**КРУЧЕНИЕ**

*Кручением* называют такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только один внутренний силовой фактор – *крутящий момент* (*M*).

Кручению подвергаются многие детали машин и сооружений: валы двигателей, станков и машин, оси локомотивов и моторных вагонов, элементы пространственных конструкций.

Внешние крутящие моменты (*T*) передаются на вал химического аппарата (вращающийся вал) в местах посадки на него шкивов, зубчатых и червячных колес, мешалок (рис. 6.1) и т.п. Однако часто крутящие моменты возникают от действия силы, смещенной относительно оси (те же шкивы, зубчатые и червячные колеса, мешалки и т.п.), что дополнительно вызывает изгиб вала.

*T*

*T*

*T/2*

*T/2*

*а*

*б*

Рис. 6.1. Вал многоярусной лопастной мешалки (а) и расчетная схема (б)

*Вращающиеся и работающие на кручение стержни называют* ***валами****.*

Момент от внешней пары сил называется *скручивающим моментом* (*T*).

При решении задач внешние крутящие моменты, передаваемые валом, часто бывают неизвестными, а задана передаваемая мощность. В этом случае крутящий момент *T* можно найти по формуле

, 6.1

где *N* – мощность, ω – угловая скорость. Если задана частота вращения вала n, то угловая скорость рассчитывается как .

**Определение внутренних моментов**

Для определения крутящих моментов в сечении вала применим метод сечений. Брус (рис. 6.2, а) рассекают воображаемой плоскостью, перпендикулярной его продольной оси, мысленно отбрасывают одну из образовавшихся частей, а ее действие на оставшуюся часть заменяют неизвестным моментом *M* (рис. 6.2, б).

*T2*

*T1*

*T3*

*T4*

*T3*

*T4*

*M*

*x*

*x*

*а*

*б*

Рис. 6.2. К определению внутреннего крутящего момента

После этого составляют единственное уравнение равновесия оставшейся части

, 6.1

из которого и определяют значение *M*.

Таким образом, крутящий момент в поперечном сечении бруса численно равен алгебраической сумме внешних моментов, приложенных с одной стороны от рассматриваемого сечения.

***Правило знаков****. Крутящий момент в сечении считается положительным, если внешний момент вращает отсеченную часть против часовой стрелки, если смотреть на отсеченную часть со стороны сечения. Если внешний момент вращает отсеченную часть по часовой стрелке (при взгляде со стороны сечения), то крутящий момент в сечении считаем отрицательным.*

Для наглядного представления о характере распределения и значении крутящих моментов по длине стержня строят эпюры этих моментов. Построение эпюр аналогично построению эпюр продольных сил при растяжении.

Рассмотрим невесомый, защемленный левым концом прямой вал, на который действуют активные моменты *T* и 3*T* (рис 6.3, а).

*T*

*T*

*3T*

*A*

*B*

*C*

*x1*

*T*

*A*

*x*

*M1*

*x*

*x2*

*T*

*A*

*M2*

*x*

*3T*

*B*

*Эпюра M*

*l*

*l*

*2T*

*−*

*+*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 6.3. Пример построения эпюры *M* при кручении

Изображенный на рисунке вал имеет два участка, их границами являются сечения, где приложены внешние моменты. Расчет начинаем от свободного края.

Применяем метод сечений, мысленно рассекаем вал на расстоянии *x*1 от свободного конца (0 ≤ *x*1 < *l*), отбросим левую часть и рассмотрим условие равновесия правой части (рис. 6.3, б). Применяя правило знаков получим

. 6.2

Путем аналогичных рассуждений в сечении на расстоянии *x*2 от правого края (*l* ≤ *x*2 < 2*l*) получим (рис. 6.3, в)

. 6.3

Для построения эпюры *M* проводят ось абсцисс параллельно оси бруса. Значения внутренних моментов откладывают в выбранном масштабе с учетом знаков. Построенная таким образом эпюра *M* показана на рис. 6.3, г.

*В сечениях, где приложены внешние моменты, внутренние моменты меняются скачкообразно и размер скачка равен соответствующему внешнему моменту.*

*Полученное значение внутреннего крутящего момента справедливо на всем протяжении участка, следовательно, на участке внутренний крутящий момент имеет постоянное значение.*

Метод сечений позволяет найти величину и направление крутящего момента в произвольном сечении, но не может дать ответ на вопрос, как внутренние усилия распределены по площади сечения.

**Деформации при кручении**

*Деформацию кручения вызывает пара сил*, лежащих в плоскости, перпендикулярной продольной оси стержня или бруса. Рассмотрим процесс деформации вала при кручении на модели (рис. 6.4).

*T*

*T*

*γ*

*а*

*б*

Рис. 6.4. Схема деформации при кручении

Если на поверхность вала круглого сечения нанести прямоугольную сетку (рис. 6.3, а), то после деформации все образующие на поверхности цилиндра повернутся на один угол γ (рис. 6.4, б) и превратятся в винтовые линии.

Расстояние между поперечными линиями не изменится, сами эти линии не искривятся. Это наблюдение позволяет сделать вывод, что все поперечные сечения, не изменяя своей формы, размеров и взаимного положения, поворачиваются относительно друг друга. Заштрихованный элемент, заключенный между нанесенными линиями, перекашивается – подвергается сдвигу.

*При кручении возникают деформации сдвига, но не за счет поступательного, а в результате вращательного движения одного поперечного сечения относительно другого.*

Указанное поведение модели позволяет принять следующие допущения:

– справедлива гипотеза плоских сечений;

– расстояния между поперечными сечениями остаются неизменными;

– каждое сечение поворачивается на некоторый угол как жесткое целое.

*На основании этого можно утверждать, что* ***при кручении*** *в поперечных сечениях вала* ***возникают******только касательные напряжения****, т.е. имеет место чистый сдвиг.*

Рассмотрим более детально деформации стержня. Двумя поперечными сечениями выделим из вала элемент длиной *dx* и радиусом *r* (рис. 6.5). Правое торцевое сечение поворачивается при кручении относительно левого на угол *d*ϕ (*угол поворота сечения*).

***Угол поворота сечения*** *ϕ равен углу закручивания части цилиндра, заключенной между данным сечением и заделкой. Угол поворота концевого сечения называется* ***полным углом закручивания*** *цилиндра.*

*r*

*ρ*

*δϕ*

*γ*

*dx*

*c*

*b*

*b′*

*T*

Рис. 6.5. Связь γ и dϕ при кручении

Образующая цилиндра *cb* поворачивается при этом на угол γ и переходит в положение *cb`*. В виду малых значение угла  справедливо равенство: .

*Угол γ представляет собой* ***угол сдвига*** *цилиндрической поверхности.*

Дугу окружности  можно выразить через угол сдвига продольных линий γ и приращение угла поворота сечения (рис. 6.5):

 или . 6.4

Отсюда следует, что:

 или . 6.5

Для произвольного положения точки вдоль радиуса, угол сдвига можно определить как

. 6.6

Величину  называют *относительным углом закручивания* (θ).

***Относительный угол закручивания*** *– это угол взаимного поворота сечений, отнесенный к расстоянию между ними.*

Тогда с учетом выражения для угла сдвига имеем

. 6.7

Если брус длиной *l* имеет постоянное сечение и нагружен скручивающим моментом на конце, то

. 6.8

**Напряжения при кручении стержней круглого поперечного сечения**

Крутящий момент есть результирующий момент относительно оси бруса внутренних касательных сил, действующих в поперечном сечении. Воспользуемся законом Гука при сдвиге (4.9):

.

С учетом того, что угол сдвига для произвольной точки по радиусу зависит от угла поворота сечений (6.6), получим:

. 6.9

*Из выражения видно, что деформация сдвига и касательные напряжения при кручении по сечению изменяются по линейному закону.* В центре тяжести круглого сечения (при ρ = 0) касательные напряжения равны нулю, а наибольшие касательные напряжения будут в точках сечения, расположенных у поверхности бруса (при ρ = r)

. 6.10

Если брус состоит из одного участка, т.е. имеет постоянное сечение и постоянный по длине крутящий момент, то касательные напряжения на данном участке будут по всей длине цилиндра одинаковые.

Определим *расчетные формулы* для определения угла закручивания и напряжений в поперечных сечениях в зависимости от крутящего момента.

Рассмотрим равновесие отсеченной части бруса (рис. 6.6).



Рис. 6.6. К определению напряжений и деформаций

 – внутренний силовой фактор (крутящий момент), определенный по методу сечений.

Сила, действующая на площадке *dA* от касательных напряжений  определяется по формуле:

, 6.11

тогда момент от силы *dF* на площадке *dA*

. 6.12

Полный крутящий момент в поперечном сечении от силы относительно оси стержня определяется интегралом:



. 6.13

С учетом закона Гука при сдвиге в виде (6.9) получим:

. 6.14

Тогда относительный угол сдвига (θ) будет равен

. 6.15

Преобразуем уравнение Гука при сдвиге (6.9), используя полученное выражение (6.15)

, 6.16

где *M*к – внутренний крутящий момент (берется из эпюр), *Ip* – полярный момент инерции сечения.

Формула позволяет рассчитать значение напряжений *в любой точке* при кручении круглого вала.

Наибольшее напряжение в точках у контура сечения

, 6.17

где  – полярный момент сопротивления или момент сопротивления при кручении. Для круглого сечения .

**Деформации при кручении валов**

Деформация кручения круглого цилиндра заключается в повороте поперечных сечений относительно друг друга вокруг оси кручения, причем углы поворота их прямо пропорциональны расстояниям от закрепленного сечения.

При этом подразумевается, что все деформации упруги, т.е. выполняется закон Гука при кручении.

Для вычислений деформации вала при кручении воспользуемся формулой для определения крутящего момента (см. формулу 6.14)

 6.18

и выразим из нее *d*ϕ

. 6.19

Интегрируя по длине вала получим

, 6.20

где *l* – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота,  – жесткость вала при кручении.

При постоянном крутящем моменте и жесткости имеем полный угол закручивания на длине *l*

. 6.21

Для цилиндрического бруса, имеющего несколько участков, отличающихся материалом, размерами поперечного сечения или значением крутящего момента, полный угол закручивания на длине вала равен алгебраической сумме углов закручивания отдельных участков

. 6.22

Относительный угол закручивания (на единицу длины):

. 6.23

**Рациональная форма сечения при кручении**

Т.к. материал при кручении в центральной зоне практически не нагружен, то «оставлять» его там не имеет смысла. Значит, рациональными будут пустотелые сечения – трубчатое или коробчатое (рис. 6.7).



Рис. 6.7. Распределение напряжений в поперечном сечении вала и рациональное сечение

Наименее выгодными при кручении являются швеллеры, двутавры, узкие прямоугольные сечения. Наиболее выгодными – круглые кольцевые, особенно при малой толщине стенок.

Во избежание потери устойчивости оболочки стержня, центральную полость заполняют веществом малой плотности (цветной металл или сплав на его основе, полимер и пр.).

**Расчет на прочность при кручении**

Теория кручения круглого бруса используется главным образом при расчете валов различных машин и механизмов.

В общем случае условие прочности вала по касательным напряжениям имеет вид:

, 6.24



Используя формулу (6.17), получим *условие прочности* при кручении стержня круглого сечения:

, 6.25

где *r* – наружный радиус стержня;  – максимальный крутящий момент, принимают из эпюры моментов, [τ] – допускаемое касательное напряжение.

***Условие прочности при кручении*** *– наибольшее возникающее касательное напряжение не должно превышать допускаемое.*

При действии статической нагрузки допускаемые напряжения выбирают в зависимости от допускаемого напряжения при растяжении:

– для сталей (пластичный материал) – ,

– для чугунов (хрупкий материал) – .

Однако валы кроме кручения испытывают изгиб, который в ориентировочных расчетах учитывают введением пониженного допускаемого касательного напряжения [τ] = 25–40 МПа.

Непосредственно по формуле (6.25) *проверяют прочность* вала на кручение.

Кроме проверки прочности по данной формуле можно подбирать диаметр вала или определять допускаемый крутящий момент при известных остальных величинах.

При подборе сечения неравенство выражают относительно требуемого момента сопротивления сечения

. 6.26

Зная, что для круглого сплошного сечения , получим

, 6.27

откуда требуемый диаметр сплошного сечения

. 6.28

Для определения *допускаемого крутящего момента* условие прочности (6.25) преобразуется к виду

. 6.29

Приведенные расчетные формулы по структуре аналогичны формулам для вычисления напряжений при растяжении (сжатии) и применимы только для участков бруса, имеющих одинаковый материал, постоянные поперечное сечение и крутящий момент.

**Расчеты на жесткость при кручении.**

В ряде случаев вал должен удовлетворять не только условию прочности, но и жесткости.

Для обеспечения требуемой жесткости вала при кручении необходимо, чтобы относительный угол закручивания не превосходил допускаемого

, 6.30

где [θ] – допускаемый угол закручивания.

Относительный угол закручивания выражают в радианах на единицу длины вала или в градусах на единицу длины вала, тогда расчетная формула примет вид

. 6.30`

Допускаемый угол закручивания зависит от назначения вала и обычно лежит в пределах , что соответствует .

Неравенства (6.30 и 6.30`) служат для непосредственной *проверки жесткости* вала.

При подборе сечения неравенства выражают относительно требуемого полярного момента инерции. В этом случае расчетная формула имеет вид

. 6.31

Принимая, что  получаем

, 6.32

отсюда требуемый диаметр сплошного сечения

 6.33

или при переходе к градусной мере

. 6.33`

При определении допускаемого крутящего момента условие жесткости преобразуется подобно условию прочности

. 6.34