УДК 517.977

Доц. А.А. Якименко
(БГТУ, г. Минск)

К ВОПРОСУ О МОДАЛЬНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМЫ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Рассмотрим линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + A_2 x(t-2h) + bu(t), \qquad (1)$$

где A_j, $j = 0, 1, 2$ – постоянные (2×2)-матрицы; $h > 0$ – постоянное запаздывание; b – постоянный 2-вектор; u – скалярное управление. Не ограничивая общности, можно считать, что $b' = (0\ 1)$ (штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование).

Характеристическое уравнение разомкнутой (с нулевым управлением) системы (1) имеет вид

$$\det\left[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h}\right] \equiv \lambda^2 + \left(\alpha_{10} + \alpha_{11} e^{-\lambda h} + \alpha_{12} e^{-2\lambda h}\right)\lambda + \\ + \alpha_{00} + \alpha_{01} e^{-\lambda h} + \alpha_{02} e^{-2\lambda h} + \alpha_{03} e^{-3\lambda h} + \alpha_{04} e^{-4\lambda h}, \qquad (2)$$

где $\lambda \in \mathrm{C}$ $e^{-j\lambda h}$ – оператор сдвига ($e^{-j\lambda h} x(t) \equiv \equiv x(t - jh)$).

Присоединим к системе (1) регулятор вида

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{M} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} g'(s) x(t+s) ds, \qquad (3)$$

где $L, M \in \mathrm{N}$ q_{00}, q_{ij} – 2-векторы; $g(s)$, $s \in [-h, 0]$ – непрерывная 2-вектор-функция; $x^{(i)}(t) \overset{def}{=} \dfrac{d^i}{dt^i} x(t)$, $x^{(0)}(t) \equiv x(t)$.

В частотной области регулятор (3) имеет вид

$$U(\lambda) = q'_{00} + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{M} q'_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h} + G(\lambda), \qquad (4)$$

где $G(\lambda)$ – целая функция, определяющая интегральную часть (3).

Определение. Система (1) модально управляема регулятором вида (3), если для наперед заданных чисел $\tilde{\alpha}_{ij}, i = 0, j = 0, 1, 2, 3, 4;$ $i = 1, j = 0, 1, 2$ найдется такой регулятор, при котором характеристическое уравнение замкнутой системы (1), (3) будет иметь вид (ср. с (2)):

$$\det\left[\lambda I_2 - A_0 - A_1 e^{-\lambda h} - A_2 e^{-2\lambda h} - bU(\lambda)\right] \equiv \\ \equiv \lambda^2 + \left(\tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{12} e^{-2\lambda h}\right)\lambda + \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} e^{-\lambda h} + \tilde{\alpha}_{02} e^{-2\lambda h} + \tilde{\alpha}_{03} e^{-3\lambda h} + \tilde{\alpha}_{04} e^{-4\lambda h}.$$

Обозначим $m = e^{-\lambda h}$ – оператор сдвига, $A(m) = A_0 + A_1 m + A_2 m^2$. Пусть матрица $A(m)$ имеет вид

$$A(m) = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 m & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) & a_{22}(m) \end{bmatrix},$$

где

$$a_{21}(m) = a_{210} + a_{211} m + a_{212} m^2; \, a_{22}(m) = a_{220} + a_{221} m + a_{222} m^2. \quad (5)$$

Регулятор, решающий задачу модального управления, будем искать в виде

$$U(\lambda, m) = \begin{bmatrix} \eta_1(\lambda, m) & \eta_2(\lambda, m) \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Компоненты регулятора (6) разделим на дифференциально-разностную (ей соответствует некоторый квазиполином) и интегральную части:

$$\eta_1(\lambda, m) = \eta_{11}(m) + \eta_{12}(\lambda, m); \; \eta_2(\lambda, m) = \eta_{21}(m) + \eta_{22}(\lambda, m), \quad (7)$$

где $\eta_{11}(m), \eta_{21}(m)$ – полиномы относительно m; $\eta_{12}(\lambda, m), \eta_{22}(\lambda, m)$ соответствуют интегральной части. Будем искать эти функции в следующем виде:

$$\eta_{12}(\lambda, m) = c_0 \frac{m-k}{\lambda - \xi};$$

$$\eta_{22}(\lambda, m) = (c_1 + c_2 m) \frac{m-k}{\lambda - \xi},$$

где $k = e^{-\xi h}$; c_0, c_1, c_2 – некоторые числа, подлежащие определению. Характеристическое уравнение замкнутой регулятором (6) системы (1) примет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) + \eta_{11} + \eta_{12} & a_{22}(m) + \eta_{21} + \eta_{22} - \lambda \end{vmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ a_{21}(m) + \eta_{11} & a_{22}(m) + \eta_{21} - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (8)$$

Последнее слагаемое в (8) имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ \eta_{12} & \eta_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ c_0 \dfrac{m-k}{\lambda - \xi} & (c_1 + c_2 m) \dfrac{m-k}{\lambda - \xi} \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{m-k}{\lambda - \xi} \begin{vmatrix} a_0 + a_1 m - \lambda & b_0 + b_1 m + m^2 \\ c_0 & c_1 + c_2 m \end{vmatrix} =$$

$$=\frac{m-k}{\lambda-\xi}\Big(\big(a_0+a_1m-\lambda\big)\big(c_1+c_2m\big)-c_0\big(b_0+b_1m+m^2\big)\Big). \tag{9}$$

Поскольку для модальной управляемости определитель замкнутой системы должен быть квазиполиномом, подберем ξ, c_0, c_1, c_2 таким образом, чтобы выражение (9) представляло бы собой квазиполином. Выделив в (9) целую часть по переменной λ, получим

$$-\big(c_1+c_2m\big)\big(m-k\big)+\frac{m-k}{\lambda-\xi}\Big(\big(a_1c_2-c_0\big)m^2+$$
$$+\big(a_0c_2+a_1c_1-b_1c_0-c_2\xi\big)m+a_0c_1-b_0c_0-c_1\xi\Big).$$

Для того чтобы последнее выражение было квазиполиномом, c_0, c_1, c_2 должны удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} a_1c_2-c_0=0, \\ a_0c_2+a_1c_1-b_1c_0-c_2\xi=0, \\ a_0c_1-b_0c_0-c_1\xi=0. \end{cases}$$

Перепишем последнюю систему в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & a_1 \\ -b_1 & a_1 & a_0-\xi \\ -b_0 & a_0-\xi & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Чтобы система (10) имела нетривиальное решение, определитель матрицы системы должен быть равен нулю. Получим следующее уравнение:

$$\xi^2+\big(b_1a_1-2a_0\big)\xi+a_0^2+b_0a_1^2-a_0a_1b_1=0. \tag{11}$$

Пусть корни уравнения (11) действительны и различны.

$$\xi_1=a_0-\frac{a_1b_1}{2}+\frac{\sqrt{a_1^2b_1^2-4a_1^2b_0}}{2};\ \xi_2=a_0-\frac{a_1b_1}{2}-\frac{\sqrt{a_1^2b_1^2-4a_1^2b_0}}{2}, \tag{12}$$

что эквивалентно условию

$$a_1^2b_1^2-4a_1^2b_0>0. \tag{13}$$

Нетрудно проверить, что нетривиальные решения системы (10) $c_{ij}, i=0, 1, 3,\ j=1, 2,$ соответствующие корням ξ_i уравнения (11), определенным в (12), имеют вид

$$c_{01}=a_1t_1,\ c_{11}=\frac{a_1b_1+\sqrt{a_1^2b_1^2-4a_1^2b_0}}{2a_1}t_1,\ c_{21}=t_1,\ t_1\in \mathrm{R};$$

$$c_{02}=a_1t_1,\ c_{12}=\frac{a_1b_1-\sqrt{a_1^2b_1^2-4a_1^2b_0}}{2a_1}t_2,\ c_{22}=t_2,\ t_2\in \mathrm{R}.$$

Обозначим $k_1 = e^{-\xi_1 h}$, $k_2 = e^{-\xi_2 h}$. В качестве компоненты $\eta_{12}(\lambda, m)$ возьмем

$$\eta_{12}(\lambda, m) = a_1 t_1 \frac{m - k_1}{\lambda - \xi_1} + a_1 t_2 \frac{m - k_2}{\lambda - \xi_2}, \tag{14}$$

а в качестве $\eta_{22}(\lambda, m)$

$$\eta_{22}(\lambda, m) = \left(\frac{a_1 b_1 + \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_1 + t_1 m \right) \frac{m - k_1}{\lambda - \xi_1} +$$

$$+ \left(\frac{a_1 b_1 - \sqrt{a_1^2 b_1^2 - 4a_1^2 b_0}}{2a_1} t_2 + t_2 m \right) \frac{m - k_2}{\lambda - \xi_2}. \tag{15}$$

Замкнем систему (1) регулятором

$$U(\lambda, m) = \left[\eta_1(\lambda, m) - a_{21}(m) \quad \eta_2(\lambda, m) - a_{22}(m) \right], \tag{16}$$

где соответствующие компоненты регулятора определены в (14), (15). Определитель замкнутой системы имеет вид:

$$\lambda^2 - \left(m a_1 + a_0 + \eta_{21}(m) \right)\lambda + a_1 m \eta_{21}(m) -$$

$$- b_1 \left(m \eta_{11}(m) + \frac{t_1 + t_2}{2} \right) + a_0 \eta_{21}(m) - b_0 \eta_{11}(m) -$$

$$- m\left(m \eta_{11}(m) + t_1 + t_2 \right) - \frac{(t_1 - t_2)\sqrt{a_1^2 \left(b_1^2 - 4b_0 \right)}}{2a_1}.$$

Введем обозначения

$$\mu_1 = \tilde{\alpha}_{10} + \tilde{\alpha}_{11} m + \tilde{\alpha}_{12} m^2, \tag{17}$$

$$\mu_2 = \tilde{\alpha}_{00} + \tilde{\alpha}_{01} m + \tilde{\alpha}_{02} m^2 + \tilde{\alpha}_{03} m^3 + \tilde{\alpha}_{04} m^4, \tag{18}$$

где $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i = 0,\ j = 0, 1, 3, 4;\ i = 1,\ j = 0, 1, 2$ – произвольные числа.

Потребуем, чтобы

$$m a_1 + a_0 + \eta_{21}(m) = -\mu_1.$$

Тогда

$$\eta_{21}(m) = -\mu_1 - m a_1 - a_0. \tag{19}$$

Замкнутая регулятором (16) с учетом (19) система (1) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + \mu_1 \lambda - m^2 \left(a_1^2 + \eta_{11}(m) + t_1 + t_2 \right) - m\left(2a_0 a_1 + \right.$$

$$\left. + a_1 \mu_1 + b_1 \eta_{11}(m) + \frac{b_1 (t_1 + t_2)}{2} - k_1 t_1 - k_2 t_2 + \right.$$

$$+\frac{(t_1-t_2)\sqrt{a_1^2\left(b_1^2-4b_0\right)}}{2a_1}\Bigg)+\frac{b_1k_1t_1+b_1k_2t_2}{2}+$$

$$+\frac{(k_1t_1-k_2t_2)\sqrt{a_1^2\left(b_1^2-4b_0\right)}}{2a_1}-a_0^2-a_1\mu_1-b_0\eta_{11}(m).$$

Потребуем, чтобы

$$a_1^2+\eta_{11}(m)+t_1+t_2=0.$$

Отсюда

$$\eta_{11}(m)=-t_1-t_2-a_1^2. \tag{20}$$

$$t_1=\frac{-t_2\sqrt{b_1^2-4b_0}-2a_1^2b_1+(4a_0+2\mu_1)a_1-t_2(b_1+2k_2)}{-\sqrt{b_1^2-4b_0}+b_1+2k_1}. \tag{21}$$

$$t_2=1\Big/\Bigg(\Big((-b_1-2k_2)k_1-k_2b_1-2b_0\Big)\sqrt{b_1^2-4b_0}+$$

$$+4(k_1-k_2)\left(-\frac{b_1^2}{4}+b_0\right)\Bigg)\Bigg(\Big(a_1^2b_0-a_0^2-\mu_1a_0-\mu_2-$$

$$-2a_1\left(-\frac{a_1b_1}{2}+a_0+\frac{\mu_1}{2}\right)k_1\Big)\sqrt{b_1^2-4b_0}+$$

$$+\Bigg(a_1^2b_1^2-2a_1\left(a_0+\frac{\mu_1}{2}\right)b_1-2a_1^2b_0+2a_0^2+2\mu_1a_0+$$

$$+2\mu_2\Bigg)k_1+\left(a_1^2b_0+a_0^2+\mu_1a_0+\mu_2\right)b_1-4a_1\left(a_0+\frac{\mu_1}{2}\right)b_0\Bigg). \tag{22}$$

Замкнутая регулятором (16) с учетом (19), (20), (21), (22) система (1) имеет следующее характеристическое уравнение:

$$\lambda^2+\mu_1\lambda+\mu_2=0,$$

что с учетом (17), (18) свидетельствует о решении задачи модального управления. Из (21) и (22) следует, что регуляторы, решающие задачу модального управления, могут быть построены при выполнении следующих условий:

$$-\sqrt{b_1^2-4b_0}+b_1+2k_1\neq 0,$$

$$\Big((-b_1-2k_2)k_1-k_2b_1-2b_0\Big)\sqrt{b_1^2-4b_0}+4(k_1-k_2)\left(-\frac{b_1^2}{4}+b_0\right)\neq 0.$$