УДК 517.588

Доц. Л.Д. Яроцкая
(БГТУ, г. Минск)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПРИ МАЛЫХ ЗНАЧЕНИЯХ АРГУМЕНТА ФУНКЦИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА, СВЯЗАННЫХ С ФУНКЦИЕЙ МАКДОНАЛЬДА

Пусть $x,\ \tau \in \mathbf{R}_+$. Для функции Макдональда справедливы следующие интегральные представления [1]

$$
\begin{aligned}
K_{i\tau}(x)\,\mathrm{ch}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) &= \int_0^\infty \cos(x\,\mathrm{sh}\,u)\cos(\tau u)\,du,\\
K_{i\tau}(x)\,\mathrm{sh}\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) &= \int_0^\infty \sin(x\,\mathrm{sh}\,u)\sin(\tau u)\,du.
\end{aligned} \tag{1}
$$

Отметим, что функция Макдональда (1) является ядром интегрального преобразования Конторовича–Лебедева [2].

Рассмотрим специальные функции, определенные следующими интегралами

$$C_s(x,\tau) = \int_0^\infty \cos(x\,\mathrm{sh}\,u)\sin(\tau u)\,du, \tag{2}$$

$$S_c(x,\tau) = \int_0^\infty \sin(x\,\mathrm{sh}\,u)\cos(\tau u)\,du. \tag{3}$$

Лемма. При $x > 0$ и $\tau > 0$ справедливы оценки

$$\left|C_s(x,\tau)\right| \le \frac{1}{x}\left(1+\frac{\pi\tau}{2}\right) \text{ и } \left|S_c(x,\tau)\right| \le \frac{1}{x}\left(2+\frac{\pi\tau}{2}\right).$$

Действительно, интегрируя в (2) по частям, получим

$$C_s(x,\tau) = \int_0^\infty \frac{\sin(\tau u)}{\mathrm{ch}\,u}\,d\left(\frac{\sin(x\,\mathrm{sh}\,u)}{x}\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^\infty \sin(x\,\mathrm{sh}\,u)\frac{\sin(\tau u)\,\mathrm{sh}\,u - \tau\cos(\tau u)\,\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{ch}^2\,u}\,du.$$

Тогда

$$\left|C_s(x,\tau)\right| \le \frac{1}{x}\int_0^\infty \frac{\mathrm{sh}\,u + \tau\,\mathrm{ch}\,u}{\mathrm{ch}\,u}\,du.$$

Откуда и следует первая оценка леммы. Второе неравенство доказывается аналогично.

Функции (2) и (3) введены в работах [3] и [4] в качестве ядер прямого и обратного преобразований по индексу. Там же получены представления для (2), (3) в виде комбинации функций гипергеометрического типа следующего вида

$$C_s(x,\tau)=\frac{1}{\tau}{}_1F_2\left(1;1-\frac{i\tau}{2},1+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right)-\frac{\pi}{4\operatorname{sh}(\pi\tau/2)}\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right], \quad (4)$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{\pi}{4\operatorname{ch}(\pi\tau/2)}\left[I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)\right]-$$

$$-\frac{x}{1+\tau^2}{}_1F_2\left(1;\frac{3}{2}-\frac{i\tau}{2},\frac{3}{2}+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right), \quad (5)$$

где ${}_1F_2$ – гипергеометрическая функция, определённая рядом

$${}_1F_2\left(1;1-\frac{i\tau}{2},1+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(1-i\tau/2\right)_k\left(1+i\tau/2\right)_k}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}, \quad (6)$$

и

$$I_{i\tau}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\Gamma(k+i\tau+1)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+i\tau} \quad (7)$$

модифицированная функция Бесселя первого рода, символ Похгаммера определяется соотношением

$$\left(a\right)_k=a\left(a+1\right)...\left(a+k-1\right), \quad k=1,2,..., \quad \left(a\right)_0=1.$$

Отметим, что ряды в правой части равенств (6), (7) сходятся абсолютно для всех значений x. Это следует, например, для (6), из оценки

$$\left|{}_1F_2\left(1;1-\frac{i\tau}{2},1+\frac{i\tau}{2};\frac{x^2}{4}\right)\right|\le\frac{\pi}{\left|\Gamma\left(1/2-i\tau/2\right)\Gamma(1/2+i\tau/2\right|}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\left(k!\right)^2}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}.$$

Исследуем поведение функций (2), (3) при малых x. Используя разложения (6), (7) в степенной ряд по возрастающим степеням x, учитывая формулы для гамма-функции Эйлера [1]

$$\frac{\pi}{\cos\left(\pi z\right)}=\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-z\right), \quad \Gamma\left(2z\right)=2^{2z-1}\pi^{-1/2}\Gamma\left(z\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}+z\right),$$

имеем

$$C_s(x,\tau)=\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(x/2\right)^{2k}}{\left(1+\tau^2/4\right)...\left(k^2+\tau^2/4\right)}-$$

$$-\frac{\operatorname{ch}\left(\pi\tau/2\right)}{2\tau}\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{i\tau}\Gamma\left(1-i\tau\right)+\left(\frac{x}{2}\right)^{-i\tau}\Gamma\left(1+i\tau\right)\right)-$$

$$-\frac{\pi}{4\operatorname{sh}\left(\pi\tau/2\right)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\left(x/2\right)^{i\tau}\Gamma\left(k+1-i\tau\right)+\left(x/2\right)^{-i\tau}\Gamma\left(k+1+i\tau\right)\right)}{\Gamma\left(k+1-i\tau\right)\Gamma\left(k+1+i\tau\right)k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}=$$

$$=\frac{1}{\tau}+O\left(x^2\right)-\frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}\right]+$$

$$-\frac{1}{2\tau}\left[\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1-i\tau/2\right)}{\Gamma\left(1/2+i\tau/2\right)}-1\right)+\left(\frac{x}{4}\right)^{-i\tau}\left(\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1+i\tau/2\right)}{\Gamma\left(1/2-i\tau/2\right)}-1\right)\right].$$

Отсюда следует следующая теорема для (4) и аналогично для (5).

Теорема. Справедливы представления при $x\to+0$ и $\tau<\infty$:

$$C_s(x,\tau)=\frac{2}{\tau}\sin^2\left(\frac{\tau\ln\left(x/4\right)}{2}\right)+\frac{1}{\tau}\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1-i\tau/2\right)}{\Gamma\left(1/2-i\tau/2\right)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]+O\left(x^2\right),$$

$$S_c(x,\tau)=\frac{1}{2}\cos\left(\tau\ln\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{4}\mathrm{Re}_{i\tau}\left[\left(1-\sqrt{\pi}\frac{\Gamma\left(1-i\tau/2\right)}{\Gamma\left(1/2-i\tau/2\right)}\right)\left(\frac{x}{4}\right)^{i\tau}\right]-\frac{x}{1+\tau^2}+O\left(x^2\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. − М., «Наука», 1973. − 295 с.

2. Yakubovich S. B. Index transforms. World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. – 252 p.

3. Yakubovich S. B., Yarotzkaya L. D. Integral transformation associated with the Macdonald type kernels // East–West J. Math., 2000, 2, 1 (June), P. 73-84.

4. Яроцкая Л.Д. Об интегральном преобразовании с ядром, связанным с функцией Макдональда // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук, 2000, 4, С. 32-37.

УДК 517.949: 517.966

Доц. В.В. Горячкин[1]; доц. В.В. Крахотко[1];
доц. В.В. Игнатенко[2]; доц. Г.П. Размыслович[1]
([1]БГУ, г. Минск; [2]БГТУ, г. Минск)

НЕОТРИЦАТЕЛЬНАЯ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТЬ ИНТЕРВАЛЬНЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Дискретные системы находят широкое применение в различных разделах науки и техники. Некоторые вопросы устойчивости и стабилизации стационарных дискретных систем рассмотрены в монографии [1]. Часто на практике в задачах управления параметры объектов известны лишь в той или иной степени точности, при этом во многих случаях их значения недоступны определению, поскольку изменяются