УДК 62-50

И.К. Асмыкович, доц., к-т физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

О НЕКОТРЫХ ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

В математической теории управления линейными системами в основном предполагалось, что объект исследования описывается системой дифференциальных уравнений заданной в нормальной форме.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),$$
$$x(0) = x_0, \tag{1}$$

с выходом

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

где $x(t)$ – n-вектор состояния, $u(t)$ – r - вектор управляющих воздействий, y – m-вектор выхода или наблюдаемых координат, A, B, C – постоянные матрицы соответствующих размеров.

Ранее считалось, что для них все основные вопросы качественной теории управления рассмотрены и полностью решены в 60-90 годы двадцатого века [1,2]. Но позже выяснилось, что ряд стандартных задач, как-то задача стабилизации линейной системы обратной связью по выходу, задача робастной стабилизации, задача одновременной стабилизации набора систем являются невыпуклыми и NP-сложными. Это означает, что эффективных способов их решения нет и быть не может, если под эффективным понимать такой, который приводит к точному решению (если оно существует) с произвольной точностью за «разумное» время. В научных журналах стали регулярно появляться работы по управляемости, наблюдаемости, стабилизации обыкновенных линейных систем, новых методах их решения и новым задачам. Коллектив под руководством В.Н.Букова предложил новый метод решения матричных уравнений и на его основе рассмотрел многие задачи линейной теории управления, объединив эти результаты в монографии [3]. Показано, что при плохой обусловленности матрицы управляемости и большой размерности системы управления вычисление в прикладных пакетах ранга матрицы управляемости может приводить к ошибкам. К сожалению, предложенный способ требует резкого роста размеров применяемых матриц. Дальше эта же методика была предложена для модификации методов решения классических задач теории матриц, которые находят широкое применения в качественной теории управления линейными системами, в частности задачах модального управления, реконструкции и расщепимости.

Отметив, что множество устойчивых линейных систем невыпукло в пространстве параметров, авторы [1] ввели понятие сверхустойчивых линейных систем, определив это понятие не через собственные числа, а непосредственно через параметры системы. Такие системы, конечно, асимптотически устойчивы по Ляпунову, причем функции Ляпунова для них фиксированы, их решения обладают хорошими свойствами сходимости и для них многие задачи качественной теории управления, такие как синтез статической обратной связи по выходу, одновременная стабилизация, робастная стабилизация, подавление возмущений сводятся к задачам линейного программирования и имеют достаточно хорошее численное решение. Были изучены сверхустойчивые как непрерывные, так и дискретные системы, отмечено, что это свойство неинвариантно относительно преобразования координат, но при этом доказаны достаточные условия, при которых система в каком-то базисе является сверхустойчивой. Отмечено, что сверхустойчивые системы составляют весьма узкий подкласс устойчивых по Ляпунову систем, а для дискретных систем отмечен парадокс – переход от дискретного уравнения высокого порядка к системе приводит к потере сверхустойчивости.

При построении наблюдателей, особенно для линейных динамических систем с различными неопределенностями [1,2], важную роль имеют системы нулевой динамики. Для одновходных и одновыходных обыкновенных линейных систем это многообразие удается полностью описать, для многовыходных систем ситуация гораздо сложнее.

При разработке математических моделей экономических систем и технологических процессов на производстве, а также систем автоматического управления такими процессами необходимо учитывать, как дифференциальные, так и алгебраические связи в виде уравнений материального баланса в экономике, либо законов Киргофа в электротехнике, либо фондообразующих и нефондообразующих отраслей в экономической системе государства. Кроме того, часто необходимо принимать во внимание и эффекты последействия. Адекватной математической моделью таких процессов являются дескрипторные динамические системы с отклоняющимся аргументом. Такие системы называют либо вырожденными, либо сингулярными], либо системами неразрешенными относительно производной, либо системами с обобщенным пространством состояний, либо алгебро-дифференциальными, либо дескрипторными [2, 4, 5], причем последнее название превалирует.

При этом объект управления описывается обыкновенной дескрипторной системой

$$
\begin{aligned}
&H\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t),\\
&Hx(0) = Hx_0, \quad \det S = 0,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $x(t) - n$ - вектор, $u(t)$ - r -мерный вектор управления, который предполагается достаточно гладким, H, A, B - постоянные матрицы соответствующих размеров.

К настоящему времени наиболее подробно изучены регулярные системы вида (3), т.е. системы с регулярным пучком матриц $[\lambda H - A]$. Как известно [2,5], это означает, что матрица H квадратная и выполняется условие регулярности

$$
\det[\lambda H - A] \neq 0 \quad \textit{для} \quad \textit{некоторого} \quad \lambda
\tag{4}
$$

При выполнении условия (4) система (3) имеет единственное решение при достаточно гладких управлениях $u(t)$.

Для таких систем были изучены различные постановки задач управляемости и наблюдаемости, рассмотрены обобщения основных задач на управление по принципу обратной связи, задача о минимальных полях регулирования, изучена задача инвариантности выхода, или задача уничтожения действия возмущений на выход системы, которая весьма созвучна задаче о нулевой динамике [2]. При их рассмотрении была использована как теория регулярных и сингулярных пучков матриц, так и различные псевдообратные матрицы, в частности, обратные Драйзина, с помощью которых удается как выяснить структуру решения в регулярном случае, так и получить явные формулы для нахождения коэффициентов линейной обратной связи в задаче модального управления.

При изучении задач управления линейными дескрипторными системами по принципу обратной связи практический интерес представляет собой вопрос о существовании линейного регулятора, обеспечивающего регулярность вырожденной системе . Такая задача с помощью метода канонизации рассмотрена в [4].

Ясно, что если матрица H в дескрипторной системе (3) при производной невырождена, то система регулярна и может быть сведена к обыкновенной системе путем умножения на обратную матрицу.

Следует отметить, что методика канонизации матриц может быть применена к решению задач на управление по типу обратной связи для систем с отклоняющимся аргументом как регулярных, так и дескрипторных [2]. Но здесь возникают большие сложности, связанные с тем, что элементы переходных матриц для таких систем представляют собой не отношение полиномов, а отношения квазиполиномов, что существенно усложняет их анализ и синтез.

ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления. / Б.Т Поляк, П.С. Щербаков // Автоматика и телемеханика 2005, № 5, с.7-46.

2. Asmykovich Ivan K. On Finding Zero Dynamics for Descriptor Systems / I..K. Asmykovich // 2016 13TH International scientific technical conference on actual problems of electronic instrument engineering (APEIE) – Proceedings APEIE – 2016 In 12 Vol. V. 1 Part 3 Novosibirsk 2016 3-6 октября 2016 г. P.116 – 119.

3. Буков В.Н. Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. / В.Н. Буков // – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.

4. Асмыкович И.К. О регуляризации и нормализации линейных дескрипторных систем / И.К. Асмыкович // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов» материалы Международной научно-технической конференции 22-24 октября. 2015 г. Минск, БГТУ, 2015 С. 188 – 191

5. Mehrmann, Volker Descriptor systems: A general mathematical framework for modelling, simulation and control / Mehrmann Volker, Stykel Tatjana. *Automatisierungstechnik. 2006. 54, N 8, с. 405-415.*