-i\tau/2)}{\Gamma(1/2-i\tau/2)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]+O\left(x^2\right),$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{1}{2}\cos\left(\tau\ln\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(1-i\tau/2)}{\Gamma(1/2-i\tau/2)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]-\frac{x}{1+\tau^2}+O\left(x^2\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. − М., «Наука», 1973. − 295 с.

2. Yakubovich S. B. Index transforms. World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. – 252 p.

3. Yakubovich S. B., Yarotzkaya L. D. Integral transformation associated with the Macdonald type kernels // East–West J. Math., 2000, 2, 1 (June), P. 73-84.

4. Яроцкая Л.Д. Об интегральном преобразовании с ядром, связанным с функцией Макдональда // Весцi НАН Беларусi. Сер. фiз.-мат. навук, 2000, 4, С. 32-37.

УДК 517.949: 517.966

Доц. В.В. Горячкин[1]; доц. В.В. Крахотко[1];
доц. В.В. Игнатенко[2]; доц. Г.П. Размыслович[1]
([1]БГУ, г. Минск; [2]БГТУ, г. Минск)

НЕОТРИЦАТЕЛЬНАЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Дискретные системы находят широкое применение в различных разделах науки и техники. Некоторые вопросы устойчивости и стабилизации стационарных дискретных систем рассмотрены в монографии [1]. Часто на практике в задачах управления параметры объектов известны лишь в той или иной степени точности, при этом во многих случаях их значения недоступны определению, поскольку изменяются в процессе эксплуатации объекта. Поэтому приходиться исследовать указанные классы динамических систем, так как они имеют многочисленные приложения.

В рамках интервального исчисления [2] рассмотрим интервальную дискретную систему:

$$[x(t+1)]=\left[A\right]\left[x(t)\right]+B\left[u(t)\right],\ (t=0,1,2,\ldots), \qquad (1)$$

$$[x(0)]=[v], \qquad (2)$$

где $[x(t)]\in I(R^n)$ - интервальная переменная; $u(t)$ $\left[u(t)\right]\in I(R^m)$ – управление; $[A]=[A_1,A_2]\in I(R^{n\times n})$, $B\in R^{n\times m}$, $[v]\in I(R^n)$ – заданные постоянные интервальная и точечная матрицы и интервальный вектор начального условия.

Арифметические операции здесь и далее будем понимать в смысле классической интервальной арифметики [2].

Примем, что все координаты состояния $[x(t)]$ оцениваются полностью, и обратная связь по состоянию имеет вид

$$[u(t)]=[C][x(t)]. \qquad (3)$$

Здесь $[C]=[C_1,C_2]$- интервальная $m\times n$ - вещественная матрица, которая подлежит определению.

Допустим, что обратная связь (3) (известна такая интервальная матрица $[C]$) обеспечивает для замкнутой системы

$$[x(t+1)]=[A][x(t)]+B[C][x(t)],\ (t=0,1,2,\ldots) \qquad (4)$$

движение траектории уравнения (4) к нулевому состоянию покоя (свойство стабилизируемости в нуль).

Для любого начального интервального условия $[x(0)]$ из (4) однозначно строится последовательность интервальных векторов:

$$[x(0)],\ [x(1)]=[A][x(0)]+B([C][x(0)]),\ ,[x(t)]=[A][x(t-1)]+B([C][x(t-1)]),\ldots, \qquad (5)$$

которая называется траекторией решения системы (4) или решением интервальной задачи Коши с начальным условием $[x(0)]$, и обозначается $\left[x(t)([x(0)])\right]$.

Определение 1. *Система (4) называется асимптотически устойчивой, если для любого интервального вектора $[x(0)]$ последовательность (5) при $t\to+\infty$ стремится при к нулевому точечному вектору по метрике Хаусдорфа*

$$\lim_{t\to+\infty} r([x(t)],0)=0. \qquad (6)$$

Определение 2. *Система (1), (2) называется стабилизируемой обратной связью (3), если замкнутая система (4) асимптотически устойчива.*

Для многих динамических моделей, например, в математической экономике, в различных процессах жизни биологических популяций и др. важной проблемой является получение критерия неотрицательности решения. Решение $[x(t)]$ задачи Коши (4), (2) считаем неотрицательным, если все векторы последовательности в (5) неотрицательны, т.е. $[x(t)] \geq 0 \ (t \geq 0)$.

Критерий неотрицательности интервального решения задачи Коши дает следующая теорема.

Теорема 1. *Задача Коши для интервальной дискретной стационарной системы (4) имеет неотрицательное решение* $[x(t)] \geq 0$ (все *векторы* $[x(t)] \geq 0$ *траектории (5) неотрицательны) тогда и только тогда, когда решения* $m(t), r(t)$ *точечной задачи Коши*

$$m(t+1) = \big(0.5(A_2 + A_1) + Bmid[C]\big)m(t) + \big(0.5(|A_2| - |A_1| + 0.5(B(|C_2| - |C_1|)\big)r(t)\,, \quad (7)$$

$$r(t+1) = \big(0.5(A_2 - A_1) + |B|rad[C]\big)m(t) + \big(0.5(|A_2| + |A_1|) + 0.5|B|(|C_2| + C_1|)\big)r(t)\,, \quad (8)$$

$$m(0) = mid([x(0)]) = mid([v])\,,\ r(0) = rad([x(0)]) = rad([v]) \quad (9)$$

удовлетворяют условиям $m(t) - r(t) \geq 0$, $t = 0,1,2,...,$ и $[m(t) - r(t), m(t) + r(t)] = [x(t)]$.

Замечание. Выполнение условий теоремы 1 гарантирует точное представление неотрицательного интервального решения задачи Коши (4), (2).

Положим $z(t) = \begin{pmatrix} m(t) \\ r(t) \end{pmatrix}$, $z(0) = z_0 = \begin{pmatrix} mid[v] \\ rad[v] \end{pmatrix}$,

$\Phi = \begin{pmatrix} 0.5(A_2 + A_1) + Bmid[C] & 0.5(|A_2| - |A_1|) + 0.5(B(|C_2| - |C_1|) \\ 0.5(A_2 - A_1) + |B|rad[C] & 0.5(|A_2| + |A_1|) + 0.5|B|(|C_2| + |C_1|) \end{pmatrix}$, тогда точечная система (7)—(9) запишется в виде

$$z(t+1) = \Phi z(t)\,,\ z(0) = z_0 \ \ (t = 0,1,2,...,). \quad (10)$$

Теория устойчивости точечных систем вида (10) достаточно разработана [1,3]. Приведем необходимый в нашем случае результат.

Теорема 2. *Система (1) неотрицательно стабилизируема тогда и только тогда, когда выполнены условия: решения* $m(t), r(t)$ *точечной задачи Коши (7)-(9) удовлетворяют неравенствам* $m(t) - r(t) \geq 0$, $t = 0,1,2,...,$ *и спектральный радиус* $\rho(\Phi) < 1$.

Далее приведем достаточные условия стабилизируемости системы (10).

Рассмотрим частный случай, когда существует такое $[C]$, что справедливо равенство $\Phi = 0$. В этом случае решение задачи стабилизации упрощается. Это условие представим в виде матричного уравнения относительно искомой матрицы $[C] = [C_1, C_2]$

$$\Phi([C]) = \Phi(C_1, C_2) = \begin{pmatrix} A_2 + A_1 & |A_2| - |A_1| \\ A_2 - A_1 & |A_2| + |A_1| \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_2 + C_1 & |C_2| - |C_1| \\ C_2 - C_1 & |C_2| + |C_1| \end{pmatrix} = 0$$

Обозначим $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_2 + C_1 & |C_2| - |C_1| \\ C_2 - C_1 & |C_2| + |C_1| \end{pmatrix}$ и перейдем к матричному уравнению относительно неизвестной матрицы X

$$\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix} X = -\begin{pmatrix} A_2 + A_1 & |A_2| - |A_1| \\ A_2 - A_1 & |A_2| + |A_1| \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Если уравнение (11) разрешимо относительно матрицы X, то его общее решение с операцией псевдообращения матрицы (D^+ обозначает псевдобратную матрицы D)

$$X = -\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} A_2 + A_1 & |A_2| - |A_1| \\ A_2 + A_1 & |A_2| + |A_1| \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix} \right) W,$$

где E – единичная, а W – произвольная – матрицы подходящих размеров. Для разрешимости уравнения (11) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены условия

$$\left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix}^+ \right) \begin{pmatrix} A_2 + A_1 & |A_2| - |A_1| \\ A_2 - A_1 & |A_2| + |A_1| \end{pmatrix} = 0 \tag{12}$$

Проверка условий (12) не вызывает затруднений, так как пакеты компьютерной математики содержат средства псевдообращения матриц. Для нахождения искомых матриц C_1, C_2 осталось выбрать матрицу W так, чтобы были выполнены требования неотрицательности траектории (7-9) $, m(t) - r(t) \geq 0$, $t = 0,1,2,...,$ и

$$X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} A_2 + A_1 & |A_2| - |A_1| \\ A_2 - A_1 & |A_2| + |A_1| \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix}^+ \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & |B| \end{pmatrix} \right) W,$$

$$C_2 + C_1 = X_1, \quad |C_2| - |C_1| = X_2, \quad C_2 - C_1 = X_3, \quad |C_2| + |C_1| = X_4, \quad C_2 \geq C_1.$$

Перейдем к рассмотрению общего случая, когда уравнение (11) несовместно. В этом случае для нахождения матриц $[C] = [C_1, C_2]$ воспользуется достаточным условием асимптотической устойчивости системы (10).

Теорема 3. *Система (10) асимптотически устойчива, когда существуют такие матрицы* $[C] = [C_1, C_2]$, *подчиняющиеся неравенствам*

$$\left\| \begin{pmatrix} 0.5(A_2 + A_1) + 0.5B(C_2 + C_1) & 0.5(|A_2| - |A_1|) + 0.5(B(|C_2| - |C_1|) \\ 0.5(A_2 - A_1) + 0.5|B|(C_2 - C_1) & 0.5(|A_2| + |A_1|) + 0.5|B|(|C_2| + |C_1|) \end{pmatrix} \right\| < 1 \tag{13}$$

Доказательство теоремы вытекает из теоремы 1 и неравенства $\rho(\Phi) \leq \|\Phi\|$.

Неравенство (13) нелинейно, поэтому решение его в явном виде, вообще говоря, вызывает затруднения. Для нахождения элементов матриц C_1 и C_2, разворачивая их в один вектор столбец размерности $2n^2$, можно воспользоваться численными методами.

В случае, когда $[u(t)]$ скалярная числовая функция и $m=1$, условия разрешимости неравенств (13) можно получить следующим образом.

Действительно, если в качестве нормы возьмем норму $\|x\| = \max\limits_{1 \le i \le n} |x_i|$, тогда матричная норма любой $(n \times n)$- матрицы $A=(a_{ij})$ согласованная с этой векторной нормой определяется равенством $\|A\| = \max\limits_{1 \le i \le n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|$. Заметим, что для любой матричной нормы справедлива оценка $\rho(A) \le \|A\|$.

Следовательно, неравенства (13) будут выполнятся, если

$$\begin{gathered}
\Big|\big(|a_{1ik} + a_{2ik} + b_i(c_{1k} + c_{2k})| + \big|\, |a_{2ik}| - |a_{1ik}| + b_i(|c_{2k}| - |c_{1k}|)\,\big|\big)\Big| \le 2/n \\
\Big|\big(|a_{2ik} - a_{1ik} + |b_i|(c_{1k} - c_{2k})| + |a_{2ik}| + |a_{1ik}| + |b_i|(|c_{2k}| + |c_{1k}|)\big)\Big| \le 2/n, \\
c_{2k} \ge c_{1k}
\end{gathered} \tag{14}$$

Теорема 4. *Система (10) асимптотически устойчива, когда существуют такие матрицы* $[C]=[C_1, C_2]$, *удовлетворяющие условиям (7-9,14) и* $m(t) - r(t) \ge 0$, $t = 0,1,2,\ldots$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайшун И. В. Системы с дискретным временем. – Мн.: Институт математики НАН Беларуси, 2001. – 400 с.
2. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ, Новосибирск: XYZ, 2019. – 647 с.
3. Гайшун И.В., Горячкин В.В. Интервальная и робастная устойчивость двухпараметрических дискретных систем с интервальными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. – 2015. – Том 51. – № 10. – С. 1277-1283.