**Е. И. КОРДИКОВА**

**ПРИКЛАДНАЯ**

**МЕХАНИКА**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

**(ЭЛЕКТРОННЫЙ ВАРИАНТ)**

Минск БГТУ 2012

**1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ**

**1.1. Значение курса «Прикладная механика» в формировании**

**инженера химика-технолога**

Современное химическое производство невозможно без различных высокоэффективных машин и аппаратов, различных сооружений и коммуникаций. Химическое предприятие представляет собой сложный комплекс, состоящий их отдельных цехов, участков и установок, соединенных между собой системой трубопроводов и транспортеров. В технологическую схему объединены различные машины и аппараты. При различии технологического назначения и внутреннего устройства аппараты имеют схожее внешнее конструктивное оформление. Чаще всего это горизонтальные или вертикальные цилиндрические сосуды, снабженные внешней трубопроводной обвязкой и дополнительными устройствами.

Машины и аппараты, приборы и устройства состоят из деталей.

***Деталь*** *– элемент конструкции, изготовленный из одного материала без применения сборочных операций.*

В каждом аппарате или машине число деталей составляет сотни. Однако большинство деталей, узлов и элементов конструкции являются типовыми (стандартными). К их числу относятся различные соединения (резьбовые, сварные, клеевые и др.), передачи (зубчатые, винтовые, ременные и др.) и их детали, валы, муфты и опоры, уплотнения, обечайки, днища, мешалки и др.

Для изучения типовых элементов конструкций и химического оборудования, необходимо рассмотреть основные требования, предъявляемые к ним, уметь от конкретной конструкции перейти к расчетной схеме, знать механические свойства материалов и методы расчета.

**1.2. Основные требования, предъявляемые к химическому**

**оборудованию**

Для того чтобы машины и аппараты были работоспособны, выполняли заданные функции с параметрами, установленными нормативно-технической документацией, они должны удовлетворять следующим критериям работоспособности: прочности, жесткости, устойчивости, виброустойчивости, герметичности, коррозионной стойкости, износостойкости, теплостойкости и др.

Выбор определенных критериев зависит от условий эксплуатации и назначения машины или аппарата.

В курсе прикладной механики подробно остановимся на первых трех критериях работоспособности.

***Прочность*** *– способность тела, детали, элемента конструкции сопротивляться разрушению под действием приложенной системы сил.*

***Жесткость*** *– это способность элементов конструкции сопротивляться деформации под действием приложенной системы сил.*

***Устойчивость*** *– способность элемента конструкции сохранять первоначальную заданную форму под действием приложенной системы сил.*

**1.3. Элементы статики**

Прежде чем переходить к описанию и расчетам элементов конструкций машин и аппаратов, необходимо вспомнить основные понятия статики, которые будут использоваться в дальнейшем.

***Статика*** *– часть теоретической механики, изучающая условия, при которых тело находится в равновесии (находится в покое).*

В теоретической механике предполагают, что тела абсолютно твердые и физико-механические свойства их не учитывают.

***Абсолютно твердое тело*** *– тело, в котором расстояние между любыми его точками не изменяется при действии на него других тел.*

Тела взаимодействуют между собой или с окружением. Механическое взаимодействие тел характеризуется силами.

***Сила*** *– мера механического взаимодействия тел, является величиной векторной.*

Условия, при которых тело может находиться в равновесии, основаны на основных аксиомах статики (сформулированы И. Ньютоном):

– силы взаимодействия между собой двух тел всегда равны по модулю и направлены по одной прямой в противоположные стороны;

– механическое состояние твердого тела не нарушится от перенесения силы вдоль линии ее действия (следствие из аксиом).

В случаях, когда на тело действуют больше трех сил или направление некоторых сил неизвестно, при решении задач используют аналитическое условие равновесия, которое основано на методе проекций (рис. 1.1).

***Проекция силы на ось*** *– отрезок оси, заключенный между двумя перпендикулярами, опущенными на ось из начала и конца вектора силы.*

Равнодействующая системы параллельных сил равна их алгебраической сумме

. 1.1

*F*

*Fy*

*Fx*

*Fx=F*cos

*Fy=F*sin



*y*

*x*

*Fy=F*

*F*

*Fx*=0

*F*

*Fx*=-*F*

*Fy=0*

*y*

*y*

+

+

*а*

*б*

*в*

Рис. 1.1. Метод проекций сил на оси

***Правило знаков****: если направление проекции сил на ось координатной системы совпадает с направлением этой оси, то ее принимают со знаком «+», в ином случае – со знаком «–» (рис. 1.1, б, в).*

Плоская система распределенных сил характеризуется ее интенсивностью. Распределенная нагрузка, имеющая постоянную интенсивность, называется равномерно распределенной.

***Интенсивность*** *– сила, приходящаяся на единицу длины нагруженного участка.*

При решении задач статики распределенную нагрузку заменяют ее равнодействующей. Приложена равнодействующая в середине отрезка распределения (рис. 1.2).

*q*

*Qq*

*l*/2

*l*

Рис. 1.2. Равномерно распределенная нагрузка и ее равнодействующая

Модуль равнодействующей равномерно распределенной нагрузки равен

, 1.2

где *Qq* – равнодействующая равномерно распределенной нагрузки, *q* – интенсивность распределения, *l* – длина участка распределения.

Вращательное действие силы характеризуется моментом силы.

***Моментом силы*** *относительно точки называется произведение модуля силы на ее плечо (рис. 1.3).*

*F*

т*. A*

*h*

*MA=F⋅h*

Рис. 1.3 Понятие момента от силы

Момент силы относительно точки, лежащей на линии действия этой силы, равен нулю, так как в этом случае плечо равно нулю. Момент силы относительно точки не меняется при переносе силы вдоль линии ее действия, так как модуль силы и плечо остаются неизменными.

***Правило знаков****: считают, что момент силы положительный, если сила стремится вращать свое плечо вокруг центра момента против часовой стрелки, и наоборот. Одна и та же сила относительно разных точек может давать и положительный и отрицательный момент.*

Для равновесия пространственной системы произвольно расположенных сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраическая сумма проекций всех сил на оси *x*, *y* и *z* равнялась нулю и чтобы алгебраическая сумма моментов всех сил относительно каждой из этих осей также равнялась нулю. Основные уравнения равновесия (статики) записываются в виде:

 1.3

**1.4. Механика деформируемых тел**

Все рассмотренные в предыдущем параграфе положения относятся к абсолютно твердому недеформируемому телу. В реальности таких тел не существует. Все тела под действием приложенных к ним внешних нагрузок в той или иной степени деформируются, а в некоторых случаях происходит разрушение конструкции.

***Деформация*** *– изменение размеров или формы тела под действием внешних нагрузок.*

Деформации, возникающие при действии обычных эксплуатационных нагрузок, невелики, и их можно обнаружить только специальными приборами. Небольшие деформации не оказывают существенного влияния на законы равновесия, однако, без их изучения невозможно решить важную для практики задачу, при каких условиях может произойти разрушение детали или при каких условиях деталь может безопасно работать.

Под действием приложенных нагрузок элементы конструкций деформируются. В процессе эксплуатации возникают следующие основные деформации: растяжение, сжатие, сдвиг, кручение и изгиб.

*Растяжение* испытывают трубопроводы, оболочки под воздействием внутреннего давления, сварные швы, болты с зазором, канаты, тросы, ремни, цепи.

На *сжатие* работают колонны гидропрессов, нажимные плиты щековых дробилок, кирпичная и бетонная кладка, стенки вакуумныи аппаратов, трубки кожухотрубчатого теплообменника, сварные швы.

Деформацию *сдвига* испытывают заклепки, болты без зазора, шпонки, сварные швы. Деформацию сдвига, доведенную до разрушения материала, называют *срезом*. Срез возникает при резке ножницами или штамповкн деталей из листового материала.

На *кручение* работают валы перемешивающих устройств, валы центрифуг, дробилок, вальцов, каландров, аппараты барабанного типа, вращающиеся печи. Обычно деформация кручения сопровождается изгибом.

На *изгиб* работают балки, трубопроводы, оси, зубья зубчатых колес и конструкции, указанные выше при рассмотрении кручения.

**1.5. Основные допущения и принципы сопротивления материалов**

Приступая к расчету элемента конструкции необходимо установить, что является существенным и что несущественным для расчета. Для этого следует произвести схематизацию объекта, отбросить второстепенные факторы, а затем создать расчетную схему объекта.

***Расчетная схема*** *– реальный объект, освобожденный от несущественных факторов.*

Если, например, требуется произвести расчет на прочность вала мешалки, то в первую очередь надо учесть гидродинамические силы, возникающие при перемешивании, силы инерции, вызванные эксцентриситетом вала и мешалки, массу вала и мешалки. В то же время можно не учитывать влияние давление внутри аппарата, способа крепления мешалки к валу и т.п.

Для одного и того же объекта может быть предложено несколько расчетных схем, в зависимости от того, что интересует инженера-технолога в данном конкретном случае.

При выборе расчетной схемы вводят упрощения в геометрию реальных объектов, схематизацию приложенных нагрузок, свойств материала и характера деформирования твердого тела.

**1.5.1. Упрощения в геометрии объекта.**

Основным упрощающим приемом является приведение геометрической формы элемента конструкции к схеме бруса или оболочки.

***Брус*** *– тело, у которого одно измерение (линейный размер) гораздо больше двух других (рис. 1.5).*

***Ось бруса*** *– это линия, которая соединяет центры тяжести (рис. 1.5, 1) его поперечных сечений (рис. 1.5, 2).*

Брус может иметь постоянное или переменное сечение. В зависимости от формы оси брус может быть прямым (рис. 1.5, а) или кривым (рис. 1.5, б).

*l*

*h*

*b*

*1*

*2*

*3*

*б*

*a*

*а*

*a*

Рис. 1.5. Брус: *а* – прямой, *б* – кривой.

*1* – центр тяжести, *2* – поперечное сечение, *3* – ось бруса

Брус с прямолинейной осью, нагруженный силами вдоль оси, называется *стержнем* (рис. 1.6, а), при поперечном нагружении – *балкой* (рис. 1.6, б).

На рис. 1.7 и 1.8 приведены примеры реальных объектов и их расчетных схем в виде стержней и балок.

*F*

*F*

*a*

*a*

*б*

*a*

Рис. 1.6. Схематизация геометрических элементов: *а* – стержень, *б* – балка

*l*

*F*

*F*

*a*

*a*

*б*

*б*

*a*

Рис. 1.7. Трубки кожухотрубчатого теплообменника:

*а* – расчетная схема в виде стержня, *б* – реальный объект

*a*

*a*

*б*

*б*

*a*

Рис. 1.8. Трубопровод:

*а* – реальный объект, *б* – расчетная схема в виде балки

***Оболочка*** *– тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями, одно из измерений которого (толщина) значительно меньше двух других (рис. 1.9, а).*

К схеме оболочки сводятся такие конструктивные элементы, как стенки сосудов для хранения жидкостей, газов и сыпучих материалов (стенки резервуаров, бункеров, химических аппаратов, реакторов, стенки кожухотрубчатых теплообменников и т.п.), листовые конструкции (кожух воздухонагревателя, пылеуловителя), купола и своды зданий.

Если при тех же соотношениях размеров тело ограничено параллельными плоскостями, то оно называется *пластиной* (рис. 1.9, б).

*l*

*l*

*b*

*b*

*t*

*t*

*a*

*a*

*б*

*a*

Рис. 1.9. Геометрические элементы:

*а* – оболочка, *б* – пластина.

**1.5.2. Схематизация нагрузок.**

При схематизации реальных машин и аппаратов делают упрощения и в системе сил, приложенных к элементу конструкции.

Внешние силы делят на активные силы и реакции связей. Активные внешние силы называют нагрузками.

*Нагрузки, действующие на конструкции и их элементы извне, называют* ***внешними****.*

Если внешние силы являются результатом непосредственного взаимодействия элемента в другими телами (твердыми, жидкими, газообразными), то они прикладываются только по площадкам контакта и называются *поверхностными*. Сюда можно отнести: давление жидкости или газа на стенки сосудов, снеговая нагрузка на кровлю здания, ветровая нагрузка и др.

Так как соприкосание реальных (деформируемых) тел всегда происходит не в точке, а по некоторой, пусть даже очень малой, площадке, то все поверхностные нагрузки являются распределенными. Однако, когда площадка контакта пренебрежимо мала по сравнению с размерами нагруженнаемого элемента, вводят понятие *сосредоточенной* силы как равнодействующей давления по указанной площадке (например сила, обусловленная давлением обода колеса на рельс).

В практических расчетах часто встречается нагрузка, арспределенная по длине элемента конструкции. Так, например, на каждую промежуточную балку перекрытия здания приходится полоса поверхностной нагрузки, равномерно распределенной по длине балки. Такая нагрузка называется *равномерно распределенной* и графически изображается в виде прямоугольника с интенсивностью распределения *q* (см. рис. 1.8).

В процессе расчетной схематизации реальные нагрузки не всегда могут быть сведены к сосредоточенным и распределенным силовым воздействиям. Возможны и моментные воздействия – в виде сосредоточенных моментов и моментов, распределенных по длине элемента или его поверхности как результат действия пары сил.

В Международной системе единиц (СИ) единицы нагрузок следующие:

– силы в ньютонах (Н, чаще в килоньютонах, кН=103⋅Н);

– моменты в Н⋅м (иногда в кН⋅м);

– давление в паскалях (Па=Н/м2, чаще в МПа=106⋅Па);

– интенсивность распределенной нагрузки в Н/м (чаще кН/м).

*По характеру действия* принято различать статические, динамические и повторно-переменные нагрузки.

***Статическая нагрузка*** *прикладывается к объекту постепенно с небольшой скоростью (ускорение ≈0) и с течением времени не изменяется (например, нагрузка от собственного веса, снеговая нагрузка).*

***Динамическая нагрузка*** *зависит от ускорения взаимодействующих элементов конструкций и изменяется во времени с большой скоростью (например, ударные нагрузки).*

***Повторно-переменная нагрузка*** *изменяется циклически с течением времени.*

Все элементы в реальных конструкциях соединяются между собой и с основанием различными способами. При взаимодействии нескольких тел образуются связи между ними.

***Связями*** *называются ограничения, налагаемые на положения и скорости точек в пространстве.*

***Опора*** *это тип связи между контактирующими телами.*

Сила, с которой тело действует на связь, называется *силой давления*; сила, с которой связь действует на тело, называется *силой реакции* (*реакция*). Эти силы равны по модулю и действуют по одной прямой в противоположных направлениях. Силы реакции и давления приложены к различным телам и поэтому не представляют собой систему сил.

При решении задач статики по упрощенным расчетным схемам несвободное тело условно изображают как свободное, т.е. освобождают тело от связей, заменяя их реакциями.

Различают следующие типы закреплений и возможные реакции связей:

*Цилиндрический шарнир* – соединение двух или более тел посредством цилиндрического стержня, так называемого пальца, вставленного в отверстия в этих телах.

– *подвижная шарнирная опора* (подвижный шарнир). Такая опора не препятствует вращению конца балки и его перемещению вдоль плоскости качения (рис. 1.10). Подвижные опоры дают возможность балке изменять свою длину.

*Реакция R подвижного шарнира всегда* ***направлена перпендикулярно опорной поверхности.***



Рис. 1.10. Условное обозначение шарнирно-подвижной опоры с реакциями

– *неподвижная шарнирная опора* (неподвижный шарнир). Такая опора допускает вращение конца балки, но ограничивает поступательное перемещение в любом направлении (рис. 1.11).



Рис. 1.11. Условное обозначение шарнирно-неподвижной опоры с реакциями

Реакция *R* неподвижного шарнира представляется в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих в проекциях на оси принятой системы координат (*Rx* и *Ry*). Модуль *R* определяется по формуле:

. 1.4

*– жесткая заделка или защемление*. Такое закрепление не допускает ни линейных, ни угловых перемещений опорного сечения (рис 1.12).



Рис. 1.12. Условное обозначение защемления с реакциями

В защемлении возникает силовая реакция *R*, которая представляется в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих в проекциях на оси принятой системы координат (*Rx* и *Ry*) и реактивный момент (момент защемления) *MR*.

Для определения реакций необходимо составить *уравнения равновесия сил.*В общем случае, *для пространственной системы произвольно расположенных сил,* записывают шесть уравнений равновесия в пространственной декартовой системе координат (см. выше и подробнее в раздела теоретической механики).

**1.5.3. Схематизация свойств материалов.**

При выборе модели материала учитывают наиболее значимые факторы и отбрасывают несущественные, мало влияющие на условия функционирования элементов конструкции.

Принимают основные гипотезы, касающиеся свойств материалов, получившие экспериментальное подтверждение.

1. *Материал имеет непрерывное строение в виде сплошной среды.* Таким образом, не принимается во внимание дискретная, атомистическая структура вещества. Это допущение оправдано с практической точки зрения, т.к. большинство материалов имеет настолько мелкозернистую структуру, что без существенных погрешностей можно считать их строение сплошным и непрерывным, это объясняется тем, что размеры реальных деталей во много раз больше межатомных расстояний.

2. *Материал однороден и обладает одинаковыми свойствами во всех точках и во всех направлениях (изотропен).* Данное предположение относится к большинству материалов, однако существуют исключения. Например, стеклопластики, древесина и др.

3. *В материале до приложения внешней нагрузки нет внутренних усилий,* т.е. предполагается отсутствие остаточных температурных, технологических и др. напряжений*.* Это утверждение полностью не выполняется ни для одного материала, однако считают их несущественными для приближенных расчетов.

4. *Материал обладает линейной упругостью.*

***Упругость*** *– свойство материала восстанавливать свою форму после снятия внешней нагрузки.*

Деформации, полностью исчезающие после снятия нагрузки называются упругими в отличие от пластических (остаточных), которые не исчезают.

Линейная упругость означает, что деформация прямо пропорциональна нагрузке (закон Гука).

**1.5.4. Схематизация характера деформирования твердого тела.**

Рассмотрим гипотезы и допущения, связанные с деформациями элементов конструкции.

1. *Принцип неизменности размеров (начальных размеров).* Деформации элементов конструкций под нагрузкой столь малы, что их размеры можно считать постоянными, а взаимное расположение нагрузок – неизменным. Так, например, не учитывают смещение Δ*z* линии действия силы *F* (рис. 1.13, а).

*F*

*Δ z*

*a*

*a*

*b*

*a′*

*b′*

*90°*

*90°*

*b*

Рис. 1.13 Деформации элементов конструкции:

*а* – принцип начальных размеров, *б* – гипотеза плоских сечений

2. *Допущение о линейной деформируемости тела* – перемещения точек и сечений тела в известных пределах нагружения прямо пропорциональны силам их вызывающим.

3. *Гипотеза плоских сечений* (гипотеза Бернулли) – плоские поперечные сечения проведенные в теле до деформации (до приложения нагрузки) остаются при деформации плоскими и нормальными к оси (рис. 1.13, б).

4. *Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).* Результат воздействия системы сил на элемент конструкции равен сумме результатов воздействий тех же сил, прилагаемых в отдельности, и не зависит от последовательности приложения. Этот принцип применим к деформируемым телам только при условии выполнения всех предыдущих допущений. Он позволяет расчленить сложные задачи на более простые.

5. *Принцип Сен-Венана (принцип смягчения граничных условий)*. В точках элемента конструкции, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, величина внутренних сил не зависит от способа приложения этих нагрузок.

*Исходя из данного принципа, внутренние силы в точке приложения внешних нагрузок будут изменяться* ***скачкообразно****.*

Перечисленные гипотезы, допущения и упрощения являются основополагающими, но они не исчерпывают всевозможных приемов идеализации изучаемых объектов.

**1.6. Внутренние силовые факторы (внутренние силы)**

В недеформированном состоянии, т.е. при отсутствии внешних воздействий, связность тела обусловлена силами взаимодействия атомов. Эти силы стремятся сохранить тело как единое целое, препятствуя любой попытке изменить взаимное расположение атомов и таким образом деформировать тело.

Внешние воздействия, наоборот, стремятся вызвать деформирование тела путем изменения межатомных расстояний, взаимного расположения атомов и сил взаимодействия. Сплошное однородное тело (см. гипотезы и допущения) не имеет в своем составе взаимодействующих частиц, и его целостность обеспечивают внутренние связи.

При действии внешних сил на элемент конструкции он деформируется, расстояния между атомами или молекулами изменяются, изменяется и межмолекулярное (межатомное) взаимодействие. Дополнительные силы межатомного взаимодействия, возникающие в элементе конструкции под действием внешних нагрузок, называют внутренними силами или внутренними силовыми факторами. При возрастании внешних сил увеличиваются и внутренние, но лишь до определенного предела, выше которого наступает разрушение элемента конструкции.

*Внутренние усилия являются непосредственной причиной разрушения любого элемента конструкции.*

**1.7. Метод сечений**

Внутренние силы, возникающие в теле под действием нагрузки – силы непрерывно распределенные (в соответствии с допущением о непрерывности материала тела). Эти внутренние силы приводятся к равнодействующей усилий и моментов, которые представляют собой составляющие главного вектора и главного момента внутренних сил (подробнее см. курс теоретической механики).

Для определения внутренних силовых факторов применяют *метод сечений*.

***Метод сечений*** *заключается в том, что тело мысленно разрезается плоскостью на две части, любая из которых отбрасывается и взамен нее к сечению оставшейся части прикладываются внутренние силы, действовавшие до разреза; оставленная часть рассматривается как самостоятельное тело, находящееся в равновесии под действием внешних и приложенных к сечению внутренних сил.*

Очевидно, что, согласно третьему закону Ньютона, внутренние силы, действующие в сечении оставшейся и отброшенной частей тела, равны по модулю, но противоположны по направлению. Таким образом, рассматривая равновесие любой из двух частей рассеченного тела, получим одно и тоже значение внутренних сил.

***Выгоднее рассматривать*** *ту часть тела, для которой уравнения равновесия проще.*

Так как основным расчетным элементом в прикладной механике является брус, и чаще всего нас будут интересовать внутренние силы в его поперечном сечении, то рассмотрим именно этот геометрический элемент.

Элемент конструкции в виде бруса, находящийся в равновесии (рис. 1.15, а), в интересующем нас месте мысленно рассекаем плоскостью. Затем одну из частей отбрасываем. Внешние нагрузки, приложенные к оставшейся части более не находятся в равновесии. Для восстановления равновесия в сечении должны быть приложены силы, с которыми отброшенная часть бруса действовала на оставшуюся часть, т.е. внутренние силы.

*F1*

*F2*

*F3*

*F4*

*F5*

*F5*

*F4*

*M*

*q*

*q*

*x*

*y*

*z*

*Qz*

*Qy*

*N*

*Mz*

*My*

*T*

*a*

*a*

*б*

*б*

*a*

Рис. 1.15 Схемы внешних (*а*) и внутренних (*б*) сил в брусе

Обозначим систему координат *xyz* с началом отсчета в центре тяжести поперечного сечения: ось *x* – продольная ось бруса; оси *y* и *z* – главные оси инерции сечения тела. Как всякую систему сил, внутренние силы можно привести к центру тяжести сечения, тогда получим результирующую силу (*главный вектор силы*) и результирующий момент (*главный момент*).

Спроектировав на главные центральные оси координат *x*, *y* и *z*, получим 6 внутренних силовых факторов (рис. 1.15, б): 3 силы (*N*, *Qy*, *Qz*) и 3 момента (*Mx, My, Mz*). Полученные *проекции главного вектора силы* и *главного момента* на оси и плоскости называются ***внутренними силовыми факторами*** (ВСФ).

*Продольная (нормальная*) сила *N* представляет собой сумму проекций всех внутренних сил в сечении на ось *x* (ось *x* совмещена с осью бруса и направлена в сторону внешней нормали). *Поперечные силы* *Qy*, *Qz* – суммы проекций всех внутренних сил в сечении на соответствующие оси. *Крутящий момент* *T* – это сумма моментов всех внутренних сил в сечении относительно оси *x*. *Изгибающие моменты* *My, Mz* – это суммы моментов всех внутренних сил в сечении относительно соответствующих осей.

Определение внутренних силовых факторов производится с помощью уравнений статики:

– *продольная (нормальная) сила* численно равна алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного бруса, на ось *x*

; 1.5

– *поперечные силы* численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного бруса, на ось *y* или *z* соответственно

; 1.6

– *крутящий момент* численно равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного бруса, относительно оси *x*

; 1.7

– *изгибающие моменты* численно равны алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного бруса, относительно осей *y* и *z* соответственно

. 1.8

**1.8. Понятие о напряжениях**

Определение внутренних сил в сечениях элемента конструкции необходимо в первую очередь для оценки его несущей способности. Однако усилия, найденные методом сечений, являются только рав*нодействующими* внутренних сил, которые распределены по рассматриваемому сечению. Интенсивность внутренних сил может быть различной в разных точках сечения и в разном направлении. Чтобы судить о прочности, необходимо знать наибольшие силы, возникающие в отдельных точках сечения.

Для того чтобы оценить *интенсивность* внутренних сил в определенной точке, вводится понятие напряжения. Напряжение характеризует интенсивность внутренних сил, действующих в сечении на единицу площади.

Рассмотрим сечение произвольного бруса (рис. 1.16, а). Выделим в окрестностях рассматриваемой точки площадку *dA*. Пусть Δ*R* равнодействующая внутренних сил, действующих на данную малую площадку.

*z*

*z*

τ*z*

τ*y*

σ

Δ*R*

*y*

*x*

*dA*

*x*

*y*

τ

*p*

*a*

*a*

*б*

*б*

*a*

Рис. 1.16. Равнодействующая внутренних сил (а) и напряжения (б) на элементарной площадке сечения

Среднее значение внутренних сил Δ*R*, приходящихся на единицу площади *dA* рассматриваемой площадки, будет равно

. 1.9

Величина *p*ср называется средним напряжением и характеризует среднюю интенсивность внутренних сил. Уменьшая размеры площади, в пределе получим

. 1.10

Величину *p* называют истинным напряжением или просто напряжением в данной точке сечения.

***Напряжение*** *– внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади в данной точке конкретного сечения.*

Напряжение, как и давление, имеет размерность силы, деленной на площадь поперечного сечения: . Единица напряжений в Па очень мала, и в расчетах используют более крупную кратную единицу – мегапаскаль (МПа= 106⋅Па), иногда – гигапаскаль (ГПа=109⋅Па).

**1.8.1. Составляющие полного напряжения.**

Проекцию полного напряжения (рис. 1.16, б) на ось, нормальную к плоскости сечения, называют *нормальным* напряжением и обозначают греческой буквой σ (сигма). Проекции полного напряжения, располагающиеся в плоскости сечения, называют *касательными* напряжениями и обозначают греческой буквой τ (тау).

Так как угол между нормальными и касательными напряжениями равен 90°, то модуль полного напряжения определяют по формуле:

. 1.11

Касательное напряжения, в зависимости от действующих сил может иметь любое направление в плоскости сечения.

Для упрощения понимания касательное напряжение τ раскладывают на две составляющие в виде проекций на главные оси сечения – τ*x* и τ*y*.

Принятые обозначения напряжений показаны на рис. 1.16, б.

**2. ОСЕВОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ**

Растяжение и сжатие часто встречаются в элементах конструкций машин и аппаратов химической технологии. Например, трубы в кожухотрубчатом теплообменнике (рис 1.7, б).

Растяжение возникает в тросе любого подъемника (рис. 2.1, а). На сжатие под действием собственного веса при отсутствии ветровой нагрузки работают сооружения башенного типа (рис 2.1, б).

*a*

*a*

*б*

*a*

Рис. 2.1 Примеры реальных объектов работающих на растяжение (сжатие):

а – трос подъемника, б – труба

Тонкий и длинный прямой брус, работающий на растяжение или сжатие, обычно называют стержнем (рис 1.7, а, 2.1, а). Вертикально стоящий брус, предназначенный для восприятия сжимающей нагрузки от вышележащих конструкций, называется колонной или стойкой (рис. 2.1, б).

Тонкостенные сосуды и аппараты подвергаются в процессе работы одновременному растяжению или сжатию по одному или двум направлениям.

Чаще всего растягивающие или сжимающие силы действуют по одной оси (оси стержня), такой вид деформации называется осевым (центральным) растяжением или сжатием.

Осевым растяжением или сжатием называется такой вид деформации бруса, при котором внутренние силы в его поперечных сечениях приводятся к одной равнодействующей силе *N*, направленной вдоль оси бруса (оси *x*). Эта сила, как показывалось выше, называется *продольной или нормальной*, т.к. она перпендикулярна (нормальна) поперечному сечению.

**2.1. Определение внутренних усилий.**

Продольную силу *N* определяют методом сечений. Брус рассекают воображаемой плоскостью, перпендикулярной к его оси, мысленно отбрасывают одну из частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестной силой *N* (рис 2.2).

*F*

*F*

*N*

*x*

Рис. 2.2 Связь внешних и внутренних сил в стержне

После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части , из которого определяют значение *N*.

***Правило знаков.*** *Силу N принято считать положительной при растяжении, т.е. когда она направлена от сечения (см рис 2.2). При сжатии, наоборот, продольная сила отрицательна и направлена к сечению.*

Если направление силы *N* неизвестно, то ее условно принимают положительной, полагая, что брус растянут. Знак «минус» при решении уравнения равновесия укажет на ошибочность выбранного направления, и в действительности брус окажется сжатым.

В тех случаях, когда значения продольной силы в различных сечениях бруса неодинаковы, строят эпюру продольных сил, которая представляет собой график изменения силы *N* по длине бруса.

***Эпюра*** *– графическое представление закона изменения внутреннего силового фактора по длине бруса.*

Эпюра необходима для расчета бруса на прочность. Она позволяет быстро находить опасные сечения.

***Опасное сечение*** *– сечение, где внутренний силовой фактор достигает наибольшего абсолютного значения.*

Эпюра строится в пределах *участков*. Метод сечений применяется последовательно на каждом из выделенных участков.

***Участок*** *это отрезок между двумя* ***ключевыми точками****.*

Построение эпюр рассмотрим на примере.

Задан невесомый, защемленный левым концом прямой брус, вдоль оси которого действуют активные силы *F* и 3⋅*F* (рис 2.3, а).

*F*

*F*

*3F*

*A*

*B*

*C*

*1*

*1*

*x1*

*F*

*A*

*x*

*N1*

*x*

*2*

*2*

*x2*

*F*

*A*

*N2*

*x*

*3F*

*B*

*Эпюра N*

*l*

*l*

*2F*

*+*

*−*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 2.3 Пример построения эпюры *N* при растяжении (сжатии)

Изображенный на рисунке брус имеет два участка, их границами являются сечения, где приложены внешние силы. Расчет защемленного бруса целесообразно начинать от свободного конца, тогда отпадает необходимость в предварительном определении реакции заделки.

Применяем метод сечений, мысленно рассекаем стержень по сечению 1–1 на расстоянии *x*1 от свободного конца (0 ≤ *x*1 < *l*), отбросим левую часть и рассмотрим условие равновесия правой части (рис. 2.3, б)

, . 2.1

Продольная сила положительная, следовательно, ее первоначальное направление выбрано правильно, и участок работает на растяжение.

Путем аналогичных рассуждений в сечении 2–2 (рис. 2.3, в), на расстоянии *x*2 от правого края (*l* ≤ *x*2 < 2*l*) получим

, . 2.2

Продольная сила отрицательная, следовательно, ее первоначальное направление выбрано неправильно, и участок работает на сжатие.

Для построения эпюры *N* проводят ось абсцисс параллельно оси бруса. Значения нормальных сил откладывают в выбранном масштабе с учетом знаков. Эпюры штрихуют в направлении, перпендикулярном оси бруса, т.е. каждая штриховка дает в принятом масштабе значение *N*. Построенная таким образом эпюра *N* показана на рис. 2.3, г.

Из рассмотрения построенной эпюры видно, что в сечениях, где приложены внешние силы (на границах участков) внутренняя сила меняется скачкообразно, причем размер скачка равен соответствующей внешней силе.

Полученное значение продольной силы справедливо на всем протяжении участка, т.к. в любо его сечении удовлетворяется записанное уравнение равновесия. Следовательно, на участке внутренняя сила имеет постоянное значение.

Необходимо отметить, что аналогичный результат можно получить, если рассматривать левую часть, отбрасывая правую, но при этом необходимо предварительно определять реакцию заделки.

*Сформулируем общие правила построения эпюр внутренних силовых факторов:*

*– разбиваем брус (стержень, балку) на участки нагружения, при этом учитывая, что ключевыми точками могут быть: торцы элемента; точки приложения сосредоточенных нагрузок (внешние силы, моменты; реакции в опорах и заделке); начало и конец распределенной нагрузки (****положение равнодействующей силы от распределенной нагрузки не является ключевой точкой!!!****); изменение геометрического параметра сечения (площадь, момент инерции и др.)*

*– с помощью метода сечений определяем внутренние силовые факторы на каждом участке и закон их изменения (составляя выражения равновесия и выражая искомую неизвестную);*

*– подсчитываем значения внутренних силовых факторов в характерных сечениях;*

*– используя данные расчетов и закон изменения, строим эпюры внутренних силовых факторов.*

**2.2. Напряжения в поперечных сечениях при растяжении (сжатии).**

Определим закон изменения напряжений по сечению стержня при растяжении и сжатии. Если на призматический стержень нанести сетку линий, параллельных и перпендикулярных оси стержня (рис. 2.4, а), и приложить к нему растягивающую силу *F*, то можно убедиться, что линии сетки и после деформации остаются взаимно перпендикулярными, кроме малого участка, где приложена сила *F*. Согласно принципу Сен-Венана этот участок невелик, и его можно не учитывать при рассмотрении напряженного состояния элемента конструкции.

*F*

*F*

*F*

*x*

*σx=σ*

*N*

*l*

*Δl*

*a*

*a*

*б*

*a*

*в*

*a*

Рис. 2.4. Экспериментальная проверка гипотезы плоских сечений при растяжении

Все горизонтальные линии переместятся вниз, оставаясь прямыми и горизонтальными (рис. 2.4, б). Это дает возможность считать, что все поперечные сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, останутся такими и после деформации (гипотеза плоских сечений или гипотеза Бернулли). Данное заключение подтверждается и опытным путем.

Такая картина деформации дает основание считать, что в поперечных сечениях стержня действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению, а касательные напряжения равны нулю (рис. 2.4, в).

Продольная сила *N* является равнодействующей внутренних сил , возникающих на бесконечно малых площадках поперечного сечения, ее можно представить в виде

. 2.3

Поскольку , из формулы получим

, 2.4

где *N* – продольный силовой фактор; *А* – площадь поперечного сечения.

Предложенные формулы справедливы и для сжатия, с той разницей, что сжимающие напряжения считают отрицательными.

*При сжатии длинного тонкого стержня может произойти потеря устойчивости, когда стержень изгибается и изменяет свою первоначальную форму. Следовательно, кроме расчета на прочность при сжатии таких стержней необходимо проводить расчет на устойчивость.*

В тех случаях, когда нормальные напряжения в различных сечениях бруса неодинаковы, строят эпюру нормальных напряжений, которая по аналогии с эпюрой *N* представляет собой график изменения напряжений по длине стержня. При этом следует иметь в виду, что у бруса постоянного сечения эпюры *N* и σ подобны (ординаты отличаются на величину *A*).

Знак нормальных напряжений устанавливается так же, как для продольных сил: при растяжении – «плюс», при сжатии – «минус». Эпюру σ строят после построения эпюры *N*, на тех же участках.

Для стержня переменного сечения (рис. 2.5, а) построим эпюру напряжений σ.

*F*

*2F*

*2A*

*A*

*x*

*F*

*Эпюра N*

*F/A*

*+*

*−*

*−*

*Эпюра σ*

*+*

*−*

*−*

*F*

*F*

*F/A*

*F/2A*

*а*

*б*

*в*

*т.A*

*т. B*

*т. C*

*т. D*

Рис. 2.5. Пример расчета стержня (*а*) и построенные эпюры *N* (*б*) и σ (*б*)

Строим эпюры *N*, как было показано выше (см. рис. 2.3). Разобьём стержень на участки нагружения, начиная от свободного края. Границами участков будут сечения, в которых приложены внешние нагрузки и изменяется площадь поперечного сечения. Для данного стержня три участка, на которых необходимо применять метод сечений.

На участке *AB*: , .

На участке *BC*: , .

На участке *CD*: , .

Построенная эпюра *N* показана на рис. 2.5, б.

Расчет напряжений производится по формуле (2.4) на участках, где определяли внутреннюю продольную силу *N*.

На участке *AB*: .

На участке *BC*: .

На участке *CD*: .

Эпюра напряжений σ строится с соблюдением тех же правил, что и при построении эпюр *N*. Полученная эпюра напряжений для стержня представлена на рис. 2.5, в.

**2.3. Продольные деформации при растяжении или сжатии**

Для характеристики интенсивности изменения размеров и формы элемента конструкции при нагружении используют понятие *деформации*.

При осевом растяжении (сжатии) в брусе возникает только *линейная* деформация.

Представим прямой жесткий брус постоянного поперечного сечения *A*, длиной *l*0, жестко защемленный одним концом и нагруженный на другом конце растягивающей силой *F* (рис. 2.6, а). Собственным весом бруса пренебрегаем.

*F*

*x*

*l0*

*Δl*

*l*

*A*

*d0*

*d*

*Δd/2*

*а*

*б*

Рис. 2.6. Линейные деформации стержня:

а – продольные, б – поперечные

Под действием силы *F* стержень удлинится и его абсолютное удлинение составит величину Δ*l* (рис. 2.6, а)

, 2.5

где Δ*l* – абсолютная продольная деформация (абсолютное удлинение), *l* – конечная длина стержня, *l*0 – начальная длина стержня.

Отношение абсолютного удлинения к первоначальной длине называется относительной продольной деформацией:

Относительное удлинение число отвлеченное, выражается в долях единицы, иногда в процентах (значение не ограничено):

 или . 2.6

Формула для определения относительной продольной деформации отражает геометрическую сторону задачи о растяжении (сжатии): при растяжении , , при сжатии – наоборот.

**2.4. Закон Гука при растяжении и сжатии**

Эксперименты показывают, что при растяжении длина стержня увеличивается прямо пропорционально нагрузке до определенного предела, а при сжатии – уменьшается.

В упругой стадии работы большинства конструкционных материалов напряжения и деформации связаны зависимостью, которая носит название *закон Гука*

, 2.7

где  – напряжение; *E* – коэффициент пропорциональности между нагрузкой и деформацией;  – относительная деформация стержня.

***Закон Гука*** *– нормальное напряжение прямо пропорционально относительному удлинению или укорочению.*

Коэффициент пропорциональности *E* называется *модулем продольной упругости при растяжении или модулем упругости первого рода* или *модулем Юнга*.

***Модуль Юнга*** *этот упругая характеристика материала, определяемая экспериментально – характеризует способность материала упруго сопротивляется деформированию.*

Модуль *E* – физическая константа (постоянная), характеризующая жесткость материала. Чем больше *E*, тем меньше деформируется материал при одном и том же напряжении.

Модуль упругости и напряжение выражаются в одинаковых единицах (Па, ГПа).

Нормативные значения модуля продольной упругости для наиболее распространённых материалов представлены в табл. 2.1.

Таблица 2.1.

Значения модуля продольной упругости и коэффициента Пуассона

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Материал | Модуль Юнга, ГПа | Коэффициент Пуассона |
| Сталь | 190–220 | 0,25–0,33 |
| Чугун | 75–160 | 0,23–0,27 |
| Сплав алюминия | 69–71 | 0,32-0,36 |

Формула (2.7) представляет собой математическое выражение закона Гука при растяжении (сжатии), установленное экспериментальным путем и описывающего свойства материала.

Для практических расчетов более удобна формула, которая получается после подставления выражений  и  в исходную формулу и выражения из последней абсолютного удлинения (укорочения):

. 2.8

Произведение  называется *жесткостью сечения* при растяжении и характеризует одновременно физико-механические свойства материала и геометрические размеры поперечного сечения бруса.

Отношение  называется *жесткостью бруса* при растяжении или сжатии.

Зависимость (2.8) описывает свойства не материала, а бруса, и ее следует рассматривать как *закон Гука для конструкции*. Данная формула позволяет определять изменение длины бруса (или его отдельного участка) постоянного сечения, если известны геометрические размеры (*l*, *A*) и материал, из которого выполнен брус (*E*), а продольная сила постоянна.

В общем случае, когда *N* и (или) *A* на отдельных участках бруса различаются, то вычисление  производят в пределах каждого участка, а затем полученные результаты алгебраически суммируются:

, 2.9

где  – абсолютная деформация на отдельных участках,  – длина участка, для которого  и  являются постоянными.

Вследствие деформации поперечные сечения бруса *перемещаются* в продольном направлении. Перемещение является следствием деформации, но эти два понятия необходимо четко разграничивать.

Итак, *деформация бруса* при растяжении и сжатии характеризуется абсолютным и относительным удлинением или укорочением.

*Перемещение* – это новое положение точек элемента конструкции после деформации.

Взаимное перемещение двух сечений равно изменению длины части бруса, заключенной между этими сечениями.

Для нормальной эксплуатации конструкции деформации отдельных элементов должны быть, как правило, упругими, а вызванные ими перемещения не должны превышать по величине определенных допускаемых значений.

**2.5. Поперечные деформации при растяжении и сжатии**

Опыт показывает, что при растяжении поперечные сечения бруса уменьшаются, а при сжатии – увеличиваются. Это характерно для растяжения и сжатия всех материалов.

Рассмотрим деформации, которые возникают в поперечных сечениях стержня при его растяжении (рис. 2.6, б).

По аналогии с продольной деформацией поперечная деформация  выражается отношением

, 2.10

где  – абсолютное изменение поперечных размеров бруса, *d*0 – начальный диаметр стержня, *d* – конечный диаметр стержня.

Поперечная деформация изотропного материала по всем направлениям одинакова. При растяжении поперечные деформации отрицательные (сужение), а при сжатии – положительные (расширение).

Относительная поперечная деформация выражается в долях единицы или в процентах (не может быть более 100%).

Отношение величин поперечной и продольной относительной деформации называется *коэффициентом поперечной деформации* или *коэффициентом Пуассона*

. 2.11

Опытным путем установлено, что при одноосном растяжении или сжатии коэффициент Пуассона является для данного материала величиной постоянной. Оно лежит в пределах 0 – 0,5. Для наиболее распространенных материалов μ составляет 0,2–0,3 (см. табл. 2.1).

Коэффициент Пуассона – величина безразмерная, характеризует упругие свойства материала (способность материала к поперечным деформациям) и называется *упругой постоянной*.

**3. ОПЫТНОЕ ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛОВ**

**3.1. Назначение и виды испытаний.**

Для того чтобы ответить на вопрос о работоспособности рассчитываемого элемента конструкции, необходимо знать как максимальные значения напряжений или деформаций, так и механические характеристики материала из которого изготовлен элемент конструкции.

Механические характеристики материалов, т.е. величины, характеризующие их прочность, пластичность, упругость и упругие постоянные, необходимые для выбора материала и расчетов проектируемых деталей, определяют путем механических испытаний стандартных образцов под нагрузкой, изготовленных из исследуемых материалов.

***Механические испытания*** *– экспериментальное исследование механических свойств материалов на специальных образцах, форма и размеры которых устанавливаются стандартами.*

Следует различать механические испытания материалов и конструкций. При испытании материала определяют свойства материала, а при испытании конструкции – правильность проведенных расчетов, технологических процессов изготовления, сборки, установки и др.

Для изучения механических свойств материалов и установления значения предельных напряжений (по разрушению или по пластическим деформациям) производят испытания образцы материала вплоть до разрушения.

Испытания проводят при нагрузках следующих категорий: статической, ударной и циклической.

По виду деформации, испытываемой образцом, различают испытания на растяжение, сжатие, кручение, изгиб.

Так как результаты испытаний зависят от формы образца, скорости его деформирования, температуры при испытании и т.д., то эксперимент ведут при условиях, предусмотренными ГОСТами.

Испытания проводят на специальных машинах, разнообразных по конструкции и мощности.

Для измерения деформаций применяют специальные приборы (тензометры), имеющие высокую чувствительность.

**3.2. Механические характеристики материалов при растяжении**

Наиболее распространенным является испытание на растяжение цилиндрического образца статической нагрузкой. Опыт на растяжение прост методически и требует сравнительно несложного оборудования. Но основное его достоинство – возможность исследования однородного напряженного состояния (когда поведение материала во всех точках одинаково). Только при таком напряженном состоянии можно установить необходимые механические характеристики, не прибегая к упрощающим гипотезам.

Испытания проводят на длинных стандартных образцах круглого или прямоугольного сечения. Цилиндрические образцы (рис. 3.1) имеют диаметр более 3 мм и длину испытуемой части . При испытаниях чаще используют цилиндрические образцы диаметром 10 мм.

*l*0

*lрабочая*

*d*0

Рис. 3.1. Вид цилиндрического образца для испытаний на растяжение

Результаты испытаний наиболее наглядно проявляются на графике зависимости между нагрузкой *F*, растягивающей образец, и соответствующим удлинением Δ*l*. Такой график называется *диаграммой растяжения*. Для того чтобы исключить влияние абсолютных размеров образца и судить о механических свойствах непосредственно материала, диаграмму перестраивают в другом масштабе: все ординаты делят на начальную площадь поперечного сечения *A*0, а все абсциссы – на первоначальную расчетную длину Δ*l*0. В результате получается график зависимости между нормальным напряжением  и относительной деформацией . Эту диаграмму называют условной диаграммой растяжения, т.к. напряжения и относительные удлинения вычисляют по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине образца.

**3.3. Диаграмма растяжения низкоуглеродистой стали.**

На рис. 3.2, а представлена диаграмма растяжения малоуглеродистой стали, которую относят к числу пластичных материалов. Под графиком, в соответствии с его очертанием, иллюстрируются характерные стадии деформирования образца от начала нагружения до разрыва (рис. 3.2, б).

*O*

*A*

*σпц*

*B*

*C*

*D*

*E*

*K*

*σу*

*σт*

*σпч, σв, σmax*

*L*

*M*

*εу*

*εу*

*εпл*

*εп*

**

**

*l0*

*lк*

*а*

*б*

Рис. 3.2. Диаграмма растяжения малоуглеродистой стали (а) и стадии

деформирования образца (б)

На диаграмме различают следующие характерные участки и точки.В *начальной стадии нагружения*, на участке *OA*, зависимость носит линейный характер, что подтверждает справедливость закона Гука. Наибольшее напряжение, до которого соблюдается этот закон (точка *A* на диаграмме), называется *пределом пропорциональности* .

Из рисунка видно, что , т.е. модуль упругости *E* графически представляет собой тангенс угла наклона прямолинейного участка диаграммы к оси абсцисс. Если до достижения точки *A* сбросить нагрузку до нуля, то график разгрузки совпадает с графиком нагружения. Это говорит о том, что при напряжениях  возникают только *упругие деформации*.

Однако граница области упругой работы материала лежит несколько выше точки *A*. Там, где деформации растут уже быстрее напряжений, закон Гука нарушается, и диаграмма начинает искривляться. Напряжение, соответствующее наибольшей деформации, которая полностью исчезает после разгрузки (точка *B* на диаграмме), называется *пределом упругости* . Точки *A* и *B* лежат настолько близко друг к другу, что на практике их полагают совпадающими, считая .

Начиная с точки *B*, появляются пластические (остаточные) деформации. После точки *B* продолжается дальнейшее искривление диаграммы и в *C* она переходит в практически горизонтальный участок – *площадку текучести*. Образец удлиняется при фактически постоянной нагрузке, течет, т.е. элемент конструкции (образец) необратимо изменяет форму. Напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки, называется *пределом текучести* . Он легко поддается определению и является одной из основных механических характеристик материала.

Ряд материалов дает диаграмму деформирования без ярко выраженной площадки текучести. Для них устанавливают *условный предел текучести* σ0,2, равный напряжению, при котором относительная остаточная деформация образца равна 0,2%.

Текучесть малоуглеродистой стали сопровождается значительными сдвигами кристаллов, поверхность образца становится матовой в результате появления полос (рис. 3.3), наклоненных к оси образца под углом в 45° (линии Людерса-Чернова).

После окончания стадии текучести материал снова начинает сопротивляться деформированию (упрочняется) и диаграмма за точкой *D* поднимается вверх, но более полого.



*Линии Чернова*

*45°*

Рис. 3.3 Линии Людерса-Чернова

Если нагрузить образец до напряжения выше предела пропорциональности, например до точки *L*, то разгрузка пойдет по прямой *LM*, параллельной *OA*. Упругая часть деформации εу исчезнет, пластическая часть – εпл – останется. Таким образом, силовую деформацию в образце можно представить в виде суммы упругой и пластической составляющих

. 3.1

Если материал нагружать повторно, то диаграмма пойдет по прямой *ML* до точки *L*. Необходимо отметить, что диаграмма *MLEK*, получаемая при повторном нагружении, не имеет площадки текучести, а предел пропорциональности (напряжение в точке *L*) выше первоначального предела пропорциональности (напряжение в точке *A*).

*Явление повышения пропорциональности и снижения пластичности материала при повторном нагружении называют* ***наклепом****.*

В ряде случаев наклеп полезен и его создают искусственно, например, в деталях, работающих при циклических нагрузках или в толстостенных сосудах.

В процессе испытания на растяжение продольное удлинение сопровождается поперечным сужением. Обе эти деформации распределяются по расчетной длине образца равномерно (рис. 3.2, б). С течением времени на наиболее слабом участке (обычно это середина образца) образуется резкое местное сужение – шейка. Соответствующее напряжение (наивысшая точка диаграммы *E)* называется *пределом прочности* σпч или *временным сопротивлением* σв, что соответствует наибольшему условному напряжению. Предел прочности является условной характеристикой, которая численно равна отношению наибольшей нагрузки, которую выдержал образец к первоначальной площади сечения.

Площадь сечения образца в шейке быстро уменьшается и, как следствие, падает усилие и условное напряжение. На условной диаграмме напряжение в момент разрыва (в точке *K*) меньше напряжения в точке *E*. Разрыв образца происходит по наименьшему сечению шейки (рис. 3.4).

*d0*

*dк*

Рис. 3.4. Образование шейки в образце из пластичного материала

Иногда, для более подробного изучения значительных пластических деформаций строят истинную диаграмму растяжения с учетом уменьшения площади поперечного сечения, которая идет выше условной диаграммы (на диаграмме не показано).

Важной характеристикой *пластичности* материала является *относительное остаточное удлинение* при разрыве

, 3.2

где *l*К – расчетная длина образца после разрыва.

Второй характеристикой пластичности является *относительное остаточное сужение* при разрыве

, 3.3

где *A*К – площадь наименьшего поперечного сечения шейки при разрыве.

Характеристики δ и ψ являются мерой пластичности материала и показывают способность материала приобретать остаточные пластические деформации. Чем больше δ и ψ, тем пластичнее материал.

*Показатели пластичности материала δ и ψ нельзя путать с величинами деформативности ε|| (продольная деформация) и  (поперечная деформация).*

К числу очень пластичных материалов относятся медь, алюминий, латунь, малоуглеродистая сталь и др. Менее пластичными являются дюраль и бронза, а слабопластичными – большинство легированных сталей.

***Подводя итоги****, можно сделать вывод: характеристикой упругих свойств материалов является предел упругости, характеристикой прочности – предел текучести и предел прочности, характеристиками пластичности – относительное остаточное удлинение и относительное остаточное сужение при разрыве.*

Противоположным свойству пластичности является *хрупкость*.

Материалы, обладающие очень малой пластичностью, называются *хрупкими*. Для таких материалов величина остаточного удлинения при разрыве не превышает 2–5%, в ряде случаев измеряется долями процента. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, камень, керамика, бетон, стекло, др.

***Хрупкость*** *– способность материала разрушаться при назначительных остаточных деформациях.*

*Деление материалов на пластичные и хрупкие является условным.*

**3.4. Диаграмма растяжения хрупких материалов.**

При растяжении хрупких материалов наблюдается ряд особенностей. Характерная диаграмма растяжения (на примере чугуна) показана на рис. 3.5.

*O*

*σпч, σв, σmax*

*εп*

**

**

Рис. 3.5. Диаграмма растяжения чугуна

На диаграмме растяжения отклонение от закона Гука наступает уже в начальной стадии нагружения, разрыв наступает при малых деформациях. Хрупкие материалы плохо сопротивляются растяжению.

Опасность хрупкого разрушения заключается в том, что оно происходит быстро, почти внезапно, без образования шейки. Поэтому на диаграмме растяжения отсутствует площадка текучести. При испытаниях на растяжение хрупких материалов определяют, как правило, только предел прочности

*Чем выше прочностные характеристики материала, тем прочнее материал. В практических расчетах и в справочной литературе для* ***пластичных*** *материалов чаще используют* ***предел текучести*** * , а для* ***хрупких материалов*** *–* ***предел прочности*** *.*

**3.5. Диаграмма деформирования при сжатии пластичных материалов**

Испытание на сжатие *пластичных* материалов менее распространено, чем испытание на растяжение. В упругой области и при малом развитии пластических деформаций диаграмма сжатия таких материалов почти полностью повторяет диаграмму растяжения и не дает никаких новых механических характеристик (рис. 3.6, а). Пределы пропорциональности, упругости и текучести имеют те же значения. Углы наклона прямолинейных участков на обеих диаграммах одинаковы, следовательно, одинаковы и модули упругости.



*σ*

*ε*



*F*

*F*

*б*

*растяжение*

*сжатие*

*100% εсж*

*a*

Рис. 3.6. Диаграммы деформирования пластичного материла при сжатии и растяжении (а), стадии деформирования образца при сжатии (б)

Различия начинаются после наступления текучести. Площадка текучести при сжатии менее ярко выражена, чем в случае растяжения. При больших деформациях сжатие сопровождается увеличением площади поперечного сечения образца, вследствие чего испытание требует постоянно возрастающей нагрузки. Следовательно, при сжатии пластичного материала получить характеристику предела прочности невозможно.

Исследуемый образец сначала приобретает бочкообразную форму, а затем, не разрушаясь, расплющивается (рис. 3.6, б), и дальнейшие испытания ограничиваются возможностями испытательного оборудования. В расчетной практике предел прочности на сжатие условно принимают равным пределу прочности при растяжении.

**3.6. Диаграмма сжатия хрупкого материала**

Для хрупких материалов испытание на сжатие является основным. Образцы доводят до разрушения, а предел прочности определяют, как при растяжении.

Диаграмма сжатия хрупкого материала по виду напоминает диаграмму при растяжении (рис. 3.7, а). Ввиду незначительных отличий в значениях модуля упругости при растяжении и сжатии начальные участки диаграмм совпадают.



*σ*

**







*растяжение*

*сжатие*

*ε*

*F*

*F*

*τmax*

*45°*

*б*

*a*

Рис. 3.7. Диаграммы деформирования хрупкого материла при сжатии

и растяжении (а), вид разрушения образца при сжатии (б)

Разрушение происходит при незначительных деформациях за счет сдвига одной части образца относительно другой. Плоскость сдвига наклонена примерно под углом 45° к оси (рис. 3.7, б).

Большинство хрупких материалов имеют предел прочности при сжатии в 2–3 раза выше, чем при растяжении.

В результате проведения механических испытаний устанавливают предельные напряжения, при которых происходит нарушение работы работы или разрушение детали конструкции.

***Предельным напряжением*** *при статической нагрузке для пластичных материалов является предел текучести, для хрупких – предел прочности.*

**3.7. Допускаемые напряжения**

Конечной целью расчета любой конструкции является использование полученных результатов для оценки пригодности этой конструкции к эксплуатации при минимальной затрате материала.

Любой элемент конструкции и любая машина или аппарат под действием эксплуатационных нагрузок должны обладать достаточной прочностью. В химическом машиностроении чаще всего применяют метод расчета по напряжениям.

*По методу расчета по напряжениям предполагают, что вероятность разрушения максимальна в той точке, где напряжения максимальны.*

Считают, что прочность элемента конструкции будет нарушена в том случае, если хотя бы в одной его точке возникнут остаточные деформации или появится хрупкое разрушение.

Механические испытания позволяют определить эти напряжения, называемые предельными. В дальнейшем при определении опасной точки в детали (где напряжения максимальны) проводят их сравнение с предельными напряжениями для материала.

Для надежной работы машина или аппарат должны обладать определенным *запасом прочности*, т.е. расчетные напряжения должны быть меньше предельных. Это вызвано схематизацией расчетного объекта, отклонением механических характеристик от справочных данных, возникновением непредвиденных нагрузок в период эксплуатации и др.

*Отношение предельного напряжения к наибольшему расчетному напряжению в элементе конструкции называют* ***коэффициентом запаса прочности***

. 3.4

Значение *n* всегда больше единицы. На основе опыта эксплуатации различных конструкций устанавливают *минимально необходимые значения коэффициента* запаса прочности, эти значения называют *допускаемыми* (нормативными). Допускаемые значения коэффициента запаса прочности зависят от свойств, качества и однородности материала, точности представления о нагрузках, действующих на конструкцию, ответственности конструкции и др. и, как правило, регламентируются нормативно-техническими документами (ОСТ, ГОСТ, СТБ, СНиП, ТУ и пр.).

В большинстве случаев коэффициент запаса выбирают по типовым значениям из справочной литературы. Для пластичных материалов принимают , для хрупких – .

Если размеры конструкции известны, то расчет на прочность является проверочным и *условие прочности* записывается следующим образом:

. 3.5

Когда конструкция находится на стадии проектирования, значение *n* задают заранее (значения см. выше), вычисляя допускаемое напряжение, выше которого не должно становиться максимальное напряжение в работающей конструкции.

***Допускаемое напряжение*** *– это опасное напряжение для данного материала, деленное на коэффициент запаса прочности* ***n*** *(коэффициент безопасности):*

. 3.6

В этом случае *условие прочности* записывается так:

. 3.7

*Предельное (опасное) напряжение* соответствует прочностным характеристикам материалов:

– для пластичных материалов – предел текучести;

– для хрупких материалов – предел прочности;

– для хрупко-пластичных материалов – условный предел текучести.

Допускаемые напряжения для большинства традиционных материалов и конструкций, как правило, приводятся в справочной литературе.

**3.8. Расчет на прочность при растяжении (сжатии)**

Определив напряжения в опасном сечении растянутого (сжатого) стержня по формуле (2.4) и установив допускаемые напряжения в соответствии с соображениями, описанными выше, можно провести оценку прочности стержня.

Для этого необходимо фактические напряжения в опасном сечении стержня сравнить с допускаемыми:

, 3.8

где  – наибольшее значение продольного силового фактора, на участке стержня с площадью *А* (берут только из эпюры).

Если допускаемые напряжения при растяжении и сжатии различны, то их обозначают или соответственно.

Записанное неравенство называется *условием прочности при растяжении (сжатии)*.

***Условие прочности*** *– возникающее напряжение в опасном сечении не должно превышать допускаемое.*

При расчете конструкций на прочность встречаются три типа задач, различающихся формой использования расчетной формулы:

1. *Проверка прочности стержня*. Определяется фактическое напряжение по заданным нагрузке и размерам поперечного сечения и сравнивается с допускаемым. Расчет выполняется непосредственно по формуле 3.8.

Фактические напряжения не должны превышать допускаемые более чем на 5% и не должны быть меньше допускаемых более чем на 10%. Перенапряжение больше этого значения недопустимо с точки зрения прочности, а недонапряжение говорит о перерасходе материала.

Фактический запас прочности определяется как отношение  для пластичных материалов или  – для хрупких.

2. *Проектный расчет*, при котором определяются (по известной нагрузке и допускаемому напряжению) размеры поперечного сечения стержня, требуемые из условия прочности, по формуле:

. 3.9

3. *Определение допускаемой продольной силы* по заданным размерам поперечного сечения и известному допускаемому напряжению ведется по формуле:

. 3.10

Определив допускаемую продольную силу (внутренний силовой фактор) и установив связь между продольной силой и нагрузкой (используя метод сечений), можно определить допускаемую нагрузку.

**3.9. Контактные напряжения. Смятие.**

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти смятие поверхностей деталей. Для предотвращения смятия, например, под гайки и головки болтов подкладывают шайбы для увеличения площади контакта (рис. 3.8, а).

*F*

*σсм*

*d*

*δ*

*Условная*

*площадь*

*смятия*

*Напряжения*

*смятия*

*Действительная*

*поверхность смятия*

*а*

*б*

Рис. 3.8. Напряжения (а), действительная и условная поверхности (б) при смятии

Для простоты расчетов полагают, что при контакте по плоскости возникают нормальные напряжения смятия, равномерно распределенные по площади контакта. Расчетное уравнение на смятие имеет вид:

, 3.11

где *F* – сжимающая сила, [σсм] – допускаемое напряжение на смятие, *A*см – площадь контакта (смятия).

Если соприкасающиеся материалы сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют более мягкий материал.

При контакте двух деталей по цилиндрической поверхности (например, заклепочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложен (рис. 3.8, б). Поэтому при расчетах на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия), тогда

, 3.12

где *d* – диаметр отверстия, δ – толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей в расчетную формулу подставляют наименьшую толщину.

**4. СДВИГ, СРЕЗ**

Известно, что при любом напряженном состоянии возникают как нормальные, так и касательные напряжения, причем обычно они сопутствуют друг другу. Практика показывает, что во многих случаях расчета на прочность достаточно определить и проверить наибольшие нормальные напряжения. Таковыми, например, являются простейшие расчеты на прочность при растяжении или сжатии.

Однако нередко существенными оказываются касательные напряжения, в результате чего разрушение элемента может произойти от взаимного сдвига его отдельных частей. В таких случаях прочность проверяют исходя из наибольших касательных напряжений.

Сюда относятся в основном расчеты различных соединений (сварных, болтовых, заклепочных, клеевых и др.), предназначенных для скрепления воедино элементов строительных конструкций и работающих преимущественно на срез.

***Срезом*** *называют такой вид деформации бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает единственный внутренний силовой фактор – поперечная сила Q.*

С достаточной степенью приближения можно считать, что деформация среза возникает при действии двух равных, близко расположенных друг к другу сил, которые направлены в противоположные стороны перпендикулярно продольной оси бруса.

Примером подобного приложения сил является резка ножницами прутьев, металлических полос и т.п.

Вообще на практике срез не проявляется самостоятельно, поскольку наряду с поперечной силой возникает изгибающий момент (вследствие образующейся пары сил).

**4.1. Напряжения при сдвиговых деформациях.**

Рассмотрим брус, перпендикулярно оси которого приложены две равные и противоположно направленные силы *F* (рис. 4.1, а). Линии действия их параллельны и находятся на относительно небольшом расстоянии друг от друга.

Для определения поперечной силы воспользуемся методом сечений. Проведем секущую 1–1. Во всех точках поперечного сечения действуют распределенные силы, равнодействующую которых определим из условия равновесия оставленной части бруса:

, , . 4.1



*F*

*F*

*F*

*F*

*F*

*Q*

*τ*

*x*

*x*

*x*

*y*

*а*

*б*

*в*

Рис. 4.1. Схема определения поперечных сил и касательных напряжений

Поперечная сила есть равнодействующая внутренних касательных сил на бесконечно малых площадках срезаемого сечения.

*При сдвиге в поперечных сечениях, от действия поперечной силы, возникают только* ***касательные напряжения****.*

Если в поперечных сечениях элемента, выделенного из деформированного тела, действуют только касательные напряжения, то тело испытывает *чистый сдвиг*.

Предполагаем, что касательные напряжения распределены по сечению равномерно (τ = const) и являются мерой интенсивности поперечных сил возникающих в сечении тела:

, 4.2

, 4.3

где *Q* – внутренняя поперечная сила; *A* – площадь, по которой происходит сдвиг (площадь сдвига).

При сдвиге форма сечения на значение напряжения не влияет.

Изложенный расчет касательных напряжений при сдвиге приближенный, так как линии действия сил *F* и *Q* не направлены по одной прямой и, строго говоря, эти силы не являются уравновешенной системой, а представляют собой пару сил. Однако, момент этой пары, ввиду малого плеча, невелик и соответствующими ей напряжениями можно пренебречь.

**4.2. Условие прочности при сдвиге.**

Условие прочности детали конструкции на сдвиг заключается в том, что наибольшее возникающее в ней напряжение не должно превышать допускаемое.

*Условие прочности* при сдвиге можно записать в виде:

, 4.4

где  – величина допускаемого напряжения (определяется по опасным напряжениям с учетом коэффициента запаса прочности).

По данной расчётной формуле проводят проектный и проверочный расчеты и определяют допускаемую нагрузку.

На практике допускаемые напряжения при сдвиге связаны определенным соотношением с допускаемыми напряжениями *при растяжении*, что можно использовать при выполнении расчетов:

. 4.5

Допускаемое напряжение на срез для пластичных материалов выбирают в зависимости от предела текучести

. 4.6

*Деформация сдвига, доведенная до разрушения материала, называется* ***срезом*** *(применительно к металлическим деталям) или* ***скалыванием*** *(применительно к неметаллическим конструкциям).*

При расчетах на срез, в случае если соединение осуществляется несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и т.д.), полагают, что все они *нагружены одинаково*.

Расчеты соединений на срез обычно сопровождают проверкой этих соединений на *смятие*. Под смятием понимают пластическую деформацию в местах соприкасания сжатых элементов (т.е. на поверхности контакта). Напряжения смятия (см. раздел растяжение-сжатие) проверяют аналогично напряжениям сжатия

, 4.7

где *Nmax* – расчетная наибольшая сила сжатия, *A*сж – площадь смятия, [σ]см – величина допускаемого напряжения смятия.

Смятие приводит к возникновению зазоров и соединение перестает быть неподвижным, что недопустимо. Смятие носит местный характер, так как возникающие напряжения быстро затухают по мере удаления от поверхности контакта. Поэтому нормы разрешают принимать допускаемое напряжение при смятии б*о*льшим, чем при осевом сжатии.

В химическом машиностроении допускаемые напряжения на смятие для болтовых, штифтовых и шпоночных соединений из низкоуглеродистой стали принимают 100–120 МПа, для заклепочных соединений – 240–320 МПа.

**4.3. Деформации при сдвиге.**

Для установления параметров, характеризующих деформацию при сдвиге рассмотрим элемент бруса в виде параллелепипеда *KBCD*, на грани *BC* которого действуют только касательные напряжения, а противоположная грань жестко закреплена. Деформация сдвига в указанном элементе заключается в перекашивании прямых углов параллелепипеда за счет поступательного перемещения грани *BC* по отношению к неподвижному сечению *KD*. Данное искажение называется *угловой деформацией***.**

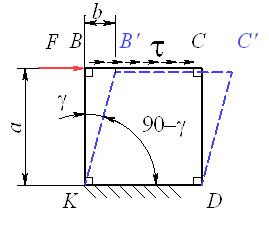


Рис. 4.2. Схема для определения угловой деформации

Деформация сдвига характеризуется углом γ и называется *углом сдвига* или относительным сдвигом т.к. этот параметр не зависит от расстояния *a*, на котором происходит сдвиг (измеряется в радианах)

. 4.8

Величина *BB*`, на которую смещается подвижная грань относительно неподвижной, называется *абсолютным сдвигом* **(**измеряется в метрах).

**4.4. Закон Гука при сдвиге**

Напряжения и деформации при сдвиге связаны между собой зависимостью, которая называется *законом Гука при сдвиге*, который справедлив лишь в определенных пределах нагружения.

***Закон Гука при сдвиге****: касательное напряжение прямо пропорционально относительному сдвигу.*

Закон Гука получен в результате анализа экспериментальных данных и математически может быть записан в виде равенства

. 4.9

Коэффициент пропорциональности *G* характеризует жесткость материала, т.е. способность сопротивляться упругим деформациям при сдвиге и называется модулем сдвига или модулем упругости второго рода.

Модуль сдвига это физическая константа, определяемая экспериментально и является одной из трех упругих постоянных изотропного материала (). Взаимосвязь трех упругих постоянных выражается формулой:

, 4.10

где µ – коэффициент Пуассона; *Е* – модуль продольной упругости.

По приведенной формуле можно определить значение модуля сдвига для сталей .

**4.5. Практические расчеты на сдвиг.**

**4.5.1. Заклепочные и болтовые соединения.**

В настоящее время клепаные соединения почти полностью вытеснены сварными, вследствие повышенного расхода материала и большой трудоемкости изготовления. Заклепочные соединения сохранили ограниченное применение в тяжелых большепролетных конструкциях или в конструкциях, где при сварке происходит разупрочнение материалов (низколегированные стали и алюминиевые сплавы).

Болтовые соединения широко используются на монтаже, особенно промышленных объектов.

В зависимости от ориентации соединения по отношению к направлению усилия заклепки и болты работают на срез или на растяжение (отрыв головки). Расчет на срез применяется наиболее часто.

На рис. 4.3, а показано соединение двух листов заклепками (соединение внахлест). Картина возможного разрушения показана на рис. 4.3, б.

*F*

*F*

*δ1*

*δ2*

*F*

*F*

*x*

*τ*

*τ*

*а*

*б*

*Линия среза*

*d*

Рис. 4.3. Схема заклепочного соединения (а) и возможного его разрушения (б)

Соединение разрушается в результате перерезывания заклепок по линии соприкосновения листов.

Если разрушение каждой заклепки происходит по одной плоскости среза, то заклепочное соединение называют *односрезным*, если по двум плоскостям – *двухсрезным*.

Учитывая большие трудности, связанные с определением действительного напряженного состояния материала заклепки в зоне разрушения, для упрощения задачи принимаем, что по плоскостям среза действуют только касательные напряжения.

Практика показывает, что при действии статической нагрузки заклепки разрушаются одновременно. При статической нагрузке принимаем, что поперечная сила в каждой заклепке равна

, 4.11

где *F* – сила, действующая на соединение, *n* – число заклепок.

Принимают, что касательные напряжения по плоскости среза распределяются равномерно, тогда условие прочности при срезе заклепок и болтов имеет вид:

, 4.12

где  – площадь поперечного сечения заклепки или болта диаметром *d* (для одного болта *n* = 1), [τ] – допускаемое касательное напряжение (на срез).

На практике обычно задаются диаметром заклепок или болтов и расчетным путем определяют их необходимое количество (для односрезного соединения)

. 4.13

При двух срезном или многосрезном соединении вместо *n* в формулу следует подставлять общее число срезов заклепок или болтов, расположенных по одну сторону стыка.

Расчет на срез обеспечивает прочность заклепок (болтов), но не гарантирует безопасность соединения в целом.

Если толщина соединяемых элементов недостаточна, то давление, возникающее между заклепками (болтами) и стенками отверстий, вызывает смятие последних. При большом давлении и малом расстоянии между отверстиями или отверстием и краем элемента части материала может выколоться.

Таким образом, кроме расчетов на срез выполняют расчеты на смятие. Проверяют напряжения смятия по площади контакта соединяемых листов и заклепок (болтов) (см. лекцию 3).

Проекция площадок смятия показана на рис. 3.8.

Напряжения смятия считают равномерно распределенными по площади контакта, тогда условие прочности на смятие выражают формулой

, 4.14

где *n`* – число заклепок (болтов),  – площадь смятия одной заклепки, [σсм] – допускаемое напряжение на смятие.

Из формулы можно определить необходимое число заклепок (болтов) по условию прочности на смятие

. 4.15

Расчет соединений на срез и смятие производят последовательно, окончательно принимая наибольшее требуемое количество заклепок (болтов), округленное до ближайшего целого числа в б*о*льшую сторону.

Кроме расчетов на срез и смятие необходимо проверить прочность соединяемых элементов на осевое усилие в ослабленных отверстиями сечениях (рис. 4.4).

*F*

*δ*

*δ*

*d*

*d*

*b*

*Aос*

Рис. 4.4. К расчету соединения па прочность при растяжении

Условие прочности имеет вид

, 4.16

где *A*ос – площадь ослабленного сечения.

Аналогично рассчитывают на срез и смятие штифтовое и шпоночное соединения.

**4.5.2. Сварные соединения.**

*Сварка* – наиболее распространенный способ соединения стальных конструкций. Основным ее видом является электродуговая сварка (ручная, автоматическая и полуавтоматическая) плавящимся электродом.

Существуют несколько видов сварных соединений, но чаще встречаются стыковые и нахлесточные.

*Стыковые* соединения применяются при необходимости неразъемного соединения двух деталей *1*, *2* встык (торец к торцу). Расплавленный металл заполняет пространство между соединяемыми элементами (рис. 4.5).



Рис. 4.5. Схема стыкового сварного соединения

Расчет на действие осевого (по отношению к элементам) усилия ведут в предположении, что напряжения распределяются по длине шва равномерно. В случае прямого шва прочность проверяют по формуле, как при растяжении, которая записывается в виде

, 4.17

где *b* – ширина детали, *t* – толщина,  – площадь разрушения шва (разрыв).

*Нахлесточные* соединения, т.е. соединения двух деталей (рис. 4.6, а), обычно листов, внахлест, осуществляются угловыми швами, заполняя расплавленным металлом угол, образованный поверхностями соединяемых элементов. Применяется при соединении деталей не тоньше 2 мм (t ≥ 2 мм).

Швы, расположенные параллельно линии действия усилия, называются *фланговыми*, перпендикулярно линии действия – *лобовыми*.

Нахлесточные швы разрушаются от действия касательных напряжений, при этом разрушение происходит по сечению шва, имеющему минимальную площадь (рис. 4.6, б).

При расчете как лобовых, так и фланговых швов принимают, что опасное сечение имеет высоту , k – катет шва, в большинстве случаев принимается равным толщине свариваемых деталей. При разной толщине берут меньшее значение.

Условие прочности на срез можно записать следующим образом

, 4.18



*a*

*б*

Рис. 4.6. Схема нахлесточного соединения (а) и сечение разрушения сварного шва

где  – площадь разрушения шва (сдвиг), [τср] допускаемое напряжение среза.

Пользуясь этим уравнением, можно, задавшись размером катета сварного шва, определить необходимую общую длину швов или допускаемое усилие.

**5. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ**

**СЕЧЕНИЙ**

При некоторых деформациях прочность деталей зависит не только от площади поперечного сечения, но и от его формы. При растяжении и сжатии значения напряжений и перемещений, возникающих в сечениях, зависят не только от действующих нагрузок, но и от площади сечения.

При изучении кручения и изгиба нам предстоит встретиться с новыми геометрическими характеристиками – осевыми и полярными моментами инерции сечения.

**5.1. Статический момент сечения**

***Статическим моментом сечения*** *плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на расстояния их до этой оси.*

Рассмотрим произвольное сечение в системе координат *zy* (рис. 5.1).

*dA*

*y*

*y2*

*z*

*z2*

*C*

*y*

*yc*

*z*

*zc*

*O*

Рис. 5.1. К определению статического момента сечения

Статические моменты относительно произвольных осей *z* и *y* определяют интегралами вида:

; . 5.1

В теоретической механике выведены формулы для определения координат центра тяжести площади фигуры (теорема о моменте равнодействующей):

 и . 5.2

В формулах под *Ai* можно понимать площадь элементарной площадки *dA*, тогда в пределе при *dA* стремящемся к нулю, выражения в числителях представляют собой статические моменты площади фигуры относительно осей *y* и *z*, а  – есть площадь всей фигуры. Тогда

 и . 5.3

Если площадь всего сечения *А* и положение центра тяжести сечения относительно осей *z* и *y* известны (*zc*, *yc*), то:

 и . 5.4

***Статический момент площади*** *фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние ее центра тяжести до этой оси.*

***Центр тяжести*** *обладает тем свойством, что если тело опереть в этой точке, то оно будет находиться в равновесии.*

Статический момент площади имеет размерность .

В зависимости от знака координат (положения осей) статический момент площади фигуры может быть величиной положительной или отрицательной. В частном случае, если ось проходит через центр тяжести сечения (, ), статический момент равен нулю.

*Оси, относительно которых статические моменты равны нулю, называются* ***центральными осями (проходят через центр тяжести сечения)****.*

Если фигуру можно представить в виде отдельных простых фигур (прямоугольников, треугольников и т.п.), для которых известны положения центров тяжести и площади, *статический момент площади всей фигуры относительно любой оси равен алгебраической сумме статических моментов составляющих фигур относительно той же оси* (это следует из свойств определенного интеграла)

, 5.5

где *Si* – статический момент площади каждой части фигуры.

Для стандартных профилей (двутавр, швеллер и др.) значения статических моментов приведены в справочниках.

Если фигура имеет ось симметрии, то она обязательно проходит через центр тяжести фигуры, поэтому *статический момент фигуры относительно оси симметрии всегда равен нулю*.

Понятие о статическом моменте площади понадобится в дальнейшем для определения положения центров тяжести сечений и при определении касательных напряжений при изгибе.

**5.2. Моменты инерции сечения**

***Осевым моментом инерции*** *плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат их расстояний до этой оси (рис. 5.2).*

*dA*

*y*

*z*

*y*

*z*

*O*

*ρ*

Рис. 5.2. К определению моментов инерции сечения

Осевой момент инерции обозначается с индексом соответствующей оси:

, . 5.6

***Полярным моментом инерции*** *плоской фигуры относительно точки пересечения двух взаимно перпендикулярных осей (полюса), лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадраты их расстояний до полюса (рис. 5.2).*

Полярный момент инерции обозначим:

. 5.7

Полярный и осевые моменты инерции площади имеют размерность:

,

,

.

Полярный и осевые моменты инерции могут принимать только *положительные значения*, т.к. их подинтегральные выражения содержат квадраты координат.

Для упрощения некоторых видов расчетов для *простых* *симметричных фигур* вводят понятие осевых и полярных моментов сопротивления:

, , . 5.8

Для стандартных профилей (двутавр, швеллер и др.) значения осевых моментов инерции и осевых моментов сопротивления приведены в справочниках.

*Полярный и осевые моменты* *инерции* фигуры *связаны* между собой. Зная, что , сложим моменты инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей *z* и *y* и получим

, 5.9

. 5.9`

*Сумма осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей равна полярному моменту инерции относительно начала координат.*

**5.3. Момент инерции при параллельном переносе осей.**

Выведем формулы преобразования моментов инерции при параллельном переносе осей. Пусть дана произвольная плоская фигура площадью *A* с центром тяжести в т. *C* (рис. 5.3). Оси *y* и *z* являются центральными (проходят через центр тяжести сечения). Центральные моменты инерции *Iz* и *Iy* известны. Определим моменты инерции относительно новых осей *z*1 и *y*1, параллельных центральным и отстоящих от них на расстояния *a* и *b* соответственно.

Из рис. 5.3 легко установить зависимость между новыми и старыми координатами элементарной площадки *dA*:

, . 5.10

Пользуясь общим выражением для записи осевых моментов инерции, находим

*dA*

*y1*

*y*

*z1*

*z*

*C*

*y1*

*yc*

*z1*

*z*

*O1*

*b*

*a*

*A*

Рис. 5.3. Переход к параллельным осям координат

, 5.11

. 5.11`

Для  преобразования выполняются аналогично и в результате получаем

. 5.12

*Таким образом, момент инерции плоского сечения относительно произвольной оси, параллельной центральной, равен моменту инерции относительно этой центральной оси плюс произведение площади сечения на квадрат расстояния между указанными осями.*

Анализируя формулы, можно прийти к выводу, что наименьшее значение осевые моменты инерции сечения принимают относительно центральных осей.

**5.4. Моменты инерции сложных фигур.**

Для сложных фигур моменты инерции относительно центральных осей всего сечения рассчитывают как сумму осевых моментов каждой из простейших фигур с учетом их смещения относительно центра тяжести всего сечения:

, . 5.13

Выражение упрощается, если центр***а*** тяжести простых фигур и всего сечения совпадают, тогда момент инерции такой фигуры равен алгебраической сумме моментов инерции простых фигур.

***К геометрическим характеристикам плоских сечений относят:***

*1. Площадь A, м2;*

*2. Статический момент сечений Sz, м3 – необходим для определения центра тяжести сечения;*

*3. Осевой момент инерции сечения Iz, м4 (осевой момент сопротивления Wz, м3 – используют при расчете балок на изгиб;*

*4. Полярный момент инерции Ip, м4 (полярный момент сопротивления Wp, м3) – используют при расчетах стержней на кручение;*

**5.5. Моменты инерции и моменты сопротивления простых фигур.**

Все геометрические характеристики сечений (площадь, моменты инерции и др.) простых фигур (прямоугольник, треугольник, круг и др.) приведены в справочной литературе. Выводы расчетных формул в программу курса не входят, но они достаточно просты и могут быть рассмотрены самостоятельно, на основе приведенных выше понятий.

Помимо выше перечисленных простых форм поперечного сечения (круг, прямоугольник и др.) в строительстве и машиностроении широко используют при конструировании балок стандартные ГОСТированные профили. Значения основных геометрических характеристик таких сечений представлены в соответствующих таблицах. Если сечение повернуто на угол 90°, то индекс оси в данных из справочной литературы нужно изменить с учетом обозначения осей на расчетной схеме.

**5.6. Алгоритм определения центральных осей (центра тяжести сечения) и вычисления моментов инерции сложных сечений.**

1. Разбиваем сложное сечение на ряд простых фигур (чем меньше фигур, тем лучше);

2. Определяем геометрические характеристики простых фигур (положение центров тяжести, площади поперечных сечений и моменты инерции), указываем центральные оси для каждой из фигур;

3. Обозначаем (или выбираем из ранее обозначенных) начальную координатную систему;

4.Определяем положение центров тяжести каждой из простейших фигур относительно начальных осей: ;

5. Рассчитываем координаты центра тяжести относительно начальных осей.

6. Если простейшая фигура не содержит материала (является пустотой) то в формулах значение площади этой фигуры подставляют со знаком «–».

7. Определяем моменты инерции составного сечения относительно его центральных осей с учетом параллельного переноса осей.

**6. КРУЧЕНИЕ**

*Кручением* называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – *крутящий момент* (*M*).

Кручению подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей, станков и машин, оси локомотивов и моторных вагонов, элементы пространственных конструкций.

Внешние крутящие моменты (*T*) передаются на вал химического аппарата (вращающийся вал) в местах посадки на него шкивов, зубчатых и червячных колес, мешалок (рис. 6.1) и т.п. Однако часто крутящие моменты возникают от действия силы, смещенной относительно оси (те же шкивы, зубчатые и червячные колеса, мешалки и т.п.), что дополнительно вызывает изгиб вала.

*T*

*T*

*T/2*

*T/2*

*а*

*б*

Рис. 6.1. Вал многоярусной лопастной мешалки (а) и расчетная схема (б)

*Вращающиеся и работающие на кручение стержни называют* ***валами****.*

Момент от внешней пары сил называется *скручивающим моментом* (*T*).

При решении задач внешние крутящие моменты, передаваемые валом, часто бывают неизвестными, а задана передаваемая мощность. В этом случае крутящий момент *T* можно найти по формуле

, 6.1

где *N* – мощность, ω – угловая скорость. Если задана частота вращения вала n, то угловая скорость рассчитывается как .

**6.1. Определение внутренних моментов**

Для определения крутящих моментов в сечении вала применим метод сечений. Брус (рис. 6.2, а) рассекают воображаемой плоскостью, перпендикулярной его продольной оси, мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестным моментом *M* (рис. 6.2, б).

*T2*

*T1*

*T3*

*T4*

*T3*

*T4*

*M*

*x*

*x*

*а*

*б*

Рис. 6.2. К определению внутреннего крутящего момента

После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части

, 6.1

из которого и определяют значение *M*.

Таким образом, крутящий момент в поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

***Правило знаков****. Крутящий момент в сечении считается положительным, если внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения. Если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении считаем отрицательным.*

Для наглядного представления о характере распределения и значении крутящих моментов по длине стержня строят эпюры этих моментов. Построение эпюр аналогично построению эпюр продольных сил при растяжении.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой вал, на который действуют активные моменты *T* и 3*T* (рис 6.3, а).

*T*

*T*

*3T*

*A*

*B*

*C*

*x1*

*T*

*A*

*x*

*M1*

*x*

*x2*

*T*

*A*

*M2*

*x*

*3T*

*B*

*Эпюра M*

*l*

*l*

*2T*

*−*

*+*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 6.3. Пример построения эпюры *M* при кручении

Изображенный на рисунке вал имеет два участка, их границами являются сечения, где приложены внешние моменты. Расчет начинаем от свободного края.

Применяем метод сечений, мысленно рассекаем вал на расстоянии *x*1 от свободного конца (0 ≤ *x*1 < *l*), отбросим левую часть и рассмотрим условие равновесия правой части (рис. 6.3, б). Применяя правило знаков получим

. 6.2

Путем аналогичных рассуждений в сечении на расстоянии *x*2 от правого края (*l* ≤ *x*2 < 2*l*) получим (рис. 6.3, в)

. 6.3

Для построения эпюры *M* проводят ось абсцисс параллельно оси бруса. Значения внутренних моментов откладывают в выбранном масштабе с учетом знаков. Построенная таким образом эпюра *M* показана на рис. 6.3, г.

*В сечениях, где приложены внешние моменты, внутренние моменты меняются скачкообразно и размер скачка равен соответствующему внешнему моменту.*

*Полученное значение внутреннего крутящего момента справедливо на всем протяжении участка, следовательно, на участке внутренний крутящий момент имеет постоянное значение.*

Метод сечений позволяет найти величину и направление крутящего момента в произвольном сечении, но не может дать ответ на вопрос, как внутренние усилия распределены по площади сечения.

**6.2. Деформации при кручении**

*Деформацию кручения вызывает пара сил*, лежащих в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня или бруса. Рассмотрим процесс деформации вала при кручении на модели (рис. 6.4).

*T*

*T*

*γ*

*а*

*б*

Рис. 6.4. Схема деформации при кручении

Если на поверхность вала круглого сечения нанести прямоугольную сетку (рис. 6.3, а), то после деформации все образующие на поверхности цилиндра повернутся на один угол γ (рис. 6.4, б) и превратятся в винтовые линии.

Расстояние между поперечными линиями не изменится, сами эти линии не искривятся. Это наблюдение позволяет сделать вывод, что все поперечные сечения, не изменяя своей формы, размеров и взаимного положения, поворачиваются относительно друг друга. Заштрихованный элемент, заключенный между нанесенными линиями, перекашивается – подвергается сдвигу.

*При кручении возникают деформации сдвига, но не за счет поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого.*

Указанное поведение модели позволяет принять следующие допущения:

– справедлива гипотеза плоских сечений;

– расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными;

– каждое сечение поворачивается на некоторый угол как жесткое целое.

*На основании этого можно утверждать, что* ***при кручении*** *в поперечных сечениях вала* ***возникают******только касательные напряжения****, т.е. имеет место чистый сдвиг.*

Рассмотрим более детально деформации стержня. Двумя поперечными сечениями выделим из вала элемент длиной *dx* и радиусом *r* (рис. 6.5). Правое торцевое сечение поворачивается при кручении относительно левого на угол *d*ϕ (*угол поворота сечения*).

***Угол поворота сечения*** *ϕ равен углу закручивания части цилиндра, заключенной между данным сечением и заделкой. Угол поворота концевого сечения называется* ***полным углом закручивания*** *цилиндра.*

*r*

*ρ*

*δϕ*

*γ*

*dx*

*c*

*b*

*b′*

*T*

Рис. 6.5. Связь γ и dϕ при кручении

Образующая цилиндра *cb* поворачивается при этом на угол γ и переходит в положение *cb`*. В виду малых значение угла  справедливо равенство: .

*Угол γ представляет собой* ***угол сдвига*** *цилиндрической поверхности.*

Дугу окружности  можно выразить через угол сдвига продольных линий γ и приращение угла поворота сечения (рис. 6.5):

 или . 6.4

Отсюда следует, что:

 или . 6.5

Для произвольного положения точки вдоль радиуса, угол сдвига можно определить как

. 6.6

Величину  называют *относительным углом закручивания* (θ).

***Относительный угол закручивания*** *– это угол взаимного поворота сечений, отнесенный к расстоянию между ними.*

Тогда с учетом выражения для угла сдвига имеем

. 6.7

Если брус длиной *l* имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце, то

. 6.8

**6.3. Напряжения при кручении стержней круглого поперечного сечения**

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении. Воспользуемся законом Гука при сдвиге (4.9):

.

С учетом того, что угол сдвига для произвольной точки по радиусу зависит от угла поворота сечений (6.6), получим:

. 6.9

*Из выражения видно, что деформация сдвига и касательные напряжения при кручении по сечению изменяются по линейному закону.* В центре тяжести круглого сечения (при ρ = 0) касательные напряжения равны нулю, а наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности бруса (при ρ = r)

. 6.10

Если брус состоит из одного участка, т.е. имеет постоянное сечение и постоянный по длине крутящий момент, то касательные напряжения на данном участке будут по всей длине цилиндра одинаковые.

Определим *расчетные формулы* для определения угла закручивания и напряжений в поперечных сечениях в зависимости от крутящего момента.

Рассмотрим равновесие отсеченной части бруса (рис. 6.6).



Рис. 6.6. К определению напряжений и деформаций

 – внутренний силовой фактор (крутящий момент), определенный по методу сечений.

Сила, действующая на площадке *dA* от касательных напряжений  определяется по формуле:

, 6.11

тогда момент от силы *dF* на площадке *dA*

. 6.12

Полный крутящий момент в поперечном сечении от силы  относительно оси стержня определяется интегралом:

. 6.13

С учетом закона Гука при сдвиге в виде (6.9) получим:

. 6.14

Тогда относительный угол сдвига (θ) будет равен

. 6.15

Преобразуем уравнение Гука при сдвиге (6.9), используя полученное выражение (6.15)

, 6.16

где *M*к – внутренний крутящий момент (берется из эпюр), *Ip* – полярный момент инерции сечения.

Формула позволяет рассчитать значение напряжений *в любой точке* при кручении круглого вала.

Наибольшее напряжение в точках у контура сечения

, 6.17

где  – полярный момент сопротивления или момент сопротивления при кручении. Для круглого сечения .

**6.4. Деформации при кручении валов**

Деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения.

При этом подразумевается, что все деформации упруги, т.е. выполняется закон Гука при кручении.

Для вычислений деформации вала при кручении воспользуемся формулой для определения крутящего момента (см. формулу 6.14)

 6.18

и выразим из нее *d*ϕ

. 6.19

Интегрируя по длине вала получим

, 6.20

где *l* – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота,  – жесткость вала при кручении.

При постоянном крутящем моменте и жесткости имеем полный угол закручивания на длине *l*

. 6.21

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения или значением крутящего момента, полный угол закручивания на длине вала равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков

. 6.22

Относительный угол закручивания (на единицу длины):

. 6.23

**6.5. Рациональная форма сечения при кручении**

Т.к. материал при кручении в центральной зоне практически не нагружен, то «оставлять» его там не имеет смысла. Значит, рациональными будут пустотелые сечения – трубчатое или коробчатое (рис. 6.7).



Рис. 6.7. Распределение напряжений в поперечном сечении вала и рациональное сечение

Наименее выгодными при кручении являются швеллеры, двутавры, узкие прямоугольные сечения. Наиболее выгодными – круглые кольцевые, особенно при малой толщине стенок.

Во избежание потери устойчивости оболочки стержня, центральную полость заполняют веществом малой плотности (цветной металл или сплав на его основе, полимер и пр.).

**6.6. Расчет на прочность при кручении**

Теория кручения круглого бруса используется главным образом при расчете валов различных машин и механизмов.

В общем случае условие прочности вала по касательным напряжениям имеет вид:

, 6.24

Используя формулу (6.17), получим *условие прочности* при кручении стержня круглого сечения:

, 6.25

где *r* – наружный радиус стержня;  – максимальный крутящий момент, принимают из эпюры моментов, [τ] – допускаемое касательное напряжение.

***Условие прочности при кручении*** *– наибольшее возникающее касательное напряжение не должно превышать допускаемое.*

При действии статической нагрузки допускаемые напряжения выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

– для сталей (пластичный материал) – ,

– для чугунов (хрупкий материал) – .

Однако валы кроме кручения испытывают изгиб, который в ориентировочных расчетах учитывают введением пониженного допускаемого касательного напряжения [τ] = 25–40 МПа.

Непосредственно по формуле (6.25) *проверяют прочность* вала на кручение.

Кроме проверки прочности по данной формуле можно подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

При подборе сечения неравенство выражают относительно требуемого момента сопротивления сечения

. 6.26

Зная, что для круглого сплошного сечения , получим

, 6.27

откуда требуемый диаметр сплошного сечения

. 6.28

Для определения *допускаемого крутящего момента* условие прочности (6.25) преобразуется к виду

. 6.29

Приведенные расчетные формулы по структуре аналогичны формулам для вычисления напряжений при растяжении (сжатии) и применимы только для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянные поперечное сечение и крутящий момент.

**6.7. Расчеты на жесткость при кручении.**

В ряде случаев вал должен удовлетворять не только условию прочности, но и жесткости.

Для обеспечения требуемой жесткости вала при кручении необходимо, чтобы относительный угол закручивания не превосходил допускаемого

, 6.30

где [θ] – допускаемый угол закручивания.

Относительный угол закручивания выражают в радианах на единицу длины вала или в градусах на единицу длины вала, тогда расчетная формула примет вид

. 6.30`

Допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала и обычно лежит в пределах , что соответствует .

Неравенства (6.30 и 6.30`) служат для непосредственной *проверки жесткости* вала.

При подборе сечения неравенства выражают относительно требуемого полярного момента инерции. В этом случае расчетная формула имеет вид

. 6.31

Принимая, что  получаем

, 6.32

отсюда требуемый диаметр сплошного сечения

 6.33

или при переходе к градусной мере

. 6.33`

При определении допускаемого крутящего момента условие жесткости преобразуется подобно условию прочности

. 6.34

**7. ИЗГИБ**

**7.1. Общие положения**

Изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации элементов конструкции. На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций.

*Прямой брус, работающий на изгиб, называется* ***балкой****.*

Изгиб вызывают силы, перпендикулярные продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящие через эту ось (рис 7.1, а и б). Сама ось из прямолинейной превращается в криволинейную.

*M*

*F*

*a*

*a*

*б*

*a*

Рис. 7.1. Балки под воздействием силы (а) и момента (б), криволинейная ось бруса (штриховая линия)

Для того чтобы воспринять нагрузку и передать ее на нижележащие конструкции, балка должна иметь опорные закрепления. Как известно из статики (см. теоретическую механику или лекцию 1), различают три вида опор плоских систем: неподвижная шарнирная опора, подвижная шарнирная опора и жесткая заделка.

*Простая* балка, свободно лежащая на двух опорах, имеет одну неподвижную и одну подвижную шарнирные опоры. Расстояние между опорами называется *пролетом*. При изгибе горизонтальная составляющая реакции неподвижной опоры равна нулю, поскольку балка несет только вертикальную или моментную нагрузки. Если нагрузка имеет горизонтальную составляющую, то балка работает на изгиб с растяжением (сжатием). Такие балки имеют сложное напряженное состояние и в данном курсе не рассматриваются.

***Изгиб*** *– это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки возникает внутренний поперечный силовой фактор и изгибающий момент.*

*Чистым изгибом* называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент. Деформации чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

Однако чаще в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Такой изгиб называют *поперечным*.

В дальнейшем почти всегда будем рассматривать такие брусья, у которых имеется, по крайней мере, одна плоскость симметрии и плоскость действия нагрузок совпадает с ней. В этом случае деформация изгиба проходит в плоскости действия внешних сил, и изгиб называется *прямым*, в ином случае изгиб называется *косым* (в данном курсе не рассматривается).

**7.2. Определение внутренних усилий при изгибе**

Расчет двухопорных балок начинают *с определения опорных реакций* (известно из статики). Чтобы избежать вычислительных ошибок, найденные значения реакций обязательно проверяют, составляя уравнение равновесия, не использованное при их определении. Обычно для контроля служит равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил на вертикальную ось.

*Для определения опорных реакций пользуются правилами знаков статики.*

После того, как найдены и проверены опорные реакции, приступают к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балки.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают *два внутренних силовых фактора* – изгибающий момент *M*изг и поперечная сила *Q*. Для их определения применяем метод сечений. Мысленно рассекаем балку (рис. 7.2, а) на произвольном расстоянии *x* от левой опоры. Отбрасываем одну из образовавшихся частей (например, правую) и заменяем ее действие на оставшуюся часть неизвестными усилиями. Рассмотрим равновесие левой части.

Для определения *M*изг и *Q* используем два уравнения равновесия

– для сил:

, , 7.1

 или в общем виде ; 7.2

– для моментов относительно точки *C*

, , 7.3

 или в общем виде . 7.4

*F1*

*a*

*a*

*F2*

*C*

*A*

*B*

*a*

*b*

*x*

*l−x*

*l*

*RA*

*RB*

*F1*

*C*

*A*

*RA*

*Qy*

*Mизг*

*x*

*a*

*y*

*a*

*F2*

*C*

*B*

*RB*

*Mизг*

*Qy*

*б*

*a*

Рис. 7.2. К определению внутренних силовых факторов при изгибе

*Таким образом:*

*– поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения;*

*– изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.*

**7.2.1. Правила знаков**

Правило знаков обоих силовых факторов удобно устанавливать исходя из направления внешних сил.

*Поперечная сила* в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз (рис. 7.3, а), и отрицательной – в противоположном случае (рис. 7.3, б).

*F*

*F*

***Qy>0***

*F*

*F*

***Qy<0***

*а*

*б*

Рис. 7.3. Правило знаков для поперечных сил

*Изгибающий момент* в сечении балки считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки (рис. 7.4, а), и отрицательным – в противоположном случае (рис. 7.4, б).

Иногда используют более удобное правило для определения знака изгибающего момента: если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз (рис. 7.4, а), то изгибающий момент в сечении считается положительным и наоборот (рис. 7.4, б).

*Me*

***Mизг>0***

*Me*

*Me*

***Mизг<0***

*Me*

*а*

*б*

Рис. 7.4. Правило знаков для изгибающих моментов

Пользуясь этими правилами, следует мысленно представлять *сечение балки жестко защемленным*, а связи отброшенными и замененными реакциями.

*Необходимо помнить, что при определении реакций опор пользуются правилами знаков статики; для определения знаков изгибающего момента и поперечной силы – правилами сопротивления материалов.*

**7.3. Дифференциальные зависимости при изгибе**

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на теореме Журавского.

*Теорема Журавского: поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки.*

Рассмотрим балку (рис. 7.5). Начало координат возьмем на левом конце балки, а ось *x* направим вправо (это существенно).

*F1*

*A*

*B*

*a*

*RA*

*RB*

*x*

*a*

*y*

*a*

*M*

*q*

*F2*

*b*

*x*

Рис. 7.6. К определению дифференциальных зависимостей при изгибе

На одном из участков балки, на расстоянии *x* от левого конца проведем сечение и запишем уравнение изгибающего момента:

. 7.5

Продифференцировав это выражение по координате *x*, получим

. 7.6

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть поперечная сила *Q* в сечении *x*. Таким образом

. 7.7

Если уравнение изгибающих моментов (для участка с равномерно распределенной нагрузкой) продифференцировать вторично, то получим

. 7.8

*Вторая производная от изгибающего момента или первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.*

Как известно из курса высшей математики, по знаку второй производной функции можно судить о выпуклости или вогнутости кривой – данное утверждение необходимо использовать при построении эпюр.

**7.4. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов**

Вопрос о нахождении опасных сечений произвольно нагруженной балки решается так же, как при растяжении (сжатии) и кручении, т.е. в результате построения и анализа эпюр внутренних силовых факторов.

Для того чтобы установить закон изменения поперечной силы и изгибающего момента по длине балки, составляют их аналитические выражения в виде функций от положения сечения (абсциссы *x*).

После того как составлены уравнения *Q(x)* и *M*изг*(x)*, абсциссам дают последовательно конкретные значения, мысленно перемещая сечение балки по длине рассматриваемого участка. Вычисляя соответствующие значения (ординаты) *Q* и *M*изг, откладывают их в принятом масштабе от базисной линии, которая параллельна оси продольной балки. Положительные ординаты откладывают вверх от оси, а отрицательные – вниз.

Все изложенное справедливо не только для двухопорных балок, но и для консолей. Однако расчет консолей следует начинать сразу с построения эпюр, перемещаясь от свободного края к заделке. Опорные реакции определяются автоматически в процессе построения.

Пример построения эпюр *Q* и *M*изг рассмотрим для двухопорной балки (рис. 7.6, а).

Определим опорные реакции из уравнений равновесия балки:

, , 7.9

; 7.10

, , 7.11

*a*

*a*

*F=0,1 кН*

*C*

*A*

*B*

*4 м*

*2 м*

*RA=0,5 кН*

*RB=0,8 кН*

*x*

*a*

*y*

*a*

*M=0,2 кН⋅м*

*q=0,3 кН/м*

*Эпюра Q, кН*

*x1*

*x2*

*x\*=1,7 м*

*0,1*

*0,5*

*0,7*

*+*

*−*

*Эпюра Mизг, кН⋅м*

*0,2*

*0,4*

*0,42*

*+*

*−*

*б*

*a*

*в*

*a*

Рис. 7.6. Пример расчета двухопорной балки (а), построенные эпюры поперечных сил (б) и изгибающих моментов (в)

; 7.12

Проверяем правильность нахождения реакций, записывая третье, не использованное, уравнение равновесия:

, , 7.13

. 7.14

Балка имеет два участка *AB* и *BC* (правила определения границ участков см. лекцию 2).

*Построение эпюры Q.*

Рассмотрим первый участок *AB* длиной *x*1 (), поперечная сила на этом участке записывается в виде

 7.15

И представляет собой уравнение наклонной прямой.

При *x*1=0 ;

при *x*1=4 .

Для упрощения расчетов и построения эпюры *Q* на втором участке *BC* возьмем начало координат в точке *C* и направим ось *x* влево. Поперечная сила на участке *x*2 () записываем в виде

, 7.16

при *x*2=0 и при *x*2=2 .

По полученным значениям поперечной силы в граничных точках строи эпюру (рис. 7.6, б).

На первом участке эпюра *Q* изменяется по линейному закону. На втором участке эпюра *Q* представляет собой линию, параллельную базовой оси. На границе участков в точке *B* эпюра *Q* имеет скачок, равный по величине опорной реакции *RB*=0,8 кН.

На первом участке эпюра *Q* пересекает ось. Определим координату *x*\*, где поперечная сила переходит через нуль. Для этого приравняем *Q*1 к нулю

, . 7.17

*Построение эпюры M*изг*.*

На первом участке () выражение для изгибающего момента имеет вид

. 7.18

Полученное выражение представляет собой уравнение квадратичной параболы (переменная *x* входит во второй степени).

Определим значения *M*изг в трех ключевых точках – на границах и в точке, где *Q* равняется нулю.

При *x*1=0 ;

при *x*1=4 ,

при *x*\*=1,7



Для второго участка, взяв за начало координат точку *C*, получим

. 7.19

Вычислим значения изгибающего момента на границах участка:

при *x*2=0 ;

при *x*2=2 .

По найденным значениям строим эпюру *M*изг (рис. 7.6, в).

**7.4.1. Правила построения и проверки эпюр.**

При построении эпюр следует руководствоваться следующими правилами:

– положительные значения изгибающих моментов и поперечных сил откладывают вверх от оси, а отрицательные – вниз;

– в сечении, где приложена сосредоточенная сила, значение поперечной силы изменяется скачкообразно, скачок равен модулю этой силы;

– в сечении, где приложена пара сил (момент), значение изгибающего момента изменяется скачкообразно, скачок равен моменту пары;

– на участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую, а эпюра поперечных сил – прямую, параллельную оси;

– на участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра моментов представляет собой параболу, а эпюра поперечных сил – наклонную прямую;

– на конце балки изгибающий момент равен нулю, если там не приложена пара сил (момент);

– в сечении, соответствующем заделке, поперечная сила равна реактивной силе, а изгибающий момент – реактивному моменту.

**7.5. Деформации при чистом изгибе**

Изучение деформаций изгиба начнем со случая чистого простого изгиба, в дальнейшем рассмотрим более общий случай изгиба – поперечный.

При изучении деформации изгиба мысленно представим, что балка состоит из бесчисленного количества волокон, параллельных оси.

На боковую поверхность бруса нанесем сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем брус деформации чистого изгиба (рис. 7.7).

В результате можно видеть следующее:

– поперечные прямые линии останутся при деформации прямыми, но повернутся навстречу друг другу;

– продольные прямые линии, а также ось бруса искривятся.

*y*

*x*

*Mизг*

*Mизг*

*Mизг*

*Mизг*

*y*

*x*

*сжатие*

*растяжение*

*нейтральный слой*

*(нейтральная линия)*

Рис. 7.7. К определению деформаций изгиба

*При чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений; волокна, лежащие на выпуклой стороне, растягиваются, лежащие на вогнутой стороне – сжимаются, а на границе между ними лежит нейтральный слой волокон, которые только искривляются, не изменяя своей длины.*

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью*.

Из рассмотренного опыта следует, что волокна балки деформируются различно: б***о***льшие деформации испытывают волокна, более удаленные от нейтрального слоя.

Предположим, что волокна балки не оказывают давления друг на друга, т.е. напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки равны нулю (гипотеза о ненадавливании волокон). Тогда можно утверждать, что *каждое волокно испытывает одноосное растяжение или сжатие*.

**7.6. Нормальные напряжения при чистом изгибе**

Как было показано выше, в поперечных сечениях балки *при чистом изгибе* возникают *только нормальные напряжения растяжения и сжатия*, неравномерно распределённые по сечению.

Для выяснения характера распределения и значения напряжений, вызываемых изгибающим моментом, рассмотрим случай чистого изгиба. На среднем участке балки, нагруженной двумя одинаковыми, равноотстоящими от опор сосредоточенными силами, поперечная сила равна нулю и возникает только изгибающий момент *M*изг (рис. 7.8, а).

*F*

*F*

*dx*

*ρ*

*y*

*dθ*

*dx*

*Mизг*

*Mизг*

*б*

*а*

*dx*

*y*

*A*

*B*

*A′*

*B′*

*в*

*нейтральная*

*линия*

*Mизг*

*Mизг*

Рис. 7.8. К определению напряжений при чистом изгибе

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим на указанном участке балки элемент длиной *dx* (рис. 7.8, а) и изобразим его в укрупненном масштабе (рис. 7.8, б).

Оба сечения до деформации параллельны друг другу и после приложения нагрузки взаимно повернутся вокруг своих нейтральных линий на угол *d*θ (рис. 7.8, в). Длина отрезка нейтрального слоя *dx* при этом не изменится и его можно определить через радиус кривизны нейтрального слоя ρ и угол поворота поперечных сечений *d*θ:

. 7.20

Любое волокно, лежащее выше или ниже нейтрального слоя, изменит свою длину. Рассмотрим волокно *AB*, отстоящее от нейтрального слоя на расстояние *y* (рис. 7.8, б). В недеформированном состоянии длина этого слоя равна *dx*, после приложения нагрузки, его длина увеличилась и стала равной *A*′*B*′. Длину участка *A′B′* так же выразим через угол поворота

. 7.21

Используя понятие относительного удлинения при растяжении и формулы (7.20, 7.21) запишем выражение для определения относительного удлинения слоя *AB*

, 7.22

после преобразований и необходимых сокращений получим

. 7.23

*Данная зависимость показывает, что деформации волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.*

В соответствии с допущением о ненадавливании волокон (напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки равны нулю) используем выражение закона Гука при осевом растяжении (сжатии) . После подстановки в него зависимости (7.23) получим

. 7.24

Таким образом, при чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону, максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

;

.

Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении приведена на рис. 7.9, растягивающее напряжение считаем положительным, а сжимающие – отрицательным.

*M*

*нейтральная*

*линия*

*Эпюра σ*

**



*+*

*−*

Рис. 7.9. Распределение нормальных напряжений по сечению при изгибе

Полученная формула (7.24) для вычисления нормальных напряжений неудобна, так как в нее входит радиус кривизны нейтрального слоя. Для вывода формулы, связывающей нормальные напряжения с изгибающим моментом, применим метод сечений и рассмотрим равновесие отсеченной части балки, изображенной на рис. 7.10.

*M*

*y*

*z*

*Нейтральная*

*ось*

*x*

*dA*

*dN*

*y*

Рис. 7.10. К расчету нормальных напряжений при изгибе

Выделим в поперечном сечении элементарную площадку *dA*, в пределах которой нормальные напряжения остаются постоянными.

Нормальная сила *dN*, действующая на площадку *dA* равна

. 7.25

Составим уравнения равновесия для данной системы.

Сумма проекций сил на оси *x* и *y* равны нулю, т.к. внутренние силы *dN* перпендикулярны этим осям. Уравнение равновесия проекций сил на ось *z* запишется следующим образом

, . 7.26

Используя выражение (7.24) получим

. 7.27

Так как *E* и ρ не равны нулю, то .

Этот интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно оси *z*, т.е. нейтральной оси. Так как статический момент равен нулю (*Sz* = 0), то ось *z* является центральной.

*При изгибе нейтральная ось всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения.*

Составим уравнение моментов сил относительно оси *z*.

, . 7.28

При чистом изгибе внешний момент равен внутреннему, т.е. *Me* = *M*изг*.* Элементарный момент *dM* от элементарной силы *dN* на расстоянии *y* от нейтральной оси равен

, 7.29

тогда

. 7.30

Используя выражение (7.24) , и вынося за знак интеграла дробь E/ρ как постоянную величину, получим

. 7.31

Интеграл  представляет собой момент инерции сечения относительно нейтральной оси *z*, тогда

. 7.32

Произведение  называют жесткостью сечения при изгибе.

Так как при чистом изгибе балки постоянного сечения *M*изг = const и *I*z = const, то радиус кривизны балки запишется в виде

. 7.33

Следовательно, изогнутая линя ось такой балки представляет собой дугу окружности.

Выражение радиуса кривизны подставим в формулу для вычисления нормальных напряжений (7.24) и получим

. 7.34

Формула в виде

 7.34`

позволяет определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки по известному изгибающему моменту *M*изг и моменту инерции сечения *Iz*. *При расчетах значение Mизг берется из эпюры по абсолютному значению*.

Максимальное нормальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 7.9)

. 7.35

Для симметричных сечений (относительно главных центральных осей) соотношение называют моментом сопротивления и обозначают *Wz* (выражают в м3 или см3), тогда

. 7.36

Так как момент сопротивления стоит в расчетной формуле в знаменателе, то чем больше *Wz*, тем меньше расчетные напряжения.

Приведенная формула по структуре аналогична формулам для вычисления напряжений при растяжении, сжатии, сдвиге и кручении.

Формула (7.36) выведена для чистого изгиба. При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают и нормальные и касательные напряжения. Более детальные исследования показывают, что, не смотря на это, приведенная формула дает вполне надежные результаты и при поперечном изгибе.

**7.7. Условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям**

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении (где Mизг имеет наибольшее абсолютное значение), не превосходили соответствующих допускаемых напряжений.

В связи с тем, что при изгибе наблюдается два типа нормальных напряжений – растяжение и сжатие, то необходимо выполнять проверку по обоим значениям допускаемых напряжений:

, . 7.37

*Допускаемое нормальное напряжение при изгибе выбирается таким же, как при растяжении и сжатии.*

*Условие прочности в опасном сечении при одинаковых допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие (для пластичных материалов) имеет вид*:

. 7.38

Для балок из пластичного материала целесообразно выбирать симметричные сечения относительно нейтральной оси.

Для хрупких материалов (чугун, стекло, керамика), допускаемые напряжения на сжатие превосходят допускаемые напряжения на растяжение в несколько раз, поэтому более опасным является растяжение. Следовательно, условие прочности (7.38) примет вид

. 7.39

Для балок из хрупких материалов чаще всего применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При решении таких задач необходимо определять положение нейтральной оси и момент инерции сечения (*использовать момент сопротивления нельзя*).

**7.7.1. Рациональная форма сечения балки.**

Так как вблизи нейтральной оси материал мало напряжен, то выгоднее больше материала располагать дальше от нее. Наиболее экономичными являются формы сечения, у которых при минимальной затрате материала получается максимальный момент сопротивления *Wz*. Поэтому в машиностроении редко применяют металлические балки прямоугольного сечения, но широко распространены прокатные профильные балки таврового, двутаврового и др. сечений (рис. 7.11).



*Более рациональная форма*

Рис. 7.11. Рациональные формы сечений при изгибе

Условие прочности при изгибе, как и любое другое условие прочности, позволяет проводить три вида расчетов:

– проверка прочности балки по известным размерам ее поперечного сечения, максимальному изгибающему моменту, допускаемым напряжениям используя непосредственно неравенства (7.38, 7.39);

– подбор сечения по найденному максимальному изгибающему моменту и заданному допускаемому напряжению

. 7.40

Необходимо помнить, что подбор сечения при изгибе существенно отличается от подбора сечений при осевом растяжении (сжатии). При изгибе форма сечения имеет существенное значение (см. выше, рациональные сечения при изгибе).

– определение допускаемого изгибающего момента (эксплуатационная способность балки) по известным размерам поперечного сечения и допускаемым напряжениям

. 7.41

Определив по данной формуле значение допускаемого изгибающего момента и, зная связь между ним и нагрузкой, можно определить допускаемую нагрузку.

**7.8. Поперечный изгиб**

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент *M*изг и поперечная сила *Q*. От действия *M* в сечениях появляются нормальные напряжения σ. От действия поперечной силы в сечениях появляются касательные напряжения τ.

Возникновение касательных напряжений сопровождается появлением деформаций сдвига, в результате чего поперечные сечения балки перестают быть плоскими. Кроме того, при поперечном изгибе возникают напряжения в продольных сечениях, т.е. имеет место надавливание волокон друг на друга.

При поперечном изгибе касательные напряжения приводят к появлению угловых деформаций и деформаций сдвига. Поэтому поперечные сечения бруса будут не только поворачиваться друг относительно друга, но и будут искривляться.

Без вывода запишем формулы для расчета максимальных *касательных напряжений при поперечном изгибе балки:*

– прямоугольного сечения

; 7.42

– круглого сечения

. 7.43

Наибольшее касательное напряжение наблюдается в волокнах, лежащих в нейтральном слое (рис. 7.12). В наиболее удаленных волокнах касательные напряжения равны нулю.

Обычно при изгибе длина балки намного больше ее высоты и ширины, поэтому величина касательных напряжений намного меньше, чем величина нормальных напряжений в опасных сечениях (τ << σ). Поэтому с достаточной для практики точностью можно пользоваться формулой для расчета нормальных напряжений при расчете металлических балок и не учитывать касательные напряжения.

*z*

*0*

*0*

*τmax*

*Парабола*

*y*

*Нейтральная*

*ось*

Рис. 7.12. Распределение касательных напряжений в сечении при изгибе

Величину касательных напряжений необходимо учитывать при расчете:

– деревянных балок, т.к. древесина плохо работает на скалывание;

– узких балок (например, двутавровых), т.к. максимальные касательные напряжения обратно пропорциональны ширине нейтрального слоя;

– коротких балок, т.к. при относительно небольших изгибающем моменте и нормальных напряжениях могут возникать значительные поперечные силы и касательные напряжения.

**7.9. Перемещения при прямом изгибе.**

Перемещения поперечных сечений балок определяют при расчете их на жесткость. Различают перемещения *линейные и угловые* (рис. 7.13).

Допущения о малости перемещений (см. лекцию 1) позволяют считать, что линейные перемещения – прогибы *y* – направлены перпендикулярно продольной оси недеформированной балки (оси *x*). Поскольку величина *y* переменна по длине балки, т.е. зависит от абсциссы *x*, прогиб обозначают как *y*(*x*). Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба f.*

Угловые перемещения представляют собой *углы поворота* θ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных линий, или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования. Величина θ также зависит от координаты *x*, поэтому угол поворота обозначают как θ(*x*).

Изогнутая под действием нагрузок ось балки представляет собой плавную кривую, которая называется *упругой линией*.

*F*

*A*

*θA*

*θA*

*yA*

*ρ*

*x*

*x*

*y*

*f*

Рис. 7.13. Перемещения при изгибе

Для определения деформаций балки воспользуемся уравнением, которое связывает радиус кривизны оси балки с изгибающим моментом и жесткостью сечения (см. формулу 7.32)

. 7.44

Из курса высшей математики известно, что радиус кривизны кривой линии в любой точке определяется по формуле

, 7.45

где , .

Ввиду малости деформаций  пренебрегаем (так как эта величина значительно меньше единицы), тогда

. 7.46

Подставим выражение (7.46) в (7.44) и получим дифференциальное уравнение упругой линии балки

 или . 7.47

Чтобы получить уравнение для углов поворота сечений, надо это уравнение проинтегрировать один раз, причем ввиду малости деформаций будем считать, что , рад.

Для получения уравнения прогибов необходимо дифференциальное уравнение проинтегрировать дважды.

Вообще определение возникающих прогибов и углов поворота трудоемкий процесс и в данном курсе не рассматривается. При упрощенных расчетах пользуются формулами, приведенными в справочной литературе.

**7.10. Условие жесткости**

Для того чтобы судить о работе балок, мало знать только напряжения, которые возникают в их поперечных сечениях и по которым проверяют прочность. Даже очень прочные балки могут оказаться непригодными к эксплуатации, если под нагрузкой они будут сильно деформироваться вследствие недостаточной жесткости.

В целях обеспечения нормальной эксплуатации конструкций расчет изгибаемых элементов производят не только на прочность, но и на *жесткость*. Максимальные прогибы балок ограничиваются определенной величиной, *допускаемым прогибом*.

*Условие жесткости* заключается в том, что максимальный прогиб не должен превышать допускаемого

. 7.48

Допускаемый прогиб зависит от назначения сооружения или машины. В машиностроении норма допускаемого прогиба колеблется в широких пределах и задается в долях длины пролета

. 7.49

Пролет балки – расстояние между опорами, для консоли – двойной вылет.

**8. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.**

**8.1. Понятие о продольном изгибе**

Наряду с прочностью и жесткостью важным критерием работоспособности сжатых элементов конструкции машин и аппаратов химической технологии является *устойчивость*.

***Устойчивость*** *– способность элемента конструкции сохранять первоначальную прямолинейную форму при внешних воздействиях.*

Рассматривая ранее прочность и жесткость сжатых стержней (см. лекцию 2) предполагали, что ось стержня всегда остается прямолинейной. Однако эта устойчивая форма сжатого стержня возможна в том случае, если его длина *l* близка к размерам поперечного сечения (рис. 8.1, а). Если же длина элемента конструкции намного больше его поперечного сечения, то при сжатии такие стержни могут искривляться, т.е. терять устойчивость (рис. 8.1, б).

*l≈d*

*F*

*d*

*l>>d*

*F<Fкр*

*d*

*F>Fкр*

*а*

*б*

Рис. 8.1. Центральное сжатие (а) и продольный изгиб (б) стержня

Для большинства элементов конструкций потеря устойчивости приводит к недопустимым деформациям и появлению опасных напряжений. Потере устойчивости подвержены не только длинные стержни, нагруженные сжимающей силой, но и тонкостенные оболочки, нагруженные внешним давлением, осевой силой или моментом и некоторые другие элементы конструкций.

Рассмотрим явление потери устойчивости на примере консольного стержня, нагруженного сжимающей силой *F* (рис. 8.1, б). Пока сжимающая сила *F* невелика, сжатый стержень остается прямолинейным, несмотря на принудительные отклонения от положения равновесия. По мере увеличения сжимающей силы *F* стержень все медленнее возвращается в исходное прямолинейное положение. При некоторой силе *F* = *F*кр стержень остается в отклоненном положении и не возвращается в первоначальное положение равновесия.

Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют *критическими*, а соответствующие состояния – *критическими**состояниями*.

Наибольшее значение сжимающей силы, приложенной центрально, до которой прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой называется *критической силой* (*F*кр).

Изгиб, связанный с потерей устойчивости стержня прямолинейной формы, называется *продольным изгибом*.

Процесс потери устойчивости происходит практически мгновенно и является необратимым.

**8.2. Критическая сила.**

Рассмотрим тонкий стальной стержень, длина которого значительно больше поперечных размеров, сжимаемый силой *F*, несколько большей *F*кр (рис. 8.2).

Применяя метод сечений, убеждаемся, что в результате искривления оси в поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора – продольная сила *N = F* и изгибающий момент *M*изг.

*F*

*1*

*1*

*F*

*1*

*1*

*N=F*

*Mизг=F⋅h*

*h*

Рис. 8.2. К определению внутренних силовых факторов при продольном изгибе

Таким образом, искривленный стержень испытывает *сочетание деформаций* центрального сжатия и поперечного изгиба.

При сжимающих силах, даже незначительно больших критического значения, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших величин и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в реальных условиях эксплуатации. В связи с этим определение критических нагрузок является ответственной частью расчета конструкции.

Для предотвращения явления потери устойчивости в сжатых стержнях вводят коэффициент запаса устойчивости:

, 8.1

где *F* – действующая нагрузка на стержень.

*Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы действующая на стержень сжимающая сила F была меньше критической Fкр.*

Значение коэффициента запаса устойчивости зависит от назначения стержня и его материала. Устойчивость стержня обеспечена, если *n*у > 1. Обычно для сталей *n*у = 1,8 ÷ 3, для чугунов – 5 ÷ 5,5, для дерева – 2,8 ÷ 3,2.

**8.3. Определение критической силы. Формула Эйлера.**

Для расчетов сжатых стержней на устойчивость необходимо знать способы определения критической силы *F*кр.

Стержень, сжимаемый критической силой *F*кр изогнется по некоторой кривой (рис. 8.2). Если главные центральные моменты инерции не равны между собой, изгиб стержня произойдет в плоскости наименьшей жесткости. Записывая приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня для малых прогибов и решая его, получим выражение для критической силы, полученное Эйлером (приводится без вывода)

, 8.2

где *E* – модуль упругости первого рода, *Imin* – наименьший из осевых моментов инерции сечения, т.к. искривление происходит в плоскости наименьшей жесткости, *l*п – приведенная длина стержня.

Формула Эйлера в виде (8.2) получена для шарнирного закрепления обоих концов стержня. Распространим полученное решение на другие случаи закрепления стержня.

Если стержень жестко заделан одним концом, то упругую линию стержня можно привести к упругой линии шарнирно закрепленного, зеркально отразив относительно заделки (рис. 8.3).

*Fкр*

*Fкр*

*l*

*l*

Рис. 8.3. Приведение длины жестко закрепленного стержня

Для определения критической силы вместо длины *l* необходимо подставить 2⋅*l*. В общем случае некоторую приведенную длину выразим через действительную длину и *коэффициент приведения длины* μ следующим образом

. 8.3

Для рассмотренного примера (рис. 8.3) μ = 2. Изучая возможные прогибы стержня, замечаем, что он изогнется по форме половины полуволны синусоиды.

Тогда коэффициент μ есть величина, обратная числу полуволн синусоиды *n*

. 8.4

Общее выражение критической силы сжатого стержня примет вид

. 8.5

На рис. 8.4 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и приведены значения μ: а – нижний конец жестко защемлен, верхний свободен; б – оба конца стержня закреплены шарнирно и могут сближаться; в – нижний конец закреплен жестко, верхний – шарнирно, концы могут сближаться; г – оба конца жестко защемлены, но могут сближаться.

*Fкр*

*Fкр*

*Fкр*

*Fкр*

*μ=2,0*

*μ=1,0*

*μ=0,7*

*μ=0,5*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 8.4. Способы закрепления концов сжатых стержней и значения

коэффициентов приведения длины (пояснения в тексте)

Зная критическую силу можно определить допускаемое значение сжимающей силы с учетом коэффициента запаса упстойчивости по формуле 8.1.

**8.4. Граница применимости формулы Эйлера.**

Формула Эйлера базируется на законе Гука, т.е. справедлива до тех пор, пока имеет место упругая деформация стойки. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда. Для определения пределов применимости формулы Эйлера определим критическое напряжение σкр, т.е. напряжение, которое возникает в поперечном сечении *A* стержня при действии критической силы:

. 8.6

Введем понятие наименьшего радиуса инерции поперечного сечения стержня  и перепишем формулу для критического напряжения

. 8.7

Выражение  называется *гибкостью стержня*. Это безразмерная величина, характеризующая влияние размеров стержня и способа крепления его концов. Окончательно получаем

. 8.8

Формулой Эйлера можно пользоваться при выполнении условия

, 8.9

где σпц – предел пропорциональности материала стержня.

Выразим из формулы 8.9 гибкость

. 8.10

Таким образом, формула Эйлера применима, если гибкость стержня не меньше *предельной гибкости материала*. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня и постоянна для него.

С помощью понятия предельной гибкости условие применимости формулы Эйлера можно записать в виде

. 8.11

*Таким образом, формула Эйлера применима только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости для материала, из которого он изготовлен.*

Приведем значения предельной гибкости для некоторых материалов: для стали λпред ≈ 100, для чугуна – 80, для дюралюминия – 60, дерева – 79 (расчет ведется по формуле 8.10).

*Если гибкость стойки меньше предельного значения, то формулу Эйлера для определения критической силы использовать нельзя.*

**8.5. Формула Ясинского.**

Для определения критического напряжения за пределом пропорциональности (λ < λпред), применяют эмпирическую формулу Ясинского

, 8.12

где λ – гибкость, *a*, *b* – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по справочникам (например, для стали Ст. 3: *a*= 310 МПа, *b*= 1,14 МПа).

Нижней границей применимости формулы Ясинского будет величина λ0, при котором критическое напряжение становится равным предельному значению (предел текучести или предел прочности материала). В частности, для стали λ0 =40. При  сжатые стержни рассчитывают на прочность без учета потери устойчивости, т.е.

. 8.13

График зависимости критического напряжения от гибкости для стержней из низкоуглеродистой стали (рис. 8.5) показывает пределы применимости расчетных формул:



*σкр*

*σт*

*σпц*

*малые*

λ

(λ<40)

*средние*

λ

(40≤λ<100)

*большие*

λ

(λ>100)

λ

*прямая Ясинского*

*гипербола Эйлера*

Рис. 8.5. Зависимость критического напряжения от гибкости

(пределы применимости расчетных формул)

– при малых значениях λ (λ < 40) критическое напряжение равно пределу текучести и расчет ведется на простое сжатие (8.13);

– при средних значениях гибкости (40 ≤ λ < 100) критическое напряжение меньше предела текучести, но больше предела пропорциональности – расчет ведут по формуле Ясинского (8.12);

– при больших значениях гибкости (λ ≥ 100) критическое напряжение меньше предела пропорциональности – расчет ведут по формуле Эйлера (8.7 или 8.9).

**8.6. Практические методы расчетов на устойчивость.**

Для упрощенных расчетов на практике часто используют формулу (8.1), в которую входит коэффициент запаса устойчивости *n*у. В зависимости от цели различают три вида расчетов:

– проверочный, когда определяют коэффициент запаса устойчивости и сравнивают с заданным (допускаемым)

, 8.14

где *F* – действующая нагрузка, *F*кр – критическая сила, определяется по формуле Эйлера или Ясинского;

– определяют допускаемую нагрузку

; 8.15

– проектный расчет, когда определяют требуемое значение минимального момента инерции поперечного сечения стержня, используя уравнение Эйлера для определения критической силы

, 8.16

тогда

, 8.17

после чего определяют гибкость и сравнивают с предельной для материала.

Расчет сжатых стержней на устойчивость можно свести по форме к расчету на простое сжатие. Условие прочности при сжатии и условие соблюдения устойчивости объединяют в одно, при этом вводится *коэффициент продольного изгиба* ϕ (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения).

, 8.18

 8.19

или, если действует одна продольная сжимающая сила *F*

. 8.20

При расчете конструкций стержни любой гибкости чаще рассчитывают по формуле

, 8.21

где *F* – сжимающая сила, ϕ – коэффициент снижения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба), [σс] – основное допускаемое напряжение при сжатии, *A* – площадь поперечного сечения.

Коэффициент ϕ зависит от гибкости стержня λ и физико-механических свойств материала. Определяется экспериментально с учетом необходимого запаса устойчивости и приводится в справочниках.

Согласно выражению (8.21) можно выполнять три вида расчетов на устойчивость:

– проверочный расчет при заданных размерах сечения, нагрузке и материале стержня

; 8.22

– расчет допускаемой сжимающей нагрузки при заданном материале стержня и размерах сечения

; 8.23

– определение требуемых размеров сечения стержня при заданных нагрузке и материале стержня

. 8.24

Использование последнего неравенства затрудняется тем, что в него входят две неизвестные величины *A* и ϕ, которые нельзя выразить одну через другую. Поэтому подбор сечений приходится производить методом последовательных приближений. Задаются сначала некоторым среднетабличным значением ϕ (например, ϕ = 0,5). Затем определяют значения *A*, *Imin*, *imin*, λ и по таблицам находят соответствующее значение ϕ1. Полученное значение ϕ1 отличается от ϕ, тогда необходимо повторить расчет, задавшись новым значением . Расчет считается законченным, когда расхождение между принятым в начале очередного приближения значением ϕ и полученным табличным значением не больше 5%.

Расчеты показывают, что наиболее выгодными при работе стержней на сжатие являются кольцевые и коробчатые тонкостенные сечения, чем и объясняется их широкое применение в химическом машиностроении. Наименее выгодными являются прямоугольные сплошные сечения. Доказано, что замена сжатых стержней в виде уголков и двутавров трубчатыми стержнями дает экономию в материале до 20–40%.

**9. ОСНОВЫ ТЕОРИИ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ**

**9.1. Напряженное состояние в точке.**

**Главные площадки и главные напряжения.**

При изучении понятия напряжения (лекция 1) отмечалось, что напряжение в любой точке нагруженного тела зависит от ориентации сечения (площадки), к которому отнесена точка.

Совокупность напряжений по всевозможным площадкам, проведенным через рассматриваемую точку, характеризует *напряженное состояние* в этой точке. Анализ напряженного состояния в точке, необходим при расчетах на прочность вала в случае изгиба с кручением, тонкостенных и толстостенных сосудов и др.

Для исследования напряженного состояния, в окрестности точки выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда, к граням которого приложены внутренние силы, заменяющие действие отброшенных частей тела. Полное напряжение на гранях элемента представляют одним нормальным и двумя касательными составляющими (рис. 9.1).

*σz*

*τzy*

*τzx*

*z*

*y*

*x*

*σy*

*τyz*

*τxz*

*σx*

*τxy*

*τxz*

Рис. 9.1. Напряженное состояние на гранях элемента объема

Нормальным напряжениям σ присваивается индекс, указывающий ось, параллельно которой они направлены. Для обозначения касательных напряжений τ используют двойной индекс. Первый соответствует направлению нормали к площадке, второй – направлению самого напряжения. На невидимых гранях элемента действуют такие же напряжения, но противоположные по направлению (следует из условия равновесия элемента).

При изменении ориентации граней параллелепипеда напряжения также меняются, и может оказаться, что касательные напряжения равны нулю, а нормальные – экстремальны. Такие площадки называют *главными*, а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями*.

*Площадки, в которых касательные напряжения равны нулю, называются* ***главными площадками****, а возникающие в них нормальные напряжения –* ***главными напряжениями.***

В общем случае нагружения через любую точку тела можно провести три взаимно перпендикулярные главные площадки.

Если только одно главное напряжение не равно нулю, то напряжённое состояние называется *линейным* или *одноосным* (рис. 9.2, а). Оно встречается в элементах, работающих на осевое растяжение или сжатие (растяжение или сжатие стержней, чистый изгиб).

Если от нуля отличны два главных напряжения, то напряженное состояние является *плоским* или *двухосным* (рис. 9.2, б). Плоское напряженное состояние возникает при поперечном изгибе, чистом сдвиге, кручении вала, при изгибе с кручением вала и в тонкостенных сосудах.

Если все три главных напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние называется *объемным*, *пространственным* или *трехосным* (рис. 9.2, в). Трехосное напряженное состояние возникает в толстостенных сосудах (в данном курсе не рассматривается).

*σ1*

*σ1*

*σ1*

*σ1*

*σ2*

*σ2*

*σ1*

*σ1*

*σ2*

*σ2*

*σ3*

*σ3*

*а*

*б*

*в*

Рис. 9.2. Примеры линейного (а), плоского (б) и объемного (в)

напряженного состояния

**9.2. Линейное напряженное состояние**

Осевое растяжение (сжатие) бруса является простейшей деформацией, при которой напряженное состояние всех точек одинаково (однородно). Исследовать напряженное состояние в точке – значит получить зависимости для определения нормальных и касательных напряжений на любой площадке, проходящей через эту точку.

Проанализируем напряженное состояние бруса постоянного поперечного сечения *A*, растягиваемого силой *F* (рис. 9.3, а). Мысленно рассечем брус на две части плоскостью 2–2, наклоненной под углом α к произвольному поперечному сечению 1–1, и отбросим одну из них, например, верхнюю (рис. 9.3, в).

*F*

*F*

*1*

*1*

*2*

*2*

*α*

*N=F*

*F*

*1*

*1*

*σ*

*A*

*N=F*

*F*

*pα*

*Aα*

*α*

*2*

*2*

*F*

*pα*

*α*

*2*

*2*

*τα*

*σα*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 9.3. Напряжение в наклонных площадках при растяжении

Условимся считать угол положительным, если он отсчитывается против хода часовой стрелки по направлению от поперечного сечения к наклонному.

Рассмотрим равновесие нижней части стержня.

По наклонному сечению, площадь которого

, 9.1

равномерно распределены полные напряжения *p*α, параллельные продольной силе *N* = *F*. Их значение находим из уравнения равновесия

, ; 9.2

, 9.3

где  – нормальные напряжения в поперечном сечении стержня (рис. 9.3, б)

Разложим полное напряжение в точке наклонного сечения на составляющие – нормальные и касательные (рис. 9.3, г), получаем:

– напряжения по нормали к наклонной площадке 2–2 (нормальные напряжения):

; 9.4

– напряжения вдоль наклонной площадки 2–2 (касательные напряжения):

. 9.5

Нормальные напряжения препятствуют отрыву одной части стержня от другой или их прижатию, касательные напряжения препятствуют взаимному сдвигу.

*Отсюда следует вывод: при растяжении бруса в наклонных сечениях возникают нормальные и касательные напряжения, равномерно распределенные по сечению, и соответствующие этим напряжениям деформации растяжения и сдвига*.

Анализируя формулы (9.4 и 9.5) замечаем:

1. При α=0 (cos(α) = 1, sin(2⋅α) = 0)

, 9.6

. 9.7

*В поперечных сечениях растянутого (сжатого) стержня нормальные напряжения имеют максимальное значение, а касательные напряжения равны нулю (отсутствуют).*

Таким образом, прочность растянутых стержней (лекция 2) по нормальным напряжениям справедливо проверялась именно в поперечных сечениях

. 9.8

2. При α = 90° (cos(α) = 0, sin(2⋅α) = 0)

, 9.9

. 9.10

*В продольных сечениях бруса нет ни касательных, ни нормальных напряжений*.

3. При α=45° (cos(α) ≈ 0,71, sin(2⋅α) = 1)

, 9.11

. 9.12

*Касательные напряжения достигают своего максимального значения в сечениях, наклоненных к поперечному сечению стержня под углом 45° и равны половине нормальных напряжений*.

Эти напряжения являются причиной возникновения на растягиваемом образце при достижении предела текучести линий Людерса–Чернова (см. лекцию 3).

Минимальное алгебраическое значение касательные напряжения принимают при sin(2⋅α) = −1, т.е. когда α = 135°:

. 9.13

Сравнивая выражения (9.12) и (9.13) видим, что наибольшее и наименьшее касательные напряжения равны по абсолютному значению и противоположны по знаку. Это свойство справедливо для любой пары касательных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным сечениям

. 9.14

Оно называется *законом парности касательных напряжений*.

***Закон парности касательных напряжений*** *– касательные напряжения на двух взаимно перпендикулярных площадках равны по величине и обратны по знаку.*

Нормальные напряжения в двух взаимно перпендикулярных сечениях различны, но их сумма постоянна и равна нормальному напряжению в поперечном сечении

. 9.15

**9.3. Плоское напряженное состояние**

В различных конструкциях часто встречаются элементы в виде пластин и оболочек, которые работают в условиях плоского напряженного состояния. К ним можно отнести днища и стенки сосудов для хранения жидкостей (резервуары), газов (газгольдеры), и сыпучих материалов (бункеры); специальные листовые конструкции объектов химической отрасли промышленности (воздухонагреватели, пылеуловители, крупные химические аппараты); трубопроводы большого диаметра.

Рассмотрим частный случай плоского напряженного состояния при растяжении в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Выделим из тела в окрестности произвольной точки бесконечно малую треугольную призму *abc*, у которой *ab* и *ac* – главные площадки, а σmin и σmax – главные напряжения. Площадь наклонной грани *bc* обозначим *dA* (рис. 9.4).

*x*

*a*

*b*

*c*

*dA*

*dA⋅cos(α)*

*dA⋅sin(α)*

*σmin*

*σmax*

*σ*

*τ*

*α*

Рис. 9.4. Плоское напряженное состояние

Рассмотрим равновесие призмы, для чего спроецируем действующие на ее гранях силы на наклонную ось *x*

. 9.16

Используя тригонометрические зависимости получим

, 9.17

сокращая на *dA* и выражая τ получим

. 9.18

Отсюда окончательно

. 9.19

Проецируя все силы на направление нормали получим

, 9.20

После преобразований получим

. 9.21

Основываясь на полученных выражениях (9.19) и (9.20) можно определить главные напряжения и положение главных площадок в общем случае плоского напряженного состояния (в данном курсе не рассматривается).

**9.4. Гипотезы прочности (теории)**

Ранее были рассмотрены расчеты на прочность при одноосном растяжении (сжатии) или простейшем двухосном (сдвиг, кручение), для которых запись условий прочности не вызывала затруднений

, . 9.22

Допускаемые напряжения [σ] и [τ] можно найти, зная предельные напряжения и коэффициент запаса прочности.

*Под предельными напряжениями понимают такое напряжение, при котором происходит качественное изменение свойств материала – хрупкое разрушение или возникновение больших остаточных деформаций (текучесть).*

В случае объемного напряженного состояния (когда все три главных напряжения не равны нулю) предельное напряженное состояние может возникать при различном соотношении главных напряжений. Экспериментально установить предельные значения главных напряжений в этом случае практически невозможно.

Опасность объемного нагружения оценивают сравнением с эталонным нагружением. За эталон сравнения удобнее всего брать одноосное растяжение (сжатие).

Если пропорционально увеличивать все компоненты заданного напряженного состояния в одно и то же число раз, то в некий момент оно станет предельным. Под коэффициентом запаса понимают число, показывающее, во сколько раз следует одновременно увеличить все компоненты напряженного состояния, чтобы оно стало предельным.

Если в двух напряженных состояниях коэффициенты запаса равны, то такие напряженные состояния будут *равноопасны* *(эквивалентны)*.

*Напряженные состояния при сочетании основных деформаций и при одноосном растяжении будем назвать* ***равноопасными*** *или* ***эквивалентными****, если их главные напряжения отличаются от предельного для данного материала в одинаковое число раз, или, иначе говоря, коэффициенты запаса прочности для эквивалентных напряженных состояний одинаковы.*

В этом случае можно сравнивать заданное напряженное состояние с одноосным растяжением (эталоном с напряжением σэкв) по коэффициенту запаса n = nэкв.

***Эквивалентным напряжением*** *называется такое условное напряжение, которое необходимо создать в растянутом образце из того же материала, чтобы его напряженное состояние стало равноопасно заданному объемному (рис. 9.5).*

*σ3*

*σ3*

*σ1*

*σ1*

*σ2*

*σ2*

*σэкв*

*σэкв*

*эквивалентно*

*если n=nэкв*

Рис. 9.5. Эквивалентные напряженные состояния

*Критерием прочности* (критерием предельного напряженного деформированного состояния) называют параметр, на основании которого производится оценка прочности и выявляется равноопасное состояние. Для этого было предложено несколько гипотез прочности о причинах перехода материалов в предельное состояние.

***Гипотезы прочности*** *– это научные предположения об основной причине достижения материалом предельного напряженного состояния при сочетании основных деформаций.*

На основании гипотез прочности выводят формулы для вычисления эквивалентного напряжения, которое затем сопоставляется с допускаемым напряжением на растяжение.

Таким образом, условие прочности при сочетании основных деформаций, когда в поперечных сечениях действуют нормальные и касательные напряжения, будет иметь вид:

. 9.23

Сформулируем и охарактеризуем некоторые основные гипотезы прочности и приведем соответствующие формулы для вычисления эквивалентных напряжений.

*Критерий наибольших нормальных напряжений* (первая гипотеза прочности). Согласно этой гипотезе преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения.

*Предельное состояние материала в общем случае напряженного состояния наступает тогда, когда наибольшее нормальное напряжение достигает опасного значения.*

Эта гипотеза дает удовлетворительные результаты при расчете на прочность конструкций из хрупких материалов (стекло, керамика, чугун и т.п.). Для пластичных материалов эта гипотеза неприменима. Кроме того, эта гипотеза не описывает случай всестороннего сжатия.

*Критерий наибольших линейных деформаций* (вторая гипотеза прочности).

*В качестве критерия прочности принимают наибольшую по абсолютной величине линейную деформацию.*

Данная гипотеза плохо соотносится с результатами эксперимента.

*Первая и вторая теории прочности* в настоящее время не применяются.

*Критерий наибольших касательных напряжений* (третья гипотеза прочности).

Обоснованием данной гипотезы послужил тот факт, что пластическая деформация в металлах возникает в результате необратимых сдвигов в кристаллической решетке (линии Людерса-Чернова).

*Прочность материала будет обеспечена, если максимальное касательное напряжение не превзойдет допускаемого касательного напряжения при одноосном растяжении.*

Для вывода окончательной расчетной формулы используются известные выражения для определения касательных и нормальных напряжений при плоском и одноосном напряженных состояниях.

Приведем расчетную формулу для условия прочности по третьей теории без вывода.

. 9.24

Третья теория прочности хорошо подтверждается экспериментами, в особенности для пластичных материалов.

*Четвертая теория прочности* – энергетическая.

*Предельное напряженное состояние текучести в общем случае нагружения наступит тогда, когда удельная энергия формоизменения достигает определенного значения, соответствующего текучести материала при простом растяжении.*

Формула для записи условия прочности имеет вид

. 9.25

В настоящее время существуют и другие гипотезы прочности: гипотеза Мора-Кулона, критерий Давиденкова-Фридмана и др.