$$T(x_v, y_v) = \Lambda(x)y_v - \Lambda(y)x_v - [x, y]_v$$

для всех $x, y \in \overline{g}$; тензор кривизны $R \in \mathrm{InvT}_3^1(V)$ имеет вид:

$$R(x_v, y_v) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$$

для всех $x, y \in \overline{g}$.

Алгеброй голономии связности $\Lambda : g \to gl(V)$ на паре ($\overline{g}$, g) называется подалгебра алгебры Ли $gl(V)$ вида:

$$V + [\Lambda(g), V] + [\Lambda(g), [\Lambda(g), V]] + \ldots,$$

где $V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in g\}$.

Полученный результат позволяет провести классификацию всех трехмерных изотропно-точных однородных пространств и локально однородных аффинных связностей на них. Предложенная методика также может быть использована для других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1 Онищик, А. Л. Топология транзитивных групп Ли преобразований / А. Л. Онищик. – М. : Физ. - мат. лит., 1995. – 344 с.

2 Кобаяси, Ш. Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – 344 с.

3 Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu. // Amer. Journ. Math. – 1954. – Vol. 76., № 1. – P. 33-65.

УДК 62-50

И К. Асмыкович, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

ИЗУЧЕНИЕ НУЛЕВОЙ ДИНАМИКИ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

Ранее считалось, что для них все основные вопросы качественной теории управления для линейных систем рассмотрены и решены в 70-80 годы двадцатого века. Но выяснилось, что ряд стандартных задач, как-то задача стабилизации линейной системы обратной связью по выходу, задача робастной стабилизации, задача одновременной стабилизации набора систем являются невыпуклыми и NP-сложными [1]. Это означает, что эффективных способов их решения нет и быть не может, если под эффективным понимать такой, который приводит к решению (если оно существует) с произвольной точностью за «разумное» время.

При построении наблюдателей, особенно для линейных динамических систем с различными неопределенностями [2]. Важную роль имеют системы нулевой динамики, т. е. многообразие, задаваемое уравнением $y(t) = Cx(t) = 0$. Для одновходных иодновыходных линейных систем это многообразие удается полностью описать, для многовыходных систем ситуация гораздо сложнее. Укажем некоторые результаты. Рассмотрим стандартную линейную систему

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0, \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t) \tag{2}$$

которую будем полагать полностью управляемой и наблюдаемой.

Под нулевой динамикой системы (1) полагают движение, принадлежащее многообразию $y(t) = Cx(t) = 0$. При описании нулевой динамики выделяют три задачи [2], т.е. определения уравнений нулевой динамики, спектра и размерности нулевой динамики, Для систем с одним входом и одним выходом, которые называют скалярными системами, получены ответы на все три вопроса.

Определение 1. **Относительным порядком скалярной системы (1), (2) называют натуральное число r для которого выполнены соотношения**

$$CB = 0, CAB = 0, ..., CA^{r-2}B = 0, \quad CA^{r-1}B \neq 0 \tag{3}$$

Для скалярной системы размерность нулевой динамики равна разности между размерностью системы и ее относительным порядком, характеристическим полиномом нулевой динамики является числитель переходной функции системы и спектром множество его корней. Задачу о нахождении уравнений нулевой динамики решают при помощи приведения системы к специальной форме [2] ,

$$\dot{x}' = A_{11}x' + A_{12}y_1 \quad \dot{y}_1 = y_2 \,, \dot{y}_2 = y_3 \,, ...$$

$$\dot{y}_{r-1} = y_r \,, \dot{y}_r = A_{21}x' + A_{22}y' + c'A^{r-1}bu \,, y = y_1 \,, \tag{4}$$

где $x' \in R^{n-r}$ - часть компонент фазового вектора, $y' = (y_1, y_2, ..., y_r)$ - вектор производных выхода y, пара (A_{11}, A_{12}) управляема, характеристический полином матрицы A_{11} равен числителю переходной функции и эта матрица определяет нулевую динамику системы.

Полученное управление в виде линейной обратной связи подставляют в исходную систему и совместно с условиями связи получают уравнение нулевой динамики.

Понятие нулевой динамики можно связать с задачей модального управления обратной связью по выходу. Известно, что для полностью управляемой и для полностью наблюдаемой скалярной системы (1), (2) с помощью регулятора $u = qy$ в спектре замкнутой системы можно получить любое наперед заданное число за исключением не более чем n–1 недостижимого значения. Оказывается, что для того, чтобы недостижимые значения отсутствовали необходимо и достаточно, чтобы относительный порядок скалярной системы был равен $n-1$, т.е. порядок нулевой динамики был равен 1. В общем случае скалярная система имеет не более, чем $k-1$ недостижимое собственное значение, где k – порядок нулевой динамики.

Покажем на примере, что получение уравнений нулевой динамики упрощается при приведении системы к канонической управляемой или канонической наблюдаемой форме.

Рассмотрим скалярную систему (1), (2) с матрицами

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Она является полностью управляемой и полностью наблюдаемой с относительным порядком равным 2 и характеристическим полиномом

$$\phi(\lambda)=\det(\lambda E-A)=\lambda^3+\lambda^2-4\lambda-1=0$$

Ее уравнение нулевой динамики имеет вид $\dot{x}_1=-2x_1$. Для перехода к канонической управляемой форме используем замену переменной $x(t)=Dw(t)$, где D - модифицированная матрица управляемости. Получим систему

$$\dot{w}(t)=\bar{A}w(t)+\bar{b}u(t),$$
$$y(t)=\bar{c}w(t)$$

с матрицами

$$\bar{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 4 & -1\end{bmatrix},\quad \bar{b}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix},\quad \bar{c}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

Для нее $\bar{c}\bar{b}=0,\quad \bar{c}\bar{A}\bar{b}\neq 0,$ т. е. относительный порядок равен 2. Тогда, вычислив эквивалентное управление и уравнения связи, получим, что уравнение нулевой динамики имеет вид $\dot{w}_3=-2w_3$.. Рассмотрим ту же систему с относительный порядок равным 1, то есть возьмем входной вектор в виде $b=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}$. Здесь $cb=1$. Тогда эквивалентное управление найдем из уравнения $\dot{y}=\dot{x}_2=x_3+u=0,\quad т.е.\quad u=-x_3$ и, учитывая уравнение связи, получим, что уравнение нулевой динамики имеет вид $\dot{x}_1+2\dot{x}_1-x_1=0.$

Приведем данную систему к канонической управляемой форме, для чего выполним преобразование координат по формуле

$x(t) = Dz(t)$, где $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Тогда получим систему в виде $\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \bar{A}z(t) + \bar{b}u(t), \\ y(t) &= \bar{c}z(t) \end{aligned}$ с матрицами

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

В этой ситуации эквивалентное управление имеет вид $u = -z_3 - 3z_2 - z_1$ и тогда уравнение нулевой динамики $\dot{z}_3 = -2\dot{z}_3 + z_3$.

В качественной теории управления динамическими системами в последние десятилетия большой популярностью пользуются линейные дескрипторные системы, или, в другой терминологии, алгебро-дифференциальные системы. Для таких систем были изучены различные постановки задач управляемости и наблюдаемости, изучена задача инвариантности выхода, или задача уничтожения действия возмущений на выход системы, которая весьма созвучна задаче о нулевой динамике.

Пусть объект управления описывается линейной непрерывной дескрипторной системой

$$\begin{aligned} &S\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ &Sx(0) = Sx_0, \quad \det S = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

с условием регулярности

$$\det[\lambda S - A] \neq 0 \tag{6}$$

и выходом $y(t) = Cx(t)$. (7)

Условие (6) обеспечивает существование и единственность решения (5) при достаточно гладких управляющих функциях $u(t)$. Рассмотрим для этой системы основные задачи о нулевой динамике. Пусть система является скалярной, т.е. $B = b$, $C = c$. Используя приведение регулярного пучка $\lambda S - A$ к канонической форме Вейерштрасса, можно привести систему (6-8) к виду

$$\dot{x}_v(t) = Lx_v(t) + b_1u(t) \tag{8}$$

$$N\dot{x}_w(t) = x_w(t) + b_2u(t) \tag{9}$$

$$y(t) = c_1x_v(t) + c_2x_w(t), \tag{10}$$

который называется первой эквивалентной формой (EF1). При этом задача о нулевой динамике дескрипторной системы для подсистемы (8) сводится к ранее полученным результатам, а для (9) используя формулу решения $x_w(t) = -\sum_{j=0}^{v-1} N^j B_2 u^j(t)$ при получении эквивалентного управления получаем дифференциальное уравнение $c_1 L x_1(t) + c_1 b u(t) - c_2 N b_2 \dot{u}(t) - b_2 u(t) = 0$, если индекс нильпотентности матрицы системы равен двум. В общем случае будем иметь линейное дифференциальное уравнение порядка на единицу меньше, чем индекс нильпотентности матрицы N. Подставляя решение этого уравнения в исходную систему и, учитывая уравнения связи, мы получим уравнение нулевой динамики. При этом будет определен как порядок нулевой динамики, так и ее спектр. Для дескрипторных систем со многими входами и многими выходами задача нахождения нулевой динамики существенно усложняется, так как неоднозначным становится определение относительного порядка системы.

ЛИТЕРАТУРА

1 Поляк, Б.Т. Трудные задачи линейной теории управления. / Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков // Автоматика и телемеханика. – 2005. № 5. – С.7-46.

2 Коровин, С. К. Наблюдатели состояния для линейных систем с неопределенностью / С. К. Коровин, В. В. Фомичев. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 224 с.

УДК 517.929

Т. Б. Копейкина, доц., канд. физ.-мат. наук (БГТУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ СУЩЕСТВЕННО РАЗНОТЕМПОВЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Хорошо известно, что многие задачи гидродинамики, химической кинетики, динамики полета, автоматического управления и регулирования описываются разнотемповымисингулярно возмущенными системами (РСВС) дифференциальных уравнений, в которые малый параметр μ с различными степенями входит в качестве множителей при производных в уравнения соответствующих задач. Проблема управляемости РСВС с постоянными коэффициентами впервые была рассмотрена в работе [1], где достаточные условия полной управляемости получены на основе разложения пространства состояний системы в прямую сумму подпространств меньшей размерности. В работе автора [2] исследование полнойи различных видов относительной