

**И. И. Леонович, Н. П. Вырко**

(Белорусский технологический институт  
 им. С. М. Кирова)

## НАКОПЛЕНИЕ И ПЕРЕДВИЖЕНИЕ ВЛАГИ В ГРУНТАХ ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА

Прочность и устойчивость грунтов земляного полотна во многом зависит от его влажности, которая изменяется от характера источников увлажнения и их интенсивности. Источники увлажнения А. К. Бируля делит на атмосферные, капиллярные от уровня грунтовых вод и парообразные. Накопление и перераспределение влаги в грунтах при действии атмосферных осадков, водяного пара, колебания уровня грунтовых вод исследовались Н. А. Пузаковым [3], В. М. Сиденко [4], Н. В. Орнатским [2] и др.

Нами исследовалось накопление и передвижение влаги из боковых канав при плохом или затрудненном водоотводе, т. е. изучалось, насколько увеличится влажность грунта земляного полотна в зависимости от продолжительности действия источника увлажнения, а также, за какое время и на какое расстояние может передвинуться вода при увеличении влажности грунта до полной влагоемкости. Решение данных вопросов послужит основой для расчета водоотводных канав, назначения крутизны откосов и выбора способа их укрепления.

Рассмотрим случай, когда земляное полотно расположено на водоупоре, как самый невыгодный с точки зрения увлажнения грунта земляного полотна. Решение этой задачи основано на законе типа Дарси, который в нашем случае выразится так:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = v = -k\Delta\Phi, \quad (1)$$

а общее уравнение потока влаги в грунте можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \quad (2)$$

При описании процесса передвижения влаги из боковых канав в земляное полотно уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = k \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (3)$$

В уравнениях (1)—(3) приняты следующие обозначения:

$W$  — влажность грунта, %;

$v$  — скорость потока, численно равная объему жидкости, протекающей через единицу площади поперечного сечения в единицу времени;

$t$  — время увлажнения, *сутки*;

$k$  — коэффициент влагопроводности грунта, *см<sup>2</sup>/сутки*;

$x$  — расстояние от источника увлажнения, *см*;

$\Delta\Phi$  — градиент потенциала;

$\Phi$  — гидравлический потенциал.

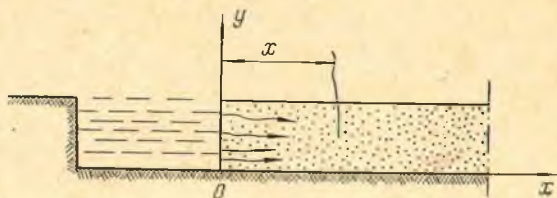


Рис. 1. Расчетная схема.

По своей структуре уравнение (3) аналогично уравнению теплопроводности [1], для решения которого сделаем следующие допущения:

а) грунтовой массив является однородным и имеет одинаковую плотность;

б) передвижение влаги происходит только в горизонтальном направлении, т. е. отсутствует как испарение, так и инфильтрация влаги. Земляное полотно расположено на водоупоре;

в) передвижение влаги происходит за счет градиента влажности.

Расчетная схема к решению данного уравнения приведена на рис. 1. Для решения уравнения (3) приняты следующие начальные и граничные условия (4):

$$w \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & -l < x < 0; \\ W_0 & 0 < x \leq l; \\ 0 & l < x; \end{cases} \quad (4)$$

$$W_{x=0} = W_n.$$

Для решения уравнения (3) введем новую переменную  $\tau = kt$ ; тогда получим:

$$\frac{\partial W}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \quad (5)$$

$$w \Big|_{\tau=0} = \begin{cases} 0 & -l < x < 0; \\ W_0 & 0 < x \leq l; \\ 0 & x > l. \end{cases} \quad (6)$$

Решим это уравнение, приняв начальное условие  $W_{\tau=0} = W_0$  и используя метод Фурье,

$$W_{(x, \tau)} = (A \cos \lambda x + B \sin \lambda x) C \exp(-\lambda^2 \tau) = \\ = (\alpha \cos \lambda x + \beta \sin \lambda x) \exp(-\lambda^2 \tau), \quad (7)$$

где

$$\lambda = AC; \quad \beta = BC.$$

Для каждого члена в уравнении (7) мы можем выбрать различные коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$ , а поэтому  $\alpha = \alpha(\lambda)$ ;  $\beta = \beta(\lambda)$  и уравнение (7) примет вид:

$$W_\lambda(x, \tau) = [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 \tau). \quad (8)$$

Выражение (8) есть частное решение уравнения (5) и является линейным, а поэтому

$$W_{(x, \tau)} = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\lambda(x, \tau) d\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] \exp(-\lambda^2 \tau) d\lambda \quad (9)$$

также будет решением уравнения (5).

Подбираем  $\alpha(\lambda)$  и  $\beta(\lambda)$  так, чтобы решение (9) удовлетворяло начальному условию (6):

$$W_{(x, \tau)} \Big|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} [\alpha(\lambda) \cos \lambda x + \beta(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda = f(x) = W_0. \quad (10)$$

Разложив функцию  $f(x)$  (10) в ряде Фурье и произведя некоторые замены и преобразования, получим:

$$W_{(x, \tau)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 \tau) \cos \lambda(x-\varepsilon) d\lambda \right\} d\varepsilon. \quad (11)$$

Произведем замену переменных  $\lambda = \frac{\sigma}{\sqrt{\tau}}$  и обозначим  $\frac{x-\varepsilon}{\sqrt{\tau}} = \rho$ , тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 \tau) \cos \lambda(x-\varepsilon) d\lambda = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma^2) \cos \sigma \rho d\sigma = \frac{1}{\sqrt{\tau}} I(\rho),$$

где

$$I_{(p)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma^2) \cos \sigma p d\sigma \text{ — интеграл Пуассона;}$$

$$I_{(0)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\sigma^2) d\sigma = \sqrt{\pi};$$

$$I'_{(p)} = - \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma \exp(-\sigma^2) \sin \sigma p d\sigma = - \frac{p}{2} I_{(p)};$$

$$\frac{I'_{(p)}}{I_{(p)}} = - \frac{p}{2}; \quad \ln I_{(p)} = - \frac{p^2}{4} + \ln C;$$

$$I_{(p)} = C \exp \left( - \frac{p^2}{4} \right).$$

Пользуясь тем, что  $I_{(0)} = \sqrt{\pi}$ , получим

$$I_{(p)} = \sqrt{\pi} \exp \left( - \frac{p^2}{4} \right).$$

В итоге интеграл, стоящий в фигурных скобках уравнения (11), равен:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\lambda^2 \tau) \cos \lambda(x-\varepsilon) d\lambda &= \frac{1}{\sqrt{\tau}} I_{(p)} = \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \exp \left[ - \frac{(x-\varepsilon)^2}{4\tau} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Тогда уравнение (11) примет вид:

$$W_{(x, \tau)} = \frac{1}{2 \sqrt{\pi k \tau}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \exp \left[ - \frac{(x-\varepsilon)^2}{4\tau} \right] d\varepsilon. \quad (13)$$

Уравнение (13) является решением уравнения (5) и удовлетворяет начальному условию (6). Так как  $\tau = kt$ , уравнение (13) будет:

$$W_{(x, \tau)} = \frac{1}{2 \sqrt{\pi k t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\varepsilon) \exp \left[ - \frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt} \right] d\varepsilon. \quad (14)$$

Учитывая четность подынтегральной функции и  $f(\varepsilon) = W_0$ , получим:

$$\begin{aligned} W(x, t) &= \frac{W_0}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon = \\ &= -\frac{W_0}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon + \\ &+ \frac{W_0}{2\sqrt{2\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon. \end{aligned} \quad (15)$$

Теперь найдем  $W(x, t)$  так, чтобы выполнялось условие

$$W_{x=0} = W_n.$$

Сведем это граничное условие к однородному, полагая

$$u = W - W_n \quad \text{и} \quad p_1 = W_0 - W_n.$$

Тогда

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1 \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon \quad (16)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и начальному и граничному условиям:

$$u|_{t=0} = p_1;$$

$$u|_{x=0} = 0.$$

Граничное условие вытекает из того, что

$$u|_{x=0} = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} p_1 \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4kt}\right) d\varepsilon = 0,$$

так как  $k > 0$ ;  $t > 0$  и  $\exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{4kt}\right)$  — четная функция, а  $p_1$  для  $x < 0$  — отрицательная величина при  $p_1 = W_0 - W_n$  и  $W_0 \approx 0$  для  $x < 0$ .

Проверим начальное условие, сделав замену переменных:

$$\frac{x-\varepsilon}{2\sqrt{kt}} = z; \quad \varepsilon = x - 2z\sqrt{kt}; \quad d\varepsilon = -2\sqrt{kt} dz.$$

Тогда

$$\begin{aligned} u(x, t)|_{t=0} &= \frac{\rho_1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{+\infty} 2\sqrt{kt} \exp(-z^2) dz = \\ &= \frac{\rho_1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \rho_1, \end{aligned}$$

потому что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-z^2) dz = \sqrt{\pi}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} W(x, t) &= W_n - \frac{\rho_1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon + \\ &+ \frac{\rho_1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon = \\ &= W_n + \frac{W_n}{2\sqrt{\pi kt}} \left\{ \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon \right\} + \\ &+ \frac{W_0}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] \right\} d\varepsilon. \quad (17) \end{aligned}$$

Преобразуем эту формулу:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} \exp(-\mu^2) d\mu =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \exp(-\mu^2) d\mu + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{kt}}} \exp(-\mu^2) d\mu = \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right); \quad (18)
 \end{aligned}$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\mu^2) d\mu -$$

интеграл вероятностей, а

$$\frac{x-\varepsilon}{2\sqrt{kt}} = \mu; \quad \varepsilon = x - \mu 2\sqrt{kt}; \quad d\varepsilon = -2\sqrt{kt} d\mu.$$

Аналогично получим

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] d\varepsilon = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right). \quad (19)$$

Поскольку начальное условие

$$W \Big|_{t=0} = \begin{cases} 0 & -l < x < 0; \\ W_0 & 0 < x \leq l; \\ 0 & x > l, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned}
 &\frac{W_0}{2\sqrt{\pi kt}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\varepsilon)^2}{4kt}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\varepsilon)^2}{4kt}\right] \right\} d\varepsilon = \\
 &= -\frac{W_0}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x-l}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{x+l}{2\sqrt{kt}}} \exp(-\mu^2) d\mu - \int_{\frac{x}{2\sqrt{kt}}}^{\frac{x+l}{2\sqrt{kt}}} \exp(-\mu^2) d\mu = \\
 &= \frac{W_0}{2} \left[ -\Phi\left(\frac{x-l}{2\sqrt{kt}}\right) + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) - \right. \\
 &\quad \left. -\Phi\left(\frac{x+l}{2\sqrt{kt}}\right) + \Phi\left(\frac{x}{2\sqrt{kt}}\right) \right]. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Учитывая решения (18), (19), (20) и произведя преобразования уравнения (17), окончательно получим решение уравнения (3), которое имеет вид:

$$W_{(x, t)} = W_n \left[ 1 - \Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) \right] + \frac{W_0}{2} \left[ 2\Phi \left( \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right) - \Phi \left( \frac{x-l}{2\sqrt{kt}} \right) - \Phi \left( \frac{x+l}{2\sqrt{kt}} \right) \right], \quad (21)$$

где  $W_n$  — полная влагоемкость грунта, %;

$W_0$  — естественная (первоначальная) влажность грунта, %;

$l$  — расстояние от источника увлажнения, см;

$x$  — текущая координата, см.

Используя уравнение (21), можно определить влажность в любой точке грунтового массива в зависимости от продолжительности действия источника увлажнения.

Для уравнения (21) была подготовлена программа на электронно-вычислительную машину «Промінь». В результате получены данные для всех типов грунтов, характеризующие изменение их влажности в зависимости от первоначальной, расстояния до источника увлажнения и продолжительности его действия.

Анализ данных показывает, что интенсивное водонасыщение грунта идет в первые пять суток, а затем постепенно уменьшается и через 15—20 суток почти прекращается (рис. 2). Увеличение влажности грунта за первые пять суток достигает 60—80% (рис. 3) по отношению к первоначальной. Насыщение грунта водой наступает тем раньше, чем меньше его первоначальная влажность. Так, например, у суглинистого грунта, имеющего первоначальную влажность 11%, через пять суток влажность повышалась до 19,88%, а при первоначальной влажности 17% за то же время достигла 21,78%, или увеличилась на 28% при одной и той же полной влагоемкости грунта 24% и расстоянии от источника увлажнения 20 см.

На скорость водонасыщения грунта влияет не только первоначальная влажность, но и его полная влагоемкость, которая для одного и того же типа грунта может быть различной и зависит от минералогического состава. Так, если взять начальную влажность суглинистого грунта 11%, а полную влагоемкость 18 и 21%, то через пять суток влажность грунта будет 15,78% для грунта, имеющего полную влагоемкость 18%, и 17,83% при полной влагоемкости грунта 21%. В первом случае увеличение влажности произошло на 43,5%, а во втором — на 62%. Такое явление наблюдается и у других типов грунта.

Для участков, расположенных на расстоянии более 50 см от источника увлажнения, увеличение влажности грунта идет сначала медленно, затем достигает максимума, а потом замедляется (рис. 3,



кривая 100 и 150 см). Такой процесс увеличения влажности грунта можно объяснить, во-первых, величиной расстояния от источника увлажнения, а во-вторых, процессом передвижения влаги.

Проведенные теоретические исследования полученного уравнения (21) позволили установить максимальное расстояние от источ-

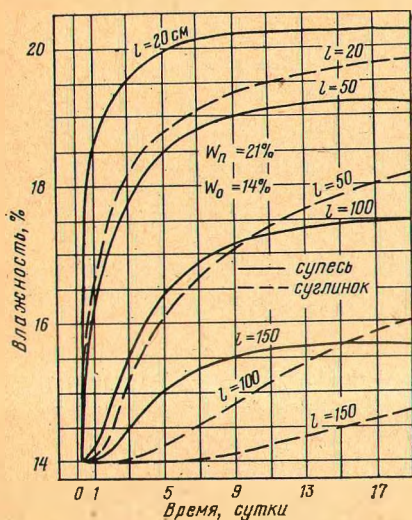


Рис. 2. Изменение влажности грунта в зависимости от расстояния до источника увлажнения и продолжительности его действия.

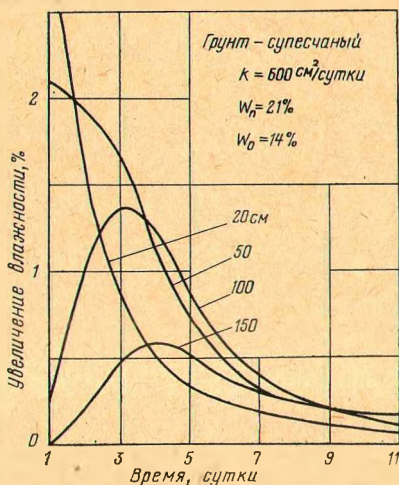


Рис. 3. Интенсивность нарастания влажности грунта в зависимости от расстояния до источника увлажнения и времени его действия.

ника увлажнения, на которое способна передвинуться влага за время его действия, равного 20 суток, в зависимости от типа грунта. Это расстояние для глинистых грунтов составляет 2,5—3,5 м, суглинистых — 3—4 м, супесчаных — 7—9 м и мелкого песка — 27—36 м. Полученные данные могут быть использованы при проектировании и строительстве водоотвода на автомобильных дорогах.

#### Литература

1. Араманович И. Г., Левин В. И. Уравнения математической физики. «Наука». М., 1964.
2. Орнатский Н. В. Проектирование противопучинных мероприятий. Сб. «Регулирование водного режима дорожных оснований», Дориздат. М., 1946.
3. Пузаков Н. А. Водно-тепловой режим земляного полотна автомобильных дорог. Автотрансиздат. М., 1960.
4. Сиденко В. М. Расчет и регулирование водно-тепловой режим дорожных одежд и земляного полотна. Автотрансиздат. М., 1962.