УДК 62-50

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ ВПОЛНЕ-РЕГУЛЯРНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

И.К. Асмыкович
(БГТУ, г.Минск)

В качественной теории управления динамическими системами одним из наиболее развитых разделов является теория управления линейными системами, математическая модель которых обычно записывается в виде нормальной системы дифференциальных уравнений, разрешенных относительно первой производной. Но при практическом составлении математической модели реальной системы управления помимо дифференциальных связей могут присутствовать алгебраические связи, например, в виде балансовых соотношений в экономических моделях [2], либо в виде определенных равенств в теории электрических цепей [3], и тогда матрица при первой производной будет либо вырожденной [3], либо, вообще, прямоугольной. Такие системы в последнее время обычно называют дескрипторными [1], или вырожденными [3]. Их теория активно развивается в течении последних двух десятилетий и к настоящему времени библиография насчитывает более тысячи работ. Но изучение дескрипторных систем с запаздыванием пока только начинается. (подробнее см. в [1]).

Для дескрипторных систем существенную сложность представляет постановка задачи Коши, так как не при всех начальных условиях решение существует и не всегда оно единственно. Особенно это важно для систем с отклоняющимся аргументом, где решение является бесконечномерным.

При записи решений дескрипторных систем используются либо теория сингулярных пучков матриц [1,7,8], либо различные виды псевдообратных матриц [1,4]. В докладе проводится попытка записать решение через двойственную систему путем сведения дескрипторной системы в тех случаях, когда это возможно к гибридной системе [5,6] при использовании аналога второй канонической формы Даи [9].

Пусть объект управления описывается линейной стационарной дескрипторной системой с запаздыванием

$$S\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t), t \geq 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$Sx(+0) = Sx_0, \quad A_1x(\nu) = A_1\varphi(\nu), \ \nu \in [-h,0) \tag{2}$$

где $u(t)$ - r-мерный вектор управления, который предполагается достаточно гладким,. $S, A, A_1 \in R^{n\times n}$, $B \in R^{n\times m}$, $\det S = 0$, $rankB = m$,

Систему (1) будем полагать вполне-регулярной [5], т.е.

$$\det\left(sS - A - \lambda A_1\right) \not\equiv 0, \ s, \lambda \in C. \tag{3}$$

Выполнение условия (3) гарантирует при совместимых начальных условиях существование и единственность решения системы (1), (2).

По аналогии с [8] выполним преобразование в системе (1).

Пусть $x(t)$ - n-вектор, $u(t)$ - r-вектор, $rankS = m < n$. Известно, что для матрицы S существуют невырожденные матрицы T и G, такие, что имеет место декомпозиция

$$TSG = \begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Для выполнения преобразования умножим систему (1) на матрицу T и выполним замену $x(t) = Gz(t)$. Получим

$$TSG\dot{z}(t) = TAGz(t) + TDGz(t-h) + TBu(t)$$

Представим вектор

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

и, учитывая (4), получим по аналогии с [8].

$$\begin{bmatrix} E_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\dot{z}(t) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}z(t) + \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{pmatrix}z(t-h) + \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}u(t)$$

или

$$x(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + D_{11}x(t-h) + D_{12}y(t-h) + B_1u(t)$$

$$0 = A_{21}x(t) + A_{22}y(t) + D_{21}x(t-h) + D_{22}y(t-h) + B_2u(t)$$

Предположив, что

$$\det A_{22} \neq 0\,, \tag{5}$$

получим гибридную систему

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + D_{11}x(t-h) + D_{12}y(t-h) + B_1u(t) \\ y(t) = -A_{22}^{-1}A_{21}x(t) - A_{22}^{-1}D_{21}x(t-h) - A_{22}^{-1}D_{22}y(t-h) - A_{22}^{-1}B_2u(t) \end{cases}$$

для которой, используя технику развитую в работах [5,6] можно выписать решение в явном виде. Если условие (5) не выполняется, то вновь используем декомпозицию (4) и получаем гибридную систему со многими запаздываниями, для которой также можно в явном виде выписать решение через решение соответствующих двойственных систем

Опишем, вкратце, технику получения двойственных систем для гибридных систем. Пусть имеется система

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + D_{11}x(t-h) + D_{12}y(t-h) + B_1u(t) \\ y(t) = \widetilde{A}_{21}x(t) + \widetilde{D}_{21}x(t-h) + \widetilde{D}_{22}y(t-h) + B_2u(t) \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $x^*(t)$ и второе на $y^*(t)$. Проинтегрируем их от 0 до t_x и сложим их. Получим

$$\int_0^{t_*}\frac{d}{dt}\left(x^*(t)x(t)\right)dt = \int_0^{t}\dot{x}^*(t)x(t) + x^*\left(A_{11}x(t) + A_{12}y(t) + D_{11}x(t-h) +\right.$$
$$\left.+ D_{12}y(t-h) + B_{11}u(t)\right)dt$$

Для второго уравнения

$$\int_0^{t_*}y^*(t)\left(y(t) - \widetilde{A}_{21}x(t) - \widetilde{D}_{21}x(t-h) - \widetilde{D}_{22}y(t-h) - B_2u(t)\right)dt = 0\,.$$

В сумме имеем

$$\int_0^{t_*}\left(\dot{x}^*(t) + x^*(t)A_{11}\right)x(t) + \int_0^{t_*}\left(x^*(t)A_{12} + y^*(t)\right)y(t)dt + \int_0^{t_*}\left(x^*(t)D_{11} - y^*(t)\widetilde{D}_{21}\right)x(t-h)dt +$$
$$+ \int_0^{t_*}\left(x^*(t)D_{12} - y^*(t)\widetilde{D}_{22}\right)y(t-h)dt + \int_0^{t_*}\left(x^*(t)B_1 - y^*(t)B_2\right)dt. \tag{6}$$

Преобразуем интегралы, содержащие слагаемые с запаздыванием

$$\int_0^{t_*}\left(x^*(t)D_{11}-y^*(t)\widetilde{D}_{21}\right)x(t-h)dt=\begin{bmatrix} t-h=\tau \\ dt=d\tau \end{bmatrix}=\int_{-h}^{t_*-h}\left(x^*(\tau+h)D_{11}-y^*(\tau+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-h}^{0}\left(x^*(t+h)D_{11}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(t)dt+\int_0^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{11}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(t)dt-\int_{t_*-h}^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{11}-\right.$$

$$\left.-y^*(t+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(\tau)d\tau$$

$$\int_0^{t_*}\left(x^*(t)D_{12}-y^*(t)\widetilde{D}_{22}\right)y(t-h)dt=\int_{-h}^{0}\left(x^*(t+h)D_{12}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{22}\right)y(t)dt+\int_0^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{12}-\right.$$

$$\left.-y^*(t+h)\widetilde{D}_{22}\right)y(t)dt-\int_{t_*-h}^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{12}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{22}\right)x(t)dt$$

Подставив эти выражения в (6), имеем

$$\int_0^{t_*}\left(\dot{x}^*(t)+x^*(t)A_{11}+x^*(t+h)D_{11}-y^*(t+h)D_{21}\right)x(t)dt+\int_0^{t_*}\left(x^*(t)A_{12}+y^*(t)+x^*(t+h)D_{12}-\right.$$

$$\left.-y^*(t+h)D_{22}\right)y(t)dt+\int_{-h}^{0}\left(x^*(t+h)D_{11}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(t)dt+\int_{-h}^{0}\left(x^*(t+h)D_{12}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{22}\right)y(t)dt-$$

$$-\int_{t_*-h}^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{11}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{21}\right)x(t)dt-\int_{t_*-h}^{t_*}\left(x^*(t+h)D_{12}-y^*(t+h)\widetilde{D}_{22}\right)y(t)dt+\int_0^{t_*}\left(x^*(t)B_{11}-\right.$$

$$\left.-y^*(t)B_2\right)u(t)dt$$

Далее вводим двойственную систему

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= -A_{11}^{\prime}x^*(t)-D_{11}^{\prime}x^*(t+h)+D_{21}^{\prime}y^*(t+h) \\ y^*(t) &= -A_{21}^{\prime}x^*(t)-D_{21}^{\prime}x^*(t+h)+D_{22}^{\prime}y^*(t+h) \end{aligned}$$

с выходом

$$w(t)=B_1^{\prime}x^*(t)-B_2^{\prime}y^*(t)$$

и записываем решение по методике [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмыкович И.К. О задачах качественной теории управления для дескрипторных систем с запаздыванием // Труды БГТУ. Физико-мат. науки и информатика. - Минск, 1997.-С.3-14.

2. Кантарович Л.В., Макаров В.Л. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики // Сиб. мат. журн. - 1970. № 5. - С.1046-1069.

3. Руткас А.Г. Признаки разрешимости и устойчивости решений вырожденных уравнений и приложения // Тезисы докладов Международной научной конференции «Шості Боголюбовскі

читання». Киев, 2003. С.199.

4. Крахотко В.В., Размыслович Г.М. Линейные сингулярные системы с запаздыванием // Вестн. БГУ. Сер.I.- 1988.- №2. - С.76-77.

5. Марченко В.М. Вполне регулярные системы с последействием // Труды Института математики. 2001. №7.

6. Марченко В.М., Поддубная О.Н. Представление решений управляемых гибридных систем // Проблемы управления и информатики. Киев, 2002. № 6. С. 17-25

7. Campbell S.L. Singular systems of differential equations with delays //Applicable analysis.-1980.- Vol.11, № 2.-P.129-136.

8. Li Y., Liu Y. Basic theory of singular systems of linear differential difference equations // Preprints of the 13th World Congress IFAC 30th June-5th Jule 1996, San Francisco, USA. P. 79-84.

9. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences. Berlin, Springer-Verlag, 1989. Vol. 118.

УДК 681.3

ВЫЧИСЛЕНИЕ КРИТИЧЕСКИХ ДЛИН В ЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ

И.Ф. Соловьева
(БГТУ, г.Минск)

Рассмотрим линейную граничную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(t)y_1 + a_{12}(t)y_2 + f_1(t), \\ y_2' = a_{21}(t)y_1 + a_{22}(t)y_2 + f_2(t), \end{cases} \quad (1)$$

с граничными условиями вида:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(0) + \beta_1 y_2(0) = \gamma_1, & \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(x) + \beta_2 y_2(x) = \gamma_2, & \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \quad (2)$$

где $0 \le t \le x$ и $x>0$ – правая подвижная граница отрезка интегрирования.

Обозначим через $z(t)$ фундаментальную матрицу для системы уравнений (1). Легко показать, что задача (1,2) имеет единственное решение для $\forall x$, если выполняется условие

$$D(x) = \alpha_1(z_{12}(x)\alpha_2 + z_{22}(x)\beta_2) - \beta_1(z_{11}(x)\alpha_2 + z_{21}(x)\beta_2) \neq 0, \quad (3)$$