**УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ.**

**Понятие о продольном изгибе**

Наряду с прочностью и жесткостью важным критерием работоспособности сжатых элементов конструкции машин и аппаратов химической технологии является *устойчивость*.

***Устойчивость*** *– способность элемента конструкции сохранять первоначальную прямолинейную форму при внешних воздействиях.*

Рассматривая ранее прочность и жесткость сжатых стержней (см. лекцию 2) предполагали, что ось стержня всегда остается прямолинейной. Однако эта устойчивая форма сжатого стержня возможна в том случае, если его длина *l* близка к размерам поперечного сечения (рис. 8.1, а). Если же длина элемента конструкции намного больше его поперечного сечения, то при сжатии такие стержни могут искривляться, т.е. терять устойчивость (рис. 8.1, б).

*l≈d*

*F*

*d*

*l>>d*

*F<Fкр*

*d*

*F>Fкр*

*а*

*б*

Рис. 8.1. Центральное сжатие (а) и продольный изгиб (б) стержня

Для большинства элементов конструкций потеря устойчивости приводит к недопустимым деформациям и появлению опасных напряжений. Потере устойчивости подвержены не только длинные стержни, нагруженные сжимающей силой, но и тонкостенные оболочки, нагруженные внешним давлением, осевой силой или моментом и некоторые другие элементы конструкций.

Рассмотрим явление потери устойчивости на примере консольного стержня, нагруженного сжимающей силой *F* (рис. 8.1, б). Пока сжимающая сила *F* невелика, сжатый стержень остается прямолинейным, несмотря на принудительные отклонения от положения равновесия. По мере увеличения сжимающей силы *F* стержень все медленнее возвращается в исходное прямолинейное положение. При некоторой силе *F* = *F*кр стержень остается в отклоненном положении и не возвращается в первоначальное положение равновесия.

Нагрузки, при которых происходит потеря устойчивости, называют *критическими*, а соответствующие состояния – *критическими**состояниями*.

Наибольшее значение сжимающей силы, приложенной центрально, до которой прямолинейная форма равновесия стержня является устойчивой называется *критической силой* (*F*кр).

Изгиб, связанный с потерей устойчивости стержня прямолинейной формы, называется *продольным изгибом*.

Процесс потери устойчивости происходит практически мгновенно и является необратимым.

**Критическая сила.**

Рассмотрим тонкий стальной стержень, длина которого значительно больше поперечных размеров, сжимаемый силой *F*, несколько большей *F*кр (рис. 8.2).

Применяя метод сечений, убеждаемся, что в результате искривления оси в поперечных сечениях возникают два внутренних силовых фактора – продольная сила *N = F* и изгибающий момент *M*изг.

*F*

*1*

*1*

*F*

*1*

*1*

*N=F*

*Mизг=F⋅h*

*h*

Рис. 8.2. К определению внутренних силовых факторов при продольном изгибе

Таким образом, искривленный стержень испытывает *сочетание деформаций* центрального сжатия и поперечного изгиба.

При сжимающих силах, даже незначительно больших критического значения, дополнительные напряжения изгиба достигают весьма больших величин и непосредственно угрожают прочности конструкции. Поэтому критическое состояние, как непосредственно предшествующее разрушению, считается недопустимым в реальных условиях эксплуатации. В связи с этим определение критических нагрузок является ответственной частью расчета конструкции.

Для предотвращения явления потери устойчивости в сжатых стержнях вводят коэффициент запаса устойчивости:

, 8.1

где *F* – действующая нагрузка на стержень.

*Для обеспечения устойчивости необходимо, чтобы действующая на стержень сжимающая сила F была меньше критической Fкр.*

Значение коэффициента запаса устойчивости зависит от назначения стержня и его материала. Устойчивость стержня обеспечена, если *n*у > 1. Обычно для сталей *n*у = 1,8 ÷ 3, для чугунов – 5 ÷ 5,5, для дерева – 2,8 ÷ 3,2.

**Определение критической силы. Формула Эйлера.**

Для расчетов сжатых стержней на устойчивость необходимо знать способы определения критической силы *F*кр.

Стержень, сжимаемый критической силой *F*кр изогнется по некоторой кривой (рис. 8.2). Если главные центральные моменты инерции не равны между собой, изгиб стержня произойдет в плоскости наименьшей жесткости. Записывая приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня для малых прогибов и решая его, получим выражение для критической силы, полученное Эйлером (приводится без вывода)

, 8.2

где *E* – модуль упругости первого рода, *Imin* – наименьший из осевых моментов инерции сечения, т.к. искривление происходит в плоскости наименьшей жесткости, *l*п – приведенная длина стержня.

Формула Эйлера в виде (8.2) получена для шарнирного закрепления обоих концов стержня. Распространим полученное решение на другие случаи закрепления стержня.

Если стержень жестко заделан одним концом, то упругую линию стержня можно привести к упругой линии шарнирно закрепленного, зеркально отразив относительно заделки (рис. 8.3).

*Fкр*

*Fкр*

*l*

*l*

Рис. 8.3. Приведение длины жестко закрепленного стержня

Для определения критической силы вместо длины *l* необходимо подставить 2⋅*l*. В общем случае некоторую приведенную длину выразим через действительную длину и *коэффициент приведения длины* μ следующим образом

. 8.3

Для рассмотренного примера (рис. 8.3) μ = 2. Изучая возможные прогибы стержня, замечаем, что он изогнется по форме половины полуволны синусоиды.

Тогда коэффициент μ есть величина, обратная числу полуволн синусоиды *n*

. 8.4

Общее выражение критической силы сжатого стержня примет вид

. 8.5

На рис. 8.4 показаны наиболее часто встречающиеся способы закрепления концов стержня и приведены значения μ: а – нижний конец жестко защемлен, верхний свободен; б – оба конца стержня закреплены шарнирно и могут сближаться; в – нижний конец закреплен жестко, верхний – шарнирно, концы могут сближаться; г – оба конца жестко защемлены, но могут сближаться.

*Fкр*

*Fкр*

*Fкр*

*Fкр*

*μ=2,0*

*μ=1,0*

*μ=0,7*

*μ=0,5*

*а*

*б*

*в*

*г*

Рис. 8.4. Способы закрепления концов сжатых стержней и значения

коэффициентов приведения длины (пояснения в тексте)

Зная критическую силу можно определить допускаемое значение сжимающей силы с учетом коэффициента запаса упстойчивости по формуле 8.1.

**Граница применимости формулы Эйлера.**

Формула Эйлера базируется на законе Гука, т.е. справедлива до тех пор, пока имеет место упругая деформация стойки. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться не всегда. Для определения пределов применимости формулы Эйлера определим критическое напряжение σкр, т.е. напряжение, которое возникает в поперечном сечении *A* стержня при действии критической силы:

. 8.6

Введем понятие наименьшего радиуса инерции поперечного сечения стержня  и перепишем формулу для критического напряжения

. 8.7

Выражение  называется *гибкостью стержня*. Это безразмерная величина, характеризующая влияние размеров стержня и способа крепления его концов. Окончательно получаем

. 8.8

Формулой Эйлера можно пользоваться при выполнении условия

, 8.9

где σпц – предел пропорциональности материала стержня.

Выразим из формулы 8.9 гибкость

. 8.10

Таким образом, формула Эйлера применима, если гибкость стержня не меньше *предельной гибкости материала*. Предельная гибкость зависит только от физико-механических свойств материала стержня и постоянна для него.

С помощью понятия предельной гибкости условие применимости формулы Эйлера можно записать в виде

. 8.11

*Таким образом, формула Эйлера применима только в тех случаях, когда гибкость стержня больше или равна предельной гибкости для материала, из которого он изготовлен.*

Приведем значения предельной гибкости для некоторых материалов: для стали λпред ≈ 100, для чугуна – 80, для дюралюминия – 60, дерева – 79 (расчет ведется по формуле 8.10).

*Если гибкость стойки меньше предельного значения, то формулу Эйлера для определения критической силы использовать нельзя.*

**Формула Ясинского.**

Для определения критического напряжения за пределом пропорциональности (λ < λпред), применяют эмпирическую формулу Ясинского

, 8.12

где λ – гибкость, *a*, *b* – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала и определяемые по справочникам (например, для стали Ст. 3: *a*= 310 МПа, *b*= 1,14 МПа).

Нижней границей применимости формулы Ясинского будет величина λ0, при котором критическое напряжение становится равным предельному значению (предел текучести или предел прочности материала). В частности, для стали λ0 =40. При  сжатые стержни рассчитывают на прочность без учета потери устойчивости, т.е.

. 8.13

График зависимости критического напряжения от гибкости для стержней из низкоуглеродистой стали (рис. 8.5) показывает пределы применимости расчетных формул:



*σкр*

*σт*

*σпц*

*малые*

λ

(λ<40)

*средние*

λ

(40≤λ<100)

*большие*

λ

(λ>100)

λ

*прямая Ясинского*

*гипербола Эйлера*

Рис. 8.5. Зависимость критического напряжения от гибкости

(пределы применимости расчетных формул)

– при малых значениях λ (λ < 40) критическое напряжение равно пределу текучести и расчет ведется на простое сжатие (8.13);

– при средних значениях гибкости (40 ≤ λ < 100) критическое напряжение меньше предела текучести, но больше предела пропорциональности – расчет ведут по формуле Ясинского (8.12);

– при больших значениях гибкости (λ ≥ 100) критическое напряжение меньше предела пропорциональности – расчет ведут по формуле Эйлера (8.7 или 8.9).

**Практические методы расчетов на устойчивость.**

Для упрощенных расчетов на практике часто используют формулу (8.1), в которую входит коэффициент запаса устойчивости *n*у. В зависимости от цели различают три вида расчетов:

– проверочный, когда определяют коэффициент запаса устойчивости и сравнивают с заданным (допускаемым)

, 8.14

где *F* – действующая нагрузка, *F*кр – критическая сила, определяется по формуле Эйлера или Ясинского;

– определяют допускаемую нагрузку

; 8.15

– проектный расчет, когда определяют требуемое значение минимального момента инерции поперечного сечения стержня, используя уравнение Эйлера для определения критической силы

, 8.16

тогда

, 8.17

после чего определяют гибкость и сравнивают с предельной для материала.

Расчет сжатых стержней на устойчивость можно свести по форме к расчету на простое сжатие. Условие прочности при сжатии и условие соблюдения устойчивости объединяют в одно, при этом вводится *коэффициент продольного изгиба* ϕ (коэффициент снижения основного допускаемого напряжения).

, 8.18

 8.19

или, если действует одна продольная сжимающая сила *F*

. 8.20

При расчете конструкций стержни любой гибкости чаще рассчитывают по формуле

, 8.21

где *F* – сжимающая сила, ϕ – коэффициент снижения основного допускаемого напряжения (или коэффициент продольного изгиба), [σс] – основное допускаемое напряжение при сжатии, *A* – площадь поперечного сечения.

Коэффициент ϕ зависит от гибкости стержня λ и физико-механических свойств материала. Определяется экспериментально с учетом необходимого запаса устойчивости и приводится в справочниках.

Согласно выражению (8.21) можно выполнять три вида расчетов на устойчивость:

– проверочный расчет при заданных размерах сечения, нагрузке и материале стержня

; 8.22

– расчет допускаемой сжимающей нагрузки при заданном материале стержня и размерах сечения

; 8.23

– определение требуемых размеров сечения стержня при заданных нагрузке и материале стержня

. 8.24

Использование последнего неравенства затрудняется тем, что в него входят две неизвестные величины *A* и ϕ, которые нельзя выразить одну через другую. Поэтому подбор сечений приходится производить методом последовательных приближений. Задаются сначала некоторым среднетабличным значением ϕ (например, ϕ = 0,5). Затем определяют значения *A*, *Imin*, *imin*, λ и по таблицам находят соответствующее значение ϕ1. Полученное значение ϕ1 отличается от ϕ, тогда необходимо повторить расчет, задавшись новым значением . Расчет считается законченным, когда расхождение между принятым в начале очередного приближения значением ϕ и полученным табличным значением не больше 5%.

Расчеты показывают, что наиболее выгодными при работе стержней на сжатие являются кольцевые и коробчатые тонкостенные сечения, чем и объясняется их широкое применение в химическом машиностроении. Наименее выгодными являются прямоугольные сплошные сечения. Доказано, что замена сжатых стержней в виде уголков и двутавров трубчатыми стержнями дает экономию в материале до 20–40%.