**ИЗГИБ**

**Общие положения**

Изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации элементов конструкции. На изгиб работают балки, оси, валы и другие детали конструкций.

*Прямой брус, работающий на изгиб, называется* ***балкой****.*

Изгиб вызывают силы, перпендикулярные продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящие через эту ось (рис 7.1, а и б). Сама ось из прямолинейной превращается в криволинейную.

*M*

*F*

*a*

*a*

*б*

*a*

Рис. 7.1. Балки под воздействием силы (а) и момента (б), криволинейная ось бруса (штриховая линия)

Для того чтобы воспринять нагрузку и передать ее на нижележащие конструкции, балка должна иметь опорные закрепления. Как известно из статики (см. теоретическую механику или лекцию 1), различают три вида опор плоских систем: неподвижная шарнирная опора, подвижная шарнирная опора и жесткая заделка.

*Простая* балка, свободно лежащая на двух опорах, имеет одну неподвижную и одну подвижную шарнирные опоры. Расстояние между опорами называется *пролетом*. При изгибе горизонтальная составляющая реакции неподвижной опоры равна нулю, поскольку балка несет только вертикальную или моментную нагрузки. Если нагрузка имеет горизонтальную составляющую, то балка работает на изгиб с растяжением (сжатием). Такие балки имеют сложное напряженное состояние и в данном курсе не рассматриваются.

***Изгиб*** *– это такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях балки возникает внутренний поперечный силовой фактор и изгибающий момент.*

*Чистым изгибом* называется такой вид деформации, при котором в любом поперечном сечении бруса возникает только изгибающий момент. Деформации чистого изгиба будет, например, иметь место, если к прямому брусу в плоскости, проходящей через ось, приложить две равные по величине и противоположные по знаку пары сил.

Однако чаще в поперечных сечениях стержня наряду с изгибающими моментами возникают также и поперечные силы. Такой изгиб называют *поперечным*.

В дальнейшем почти всегда будем рассматривать такие брусья, у которых имеется, по крайней мере, одна плоскость симметрии и плоскость действия нагрузок совпадает с ней. В этом случае деформация изгиба проходит в плоскости действия внешних сил, и изгиб называется *прямым*, в ином случае изгиб называется *косым* (в данном курсе не рассматривается).

**Определение внутренних усилий при изгибе**

Расчет двухопорных балок начинают *с определения опорных реакций* (известно из статики). Чтобы избежать вычислительных ошибок, найденные значения реакций обязательно проверяют, составляя уравнение равновесия, не использованное при их определении. Обычно для контроля служит равенство нулю алгебраической суммы проекций всех сил на вертикальную ось.

*Для определения опорных реакций пользуются правилами знаков статики.*

После того, как найдены и проверены опорные реакции, приступают к определению внутренних силовых факторов в поперечных сечениях балки.

При плоском поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают *два внутренних силовых фактора* – изгибающий момент *M*изг и поперечная сила *Q*. Для их определения применяем метод сечений. Мысленно рассекаем балку (рис. 7.2, а) на произвольном расстоянии *x* от левой опоры. Отбрасываем одну из образовавшихся частей (например, правую) и заменяем ее действие на оставшуюся часть неизвестными усилиями. Рассмотрим равновесие левой части.

Для определения *M*изг и *Q* используем два уравнения равновесия

– для сил:

 , , 7.1

  или в общем виде ; 7.2

– для моментов относительно точки *C*

 , , 7.3

  или в общем виде . 7.4

*F1*

*a*

*a*

*F2*

*C*

*A*

*B*

*a*

*b*

*x*

*l−x*

*l*

*RA*

*RB*

*F1*

*C*

*A*

*RA*

*Qy*

*Mизг*

*x*

*a*

*y*

*a*

*F2*

*C*

*B*

*RB*

*Mизг*

*Qy*

*б*

*a*

Рис. 7.2. К определению внутренних силовых факторов при изгибе

*Таким образом:*

*– поперечная сила в поперечном сечении балки численно равна алгебраической сумме проекций на плоскость сечения всех внешних сил, действующих по одну сторону от сечения;*

*– изгибающий момент в поперечном сечении балки численно равен алгебраической сумме моментов (вычисленных относительно центра тяжести сечения) внешних сил, действующих по одну сторону от данного сечения.*

**Правила знаков**

Правило знаков обоих силовых факторов удобно устанавливать исходя из направления внешних сил.

*Поперечная сила* в сечении балки считается положительной, если равнодействующая внешних сил слева от сечения направлена снизу вверх, а справа – сверху вниз (рис. 7.3, а), и отрицательной – в противоположном случае (рис. 7.3, б).

*F*

*F*

***Qy>0***

*F*

*F*

***Qy<0***

*а*

*б*

Рис. 7.3. Правило знаков для поперечных сил

*Изгибающий момент* в сечении балки считается положительным, если равнодействующий момент внешних сил слева от сечения направлен по часовой стрелке, а справа – против часовой стрелки (рис. 7.4, а), и отрицательным – в противоположном случае (рис. 7.4, б).

Иногда используют более удобное правило для определения знака изгибающего момента: если внешняя нагрузка стремится изогнуть балку выпуклостью вниз (рис. 7.4, а), то изгибающий момент в сечении считается положительным и наоборот (рис. 7.4, б).

*Me*

***Mизг>0***

*Me*

*Me*

***Mизг<0***

*Me*

*а*

*б*

Рис. 7.4. Правило знаков для изгибающих моментов

Пользуясь этими правилами, следует мысленно представлять *сечение балки жестко защемленным*, а связи отброшенными и замененными реакциями.

*Необходимо помнить, что при определении реакций опор пользуются правилами знаков статики; для определения знаков изгибающего момента и поперечной силы – правилами сопротивления материалов.*

**Дифференциальные зависимости при изгибе**

Между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки существуют дифференциальные зависимости, основанные на теореме Журавского.

*Теорема Журавского: поперечная сила равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения балки.*

Рассмотрим балку (рис. 7.5). Начало координат возьмем на левом конце балки, а ось *x* направим вправо (это существенно).

*F1*

*A*

*B*

*a*

*RA*

*RB*

*x*

*a*

*y*

*a*

*M*

*q*

*F2*

*b*

*x*

Рис. 7.6. К определению дифференциальных зависимостей при изгибе

На одном из участков балки, на расстоянии *x* от левого конца проведем сечение и запишем уравнение изгибающего момента:

 . 7.5

Продифференцировав это выражение по координате *x*, получим

 . 7.6

Выражение, стоящее в правой части этого равенства, есть поперечная сила *Q* в сечении *x*. Таким образом

 . 7.7

Если уравнение изгибающих моментов (для участка с равномерно распределенной нагрузкой) продифференцировать вторично, то получим

 . 7.8

*Вторая производная от изгибающего момента или первая производная от поперечной силы по абсциссе сечения балки равна интенсивности распределенной нагрузки.*

Как известно из курса высшей математики, по знаку второй производной функции можно судить о выпуклости или вогнутости кривой – данное утверждение необходимо использовать при построении эпюр.

**Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов**

Вопрос о нахождении опасных сечений произвольно нагруженной балки решается так же, как при растяжении (сжатии) и кручении, т.е. в результате построения и анализа эпюр внутренних силовых факторов.

Для того чтобы установить закон изменения поперечной силы и изгибающего момента по длине балки, составляют их аналитические выражения в виде функций от положения сечения (абсциссы *x*).

После того как составлены уравнения *Q(x)* и *M*изг*(x)*, абсциссам дают последовательно конкретные значения, мысленно перемещая сечение балки по длине рассматриваемого участка. Вычисляя соответствующие значения (ординаты) *Q* и *M*изг, откладывают их в принятом масштабе от базисной линии, которая параллельна оси продольной балки. Положительные ординаты откладывают вверх от оси, а отрицательные – вниз.

Все изложенное справедливо не только для двухопорных балок, но и для консолей. Однако расчет консолей следует начинать сразу с построения эпюр, перемещаясь от свободного края к заделке. Опорные реакции определяются автоматически в процессе построения.

Пример построения эпюр *Q* и *M*изг рассмотрим для двухопорной балки (рис. 7.6, а).

Определим опорные реакции из уравнений равновесия балки:

 , , 7.9

 ; 7.10

 , , 7.11

*a*

*a*

*F=0,1 кН*

*C*

*A*

*B*

*4 м*

*2 м*

*RA=0,5 кН*

*RB=0,8 кН*

*x*

*a*

*y*

*a*

*M=0,2 кН⋅м*

*q=0,3 кН/м*

*Эпюра Q, кН*

*x1*

*x2*

*x\*=1,7 м*

*0,1*

*0,5*

*0,7*

*+*

*−*

*Эпюра Mизг, кН⋅м*

*0,2*

*0,4*

*0,42*

*+*

*−*

*б*

*a*

*в*

*a*

Рис. 7.6. Пример расчета двухопорной балки (а), построенные эпюры поперечных сил (б) и изгибающих моментов (в)

 ; 7.12

Проверяем правильность нахождения реакций, записывая третье, не использованное, уравнение равновесия:

 , , 7.13

 . 7.14

Балка имеет два участка *AB* и *BC* (правила определения границ участков см. лекцию 2).

*Построение эпюры Q.*

Рассмотрим первый участок *AB* длиной *x*1 (), поперечная сила на этом участке записывается в виде

  7.15

И представляет собой уравнение наклонной прямой.

При *x*1=0 ;

при *x*1=4 .

Для упрощения расчетов и построения эпюры *Q* на втором участке *BC* возьмем начало координат в точке *C* и направим ось *x* влево. Поперечная сила на участке *x*2 () записываем в виде

 , 7.16

при *x*2=0 и при *x*2=2 .

По полученным значениям поперечной силы в граничных точках строи эпюру (рис. 7.6, б).

На первом участке эпюра *Q* изменяется по линейному закону. На втором участке эпюра *Q* представляет собой линию, параллельную базовой оси. На границе участков в точке *B* эпюра *Q* имеет скачок, равный по величине опорной реакции *RB*=0,8 кН.

На первом участке эпюра *Q* пересекает ось. Определим координату *x*\*, где поперечная сила переходит через нуль. Для этого приравняем *Q*1 к нулю

 , . 7.17

*Построение эпюры M*изг*.*

На первом участке () выражение для изгибающего момента имеет вид

 . 7.18

Полученное выражение представляет собой уравнение квадратичной параболы (переменная *x* входит во второй степени).

Определим значения *M*изг в трех ключевых точках – на границах и в точке, где *Q* равняется нулю.

При *x*1=0 ;

при *x*1=4 ,

при *x*\*=1,7



Для второго участка, взяв за начало координат точку *C*, получим

 . 7.19

Вычислим значения изгибающего момента на границах участка:

при *x*2=0 ;

при *x*2=2 .

По найденным значениям строим эпюру *M*изг (рис. 7.6, в).

**Правила построения и проверки эпюр.**

При построении эпюр следует руководствоваться следующими правилами:

– положительные значения изгибающих моментов и поперечных сил откладывают вверх от оси, а отрицательные – вниз;

– в сечении, где приложена сосредоточенная сила, значение поперечной силы изменяется скачкообразно, скачок равен модулю этой силы;

– в сечении, где приложена пара сил (момент), значение изгибающего момента изменяется скачкообразно, скачок равен моменту пары;

– на участке, где нет распределенной нагрузки, эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую, а эпюра поперечных сил – прямую, параллельную оси;

– на участке, где приложена равномерно распределенная нагрузка, эпюра моментов представляет собой параболу, а эпюра поперечных сил – наклонную прямую;

– на конце балки изгибающий момент равен нулю, если там не приложена пара сил (момент);

– в сечении, соответствующем заделке, поперечная сила равна реактивной силе, а изгибающий момент – реактивному моменту.

**Деформации при чистом изгибе**

Изучение деформаций изгиба начнем со случая чистого простого изгиба, в дальнейшем рассмотрим более общий случай изгиба – поперечный.

При изучении деформации изгиба мысленно представим, что балка состоит из бесчисленного количества волокон, параллельных оси.

На боковую поверхность бруса нанесем сетку продольных и поперечных прямых линий и подвергнем брус деформации чистого изгиба (рис. 7.7).

В результате можно видеть следующее:

– поперечные прямые линии останутся при деформации прямыми, но повернутся навстречу друг другу;

– продольные прямые линии, а также ось бруса искривятся.

*y*

*x*

*Mизг*

*Mизг*

*Mизг*

*Mизг*

*y*

*x*

*сжатие*

*растяжение*

*нейтральный слой*

*(нейтральная линия)*

Рис. 7.7. К определению деформаций изгиба

*При чистом изгибе справедлива гипотеза плоских сечений; волокна, лежащие на выпуклой стороне, растягиваются, лежащие на вогнутой стороне – сжимаются, а на границе между ними лежит нейтральный слой волокон, которые только искривляются, не изменяя своей длины.*

Линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью поперечного сечения называется *нейтральной осью*.

Из рассмотренного опыта следует, что волокна балки деформируются различно: б***о***льшие деформации испытывают волокна, более удаленные от нейтрального слоя.

Предположим, что волокна балки не оказывают давления друг на друга, т.е. напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки равны нулю (гипотеза о ненадавливании волокон). Тогда можно утверждать, что *каждое волокно испытывает одноосное растяжение или сжатие*.

**Нормальные напряжения при чистом изгибе**

Как было показано выше, в поперечных сечениях балки *при чистом изгибе* возникают *только нормальные напряжения растяжения и сжатия*, неравномерно распределённые по сечению.

Для выяснения характера распределения и значения напряжений, вызываемых изгибающим моментом, рассмотрим случай чистого изгиба. На среднем участке балки, нагруженной двумя одинаковыми, равноотстоящими от опор сосредоточенными силами, поперечная сила равна нулю и возникает только изгибающий момент *M*изг (рис. 7.8, а).

*F*

*F*

*dx*

*ρ*

*y*

*dθ*

*dx*

*Mизг*

*Mизг*

*б*

*а*

*dx*

*y*

*A*

*B*

*A′*

*B′*

*в*

*нейтральная*

*линия*

*Mизг*

*Mизг*

Рис. 7.8. К определению напряжений при чистом изгибе

Двумя бесконечно близкими сечениями выделим на указанном участке балки элемент длиной *dx* (рис. 7.8, а) и изобразим его в укрупненном масштабе (рис. 7.8, б).

Оба сечения до деформации параллельны друг другу и после приложения нагрузки взаимно повернутся вокруг своих нейтральных линий на угол *d*θ (рис. 7.8, в). Длина отрезка нейтрального слоя *dx* при этом не изменится и его можно определить через радиус кривизны нейтрального слоя ρ и угол поворота поперечных сечений *d*θ:

 . 7.20

Любое волокно, лежащее выше или ниже нейтрального слоя, изменит свою длину. Рассмотрим волокно *AB*, отстоящее от нейтрального слоя на расстояние *y* (рис. 7.8, б). В недеформированном состоянии длина этого слоя равна *dx*, после приложения нагрузки, его длина увеличилась и стала равной *A*′*B*′. Длину участка *A′B′* так же выразим через угол поворота

 . 7.21

Используя понятие относительного удлинения при растяжении и формулы (7.20, 7.21) запишем выражение для определения относительного удлинения слоя *AB*

 , 7.22

после преобразований и необходимых сокращений получим

 . 7.23

*Данная зависимость показывает, что деформации волокон пропорциональны их расстояниям до нейтрального слоя.*

В соответствии с допущением о ненадавливании волокон (напряжения в направлении, перпендикулярном оси балки равны нулю) используем выражение закона Гука при осевом растяжении (сжатии) . После подстановки в него зависимости (7.23) получим

 . 7.24

Таким образом, при чистом изгибе напряжения в поперечном сечении изменяются по линейному закону, максимальные напряжения возникают в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси

;

.

Эпюра нормальных напряжений в поперечном сечении приведена на рис. 7.9, растягивающее напряжение считаем положительным, а сжимающие – отрицательным.

*M*

*нейтральная*

*линия*

*Эпюра σ*

**



*+*

*−*

Рис. 7.9. Распределение нормальных напряжений по сечению при изгибе

Полученная формула (7.24) для вычисления нормальных напряжений неудобна, так как в нее входит радиус кривизны нейтрального слоя. Для вывода формулы, связывающей нормальные напряжения с изгибающим моментом, применим метод сечений и рассмотрим равновесие отсеченной части балки, изображенной на рис. 7.10.

*M*

*y*

*z*

*Нейтральная*

*ось*

*x*

*dA*

*dN*

*y*

Рис. 7.10. К расчету нормальных напряжений при изгибе

Выделим в поперечном сечении элементарную площадку *dA*, в пределах которой нормальные напряжения остаются постоянными.

Нормальная сила *dN*, действующая на площадку *dA* равна

 . 7.25

Составим уравнения равновесия для данной системы.

Сумма проекций сил на оси *x* и *y* равны нулю, т.к. внутренние силы *dN* перпендикулярны этим осям. Уравнение равновесия проекций сил на ось *z* запишется следующим образом

 , . 7.26

Используя выражение (7.24) получим

 . 7.27

Так как *E* и ρ не равны нулю, то .

Этот интеграл представляет собой статический момент площади сечения относительно оси *z*, т.е. нейтральной оси. Так как статический момент равен нулю (*Sz* = 0), то ось *z* является центральной.

*При изгибе нейтральная ось всегда проходит через центр тяжести поперечного сечения.*

Составим уравнение моментов сил относительно оси *z*.

 , . 7.28

При чистом изгибе внешний момент равен внутреннему, т.е. *Me* = *M*изг*.* Элементарный момент *dM* от элементарной силы *dN* на расстоянии *y* от нейтральной оси равен

 , 7.29

тогда

 . 7.30

Используя выражение (7.24) , и вынося за знак интеграла дробь E/ρ как постоянную величину, получим

 . 7.31

Интеграл  представляет собой момент инерции сечения относительно нейтральной оси *z*, тогда

 . 7.32

Произведение  называют жесткостью сечения при изгибе.

Так как при чистом изгибе балки постоянного сечения *M*изг = const и *I*z = const, то радиус кривизны балки запишется в виде

 . 7.33

Следовательно, изогнутая линя ось такой балки представляет собой дугу окружности.

Выражение радиуса кривизны подставим в формулу для вычисления нормальных напряжений (7.24) и получим

 . 7.34

Формула в виде

  7.34`

позволяет определить нормальное напряжение в любой точке поперечного сечения балки по известному изгибающему моменту *M*изг и моменту инерции сечения *Iz*. *При расчетах значение Mизг берется из эпюры по абсолютному значению*.

Максимальное нормальное напряжение при изгибе возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 7.9)

 . 7.35

Для симметричных сечений (относительно главных центральных осей) соотношение называют моментом сопротивления и обозначают *Wz* (выражают в м3 или см3), тогда

 . 7.36

Так как момент сопротивления стоит в расчетной формуле в знаменателе, то чем больше *Wz*, тем меньше расчетные напряжения.

Приведенная формула по структуре аналогична формулам для вычисления напряжений при растяжении, сжатии, сдвиге и кручении.

Формула (7.36) выведена для чистого изгиба. При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают и нормальные и касательные напряжения. Более детальные исследования показывают, что, не смотря на это, приведенная формула дает вполне надежные результаты и при поперечном изгибе.

**Условия прочности при изгибе по нормальным напряжениям**

Для обеспечения прочности балки необходимо, чтобы наибольшие растягивающие и наибольшие сжимающие напряжения при изгибе в опасном сечении (где Mизг имеет наибольшее абсолютное значение), не превосходили соответствующих допускаемых напряжений.

В связи с тем, что при изгибе наблюдается два типа нормальных напряжений – растяжение и сжатие, то необходимо выполнять проверку по обоим значениям допускаемых напряжений:

 , . 7.37

*Допускаемое нормальное напряжение при изгибе выбирается таким же, как при растяжении и сжатии.*

*Условие прочности в опасном сечении при одинаковых допускаемых напряжениях на растяжение и сжатие (для пластичных материалов) имеет вид*:

 . 7.38

Для балок из пластичного материала целесообразно выбирать симметричные сечения относительно нейтральной оси.

Для хрупких материалов (чугун, стекло, керамика), допускаемые напряжения на сжатие превосходят допускаемые напряжения на растяжение в несколько раз, поэтому более опасным является растяжение. Следовательно, условие прочности (7.38) примет вид

 . 7.39

Для балок из хрупких материалов чаще всего применяют сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. При решении таких задач необходимо определять положение нейтральной оси и момент инерции сечения (*использовать момент сопротивления нельзя*).

**Рациональная форма сечения балки.**

Так как вблизи нейтральной оси материал мало напряжен, то выгоднее больше материала располагать дальше от нее. Наиболее экономичными являются формы сечения, у которых при минимальной затрате материала получается максимальный момент сопротивления *Wz*. Поэтому в машиностроении редко применяют металлические балки прямоугольного сечения, но широко распространены прокатные профильные балки таврового, двутаврового и др. сечений (рис. 7.11).

*Более рациональная форма*

Рис. 7.11. Рациональные формы сечений при изгибе

Условие прочности при изгибе, как и любое другое условие прочности, позволяет проводить три вида расчетов:

– проверка прочности балки по известным размерам ее поперечного сечения, максимальному изгибающему моменту, допускаемым напряжениям используя непосредственно неравенства (7.38, 7.39);

– подбор сечения по найденному максимальному изгибающему моменту и заданному допускаемому напряжению

 . 7.40

Необходимо помнить, что подбор сечения при изгибе существенно отличается от подбора сечений при осевом растяжении (сжатии). При изгибе форма сечения имеет существенное значение (см. выше, рациональные сечения при изгибе).

– определение допускаемого изгибающего момента (эксплуатационная способность балки) по известным размерам поперечного сечения и допускаемым напряжениям

 . 7.41

Определив по данной формуле значение допускаемого изгибающего момента и, зная связь между ним и нагрузкой, можно определить допускаемую нагрузку.

**Поперечный изгиб**

При поперечном изгибе в поперечных сечениях балки возникают изгибающий момент *M*изг и поперечная сила *Q*. От действия *M* в сечениях появляются нормальные напряжения σ. От действия поперечной силы в сечениях появляются касательные напряжения τ.

Возникновение касательных напряжений сопровождается появлением деформаций сдвига, в результате чего поперечные сечения балки перестают быть плоскими. Кроме того, при поперечном изгибе возникают напряжения в продольных сечениях, т.е. имеет место надавливание волокон друг на друга.

При поперечном изгибе касательные напряжения приводят к появлению угловых деформаций и деформаций сдвига. Поэтому поперечные сечения бруса будут не только поворачиваться друг относительно друга, но и будут искривляться.

Без вывода запишем формулы для расчета максимальных *касательных напряжений при поперечном изгибе балки:*

– прямоугольного сечения

 ; 7.42

– круглого сечения

 . 7.43

Наибольшее касательное напряжение наблюдается в волокнах, лежащих в нейтральном слое (рис. 7.12). В наиболее удаленных волокнах касательные напряжения равны нулю.

Обычно при изгибе длина балки намного больше ее высоты и ширины, поэтому величина касательных напряжений намного меньше, чем величина нормальных напряжений в опасных сечениях (τ << σ). Поэтому с достаточной для практики точностью можно пользоваться формулой для расчета нормальных напряжений при расчете металлических балок и не учитывать касательные напряжения.

*z*

*0*

*0*

*τmax*

*Парабола*

*y*

*Нейтральная*

*ось*

Рис. 7.12. Распределение касательных напряжений в сечении при изгибе

Величину касательных напряжений необходимо учитывать при расчете:

– деревянных балок, т.к. древесина плохо работает на скалывание;

– узких балок (например, двутавровых), т.к. максимальные касательные напряжения обратно пропорциональны ширине нейтрального слоя;

– коротких балок, т.к. при относительно небольших изгибающем моменте и нормальных напряжениях могут возникать значительные поперечные силы и касательные напряжения.

**Перемещения при прямом изгибе.**

Перемещения поперечных сечений балок определяют при расчете их на жесткость. Различают перемещения *линейные и угловые* (рис. 7.13).

Допущения о малости перемещений (см. лекцию 1) позволяют считать, что линейные перемещения – прогибы *y* – направлены перпендикулярно продольной оси недеформированной балки (оси *x*). Поскольку величина *y* переменна по длине балки, т.е. зависит от абсциссы *x*, прогиб обозначают как *y*(*x*). Наибольший прогиб называется *стрелой прогиба f.*

Угловые перемещения представляют собой *углы поворота* θ поперечных сечений балки вокруг их нейтральных линий, или углы между направлениями продольной оси балки до и после деформирования. Величина θ также зависит от координаты *x*, поэтому угол поворота обозначают как θ(*x*).

Изогнутая под действием нагрузок ось балки представляет собой плавную кривую, которая называется *упругой линией*.

*F*

*A*

*θA*

*θA*

*yA*

*ρ*

*x*

*x*

*y*

*f*

Рис. 7.13. Перемещения при изгибе

Для определения деформаций балки воспользуемся уравнением, которое связывает радиус кривизны оси балки с изгибающим моментом и жесткостью сечения (см. формулу 7.32)

 . 7.44

Из курса высшей математики известно, что радиус кривизны кривой линии в любой точке определяется по формуле

 , 7.45

где , .

Ввиду малости деформаций  пренебрегаем (так как эта величина значительно меньше единицы), тогда

 . 7.46

Подставим выражение (7.46) в (7.44) и получим дифференциальное уравнение упругой линии балки

  или . 7.47

Чтобы получить уравнение для углов поворота сечений, надо это уравнение проинтегрировать один раз, причем ввиду малости деформаций будем считать, что , рад.

Для получения уравнения прогибов необходимо дифференциальное уравнение проинтегрировать дважды.

Вообще определение возникающих прогибов и углов поворота трудоемкий процесс и в данном курсе не рассматривается. При упрощенных расчетах пользуются формулами, приведенными в справочной литературе.

**Условие жесткости**

Для того чтобы судить о работе балок, мало знать только напряжения, которые возникают в их поперечных сечениях и по которым проверяют прочность. Даже очень прочные балки могут оказаться непригодными к эксплуатации, если под нагрузкой они будут сильно деформироваться вследствие недостаточной жесткости.

В целях обеспечения нормальной эксплуатации конструкций расчет изгибаемых элементов производят не только на прочность, но и на *жесткость*. Максимальные прогибы балок ограничиваются определенной величиной, *допускаемым прогибом*.

*Условие жесткости* заключается в том, что максимальный прогиб не должен превышать допускаемого

 . 7.48

Допускаемый прогиб зависит от назначения сооружения или машины. В машиностроении норма допускаемого прогиба колеблется в широких пределах и задается в долях длины пролета

 . 7.49

Пролет балки – расстояние между опорами, для консоли – двойной вылет.