9. Забелло Л.Е. Методы решения вырожденных задач оптимального управления для динамических систем с запаздыванием. - Автореф. дис… доктора физ.-мат. наук: 01. 01. 11. – Ленинград, 1991.
10. Минюк С.А. Исследование некоторых задач управления и наблюдения динамических систем. - Автореф. дис. доктора физ.-мат. наук: 01. 01. 02. – Минск, 1992.
11. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов. - Автоматика и телемеханика, 1972, №9. - С.31-62.
12. Беллман Р., Кук К.Л. Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967.

УДК 517.977.1

И.К Асмыкович, доцент

ДОСТИЖИМОСТЬ , НАБЛЮДАЕМОСТЬ И МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В СИСТЕМАХ НАД КОММУТАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ (КРАТКИЙ ОБЗОР)

An elementary presentation is given of some the main motivation and known results on linear systems over rings , including questions of pole assignment and control . The analogies and differences with the more standard case of systems over fields are emphasized throughout.

При изучении линейных систем управления, как непрерывных, так и дискретных, было выяснено, что их основные свойства определяются тройкой матриц (F, G, H), элементы которых не обязательно принадлежат полю действительных чисел , и , вообще, не обязательно полю.

Первые исследования линейных систем, когда элементы выбираются из коммутативного кольца, были проведены, по-видимому, в работе [8]. Калман показал, что результаты по реализации линейных систем над произвольным полем без особых изменений переносятся на системы над коммутативными неттеровыми кольцами .

Многочисленные практические приложения вызывают необходимость изучения линейных систем над произвольными кольцами.

Рассмотрим конкретный пример системы с запаздыванием [3]

$$\dot{x}_1(t) = 2x_1(t-1) + x_1(t) + x_2(t) + u(t)\ ,$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t-1) - 3x_2(t-5) + u(t-1)\ ,$$

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t-1)$$

Введя запаздывающий оператор

$$\sigma x(t) = x(t-1)\ ,$$

систему перепишем в виде

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sigma+1 & 1 \\ \sigma & -3\sigma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ \sigma \end{bmatrix} u$$

$$y = [1-\sigma] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Эта система может рассматриваться как обыкновенная конечномерная линейная система над кольцом многочленов $R(\sigma)$.

Аналогично записывают линейные системы нейтрального типа [7].

Если запаздывания в исходной системе кратны друг другу, то её можно записать как систему над кольцом многочленов от одной переменной. В случае несоизмеримых запаздываний приходится рассматривать системы над кольцом многочленов от многих переменных $R[\sigma_1,...,\sigma_r]$.

При изучении теории цепей и передаточных линий некоторые авторы рассматривали вместо кольца $R[\sigma_1,...,\sigma_r]$ поле рациональных функций от $\sigma_1,...,\sigma_r$, вводя в рассмотрение физически не реализуемый предсказатель

$$\sigma^{-1}x(t) = x(t+1)$$

Линейные системы в теории кодирования имеют в качестве коэффициентов элементы конечных полей, и их можно рассматривать как системы над кольцом целых чисел Z. Аналогичная ситуация имеет место в [3] в теории автоматов. Даже уравнения в частных производных могут быть записаны как линейные системы над кольцом $R[\sigma,\sigma^{-1}]$.

Обычно в качестве примеров линейных дискретных систем над кольцами рассматриваются системы над кольцом целых чисел, а в качестве непрерывных систем – системы с запаздыванием. При этом следует отметить, что есть важное отличие систем с запаздыванием от систем над абстрактными кольцами, которое состоит в том, что только элементы матриц лежат в кольце полиномов, а состояние системы управления и её выход лежат в функциональном пространстве.

Приведены некоторые результаты теории систем над коммутативными кольцами [4]. Вначале напомним классические результаты.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx(t)}{dt} = Fx(t) + Gu(t), \ x(t_0) = x_0 \\ y(t) = Hx(t), \end{cases} \qquad (2)$$

где x - n-вектор, $u - m -$ вектор, $y - p -$ вектор, которую будем обозначать как тройку (H, F, G).

Систему (2) назовём достижимой (reachable), если для заданного начального состояния $x(t_0)=x_0$ и любого конечного состояния $x_1\in R^n$, $\exists t_1>t_0$ и управление $u(t)$, $t_0\le t\le t_1$ такие, что $x(t_0,t_1,u(t))=x_1$.

Классическая теорема достижимости. Пусть (H,F,G) n-мерная система над полем F. Тогда следующие утверждения эквивалентны

1. (H, F, G) – достижима;
2. $G'e^{Fs}x=0$ для $0\le s\le t, t>0\Rightarrow x=0;$
3. $G'(F)^j x=0,\ \forall j\ge 0\Rightarrow x=0.$
4. Отображение $L_r=|R^{nm}\to R^n$, определённое через

$L_r\left[G\vdots FG\vdots\ldots\vdots F^{n-1}G\right]$

сюрьективно.

5. $rank\ L_2=rank\left[G\vdots FG\vdots\ldots\vdots F^{n-1}G\right]=n$

Систему (2) назовём наблюдаемой (observable), если $t_0=0$ и по данным $u(t)$ и $y_u(t)$ для $t\ge 0$ можно однозначно определить $x(0)$.

Классическая теорема наблюдаемости. Следующие утверждения эквивалентны

1) (H,F,G) наблюдаема.

2) $He^{Fs}x=0$ для $0\le s\le t, t>0\Rightarrow x=0;$

3) $HF^j x=0\quad \forall i\ge 0\Rightarrow x=0,$

4) отображение $L_0:|R^n\to|R^{pn}$, определённое через

$$L_0=\begin{bmatrix} H\\ HF\\ \vdots\\ HF^{n-1}\end{bmatrix}$$

является инъективным

5) $rankL_0=n$.

Определения достижимости и наблюдаемости взаимосвязаны, т.е. справедлива теорема.

Классическая теорема двойственности. Система (H,F,G) наблюдаема тогда и только тогда, когда двойственная система (H',F',G') достижима, где двойственная система есть

$$\begin{cases} z'=F'z(t)+H'u(t),\\ w(t)=G'z(t).\end{cases}$$

Теперь пусть (H,F,G) -n-мерная система над коммутативным кольцом R. Для каждого i $F^iG - R$ – линейное отображение из R^m в R^n. Пусть отображение ρ определяется как прямая сумма

$$\rho = \sum_{i=0}^{\infty} F^i G,$$

и его матричное представление $[G \vdots FG \vdots F^2G,..]$.

Систему (H,F,G) назовём достижимой, если и только если ρ-сюрьективно. Справедлива.

Теорема 1. Пусть (H,F,G) система над коммутативным кольцом R. Следующие утверждения эквивалентны:

1) (H,F,G) - достижима.

2) Столбцы $[G \vdots FG \vdots F^2G...]$ порождают R^n.

3) Столбцы $A = [G \vdots FG \vdots F^2G \vdots ... \vdots F^{n-1}G]$ порождают R^n.

Если Φ обозначим отображение R^{mn} в R^n за данное умножением на A, то (1)–(3) эквивалентны следующим утверждениям.

4) Сужение отображения Φ на каждый максимальный идеал в R сюрьективно .

5) Идеал $I_n(A)$, порождённый любым невырожденным $(n \times n)$ минором A, равен R.

Рассмотрим R-гомоморфизм

$$\tau \mid R^n \to \prod_{i=0}^{\infty} R^P,$$

определенный через $\tau(x) = (Hx \vdots HFx \vdots HF^2x \vdots ...)$. Мы скажем, что система (H,F,G) наблюдаема, если отображение τ инъективно.

Справедлива.

Теорема 2.

1. Система (H,F,G) наблюдаема.
2. R-гомоморфизм

$$\tau_n \mid R^n \to \prod_{i=0}^{n=1} R^P,$$

заданный $\tau_n(x) = (Hx \vdots HFx \vdots ... \vdots HF^{n-1}x)$, инъективен.

3. Пусть $B = [H' \vdots F'H' \vdots ... \vdots (F')^{n-1}H']$. Если $I_n(B)$ - идеал в R, порожденный $(n \times n)$ минором из B, тогда анниглятор для $I_n(B)$ есть ноль.

Для получения общего утверждения двойственности необходимо следующее предложение.

Лемма. Пусть R-коммутативное кольцо с полным кольцом частных T и (H,F,G)-система над R. Тогда (H,F,G) наблюдаема над R в том и только в том случае, когда она наблюдаема над T.

Теорема 3. (Принцип двойственности) Пусть R-неттерово кольцо с кольцом частных T и (H,F,G) -n-мерная система над R. Положим $B=[H'\vdots F'H'\vdots\ldots\vdots(F')^{n-1}H']$. Тогда эквивалентны утверждения.

1. Система (H,F,G) наблюдаема над R.
2. Идеал $I_n(B)$ порожденный $(n\times n)$ минором из B, содержит хотя бы один элемент , который не является делителем нуля.
3. Двойственная система (H',F',G') достижима над T.

Таким образом, если R-неттерово кольцо, которое совпадает со своим кольцом частных, тогда система (H,F,G) достижима (наблюдаема) , тогда и только тогда, когда двойственная система (H',F',G') наблюдаема (достижима).

Распределение полюсов и стабилизация.

Предположим, что (H,F,G) достижимая система над коммутативным кольцом R..
Если $r_1,\ldots,r_n\in R$, то основной вопрос теории линейной обратной связи: существует ли матрица K такая, что характеристический полином матрицы $F-GK$ есть $(x-r_1)\ldots(x-r_n)$. В этом случае система называется системой с произвольным распределением полюсов (pole assignable). Если в кольце R все достижимые системы обладают таким свойством, то говорят , что кольцо обладает свойством распределения полюсов.

Если для достижимой системы (H,F,G) существует матрица K, такая, что характеристический полином $F-GK$ есть $a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+x^n$, где $(a_0,a_1,\ldots a_n)$- произвольные, то в системе можно произвольно распределить коэффициенты. Если все достижимые системы над кольцом R допускают произвольное распределение коэффициентов, то говорят, что кольцо R обладает свойством распределения коэффициентов.

Очевидно, что если R обладает свойством произвольного распределения коэффициентов, то оно обладает и свойством произвольного распределения полюсов.

Теорема 4. Если система (F,G) распределяема по полюсам , то она и достижима над коммутативным кольцом R.

Далее мы покажем, что существуют кольца R, где система достижима , но не распределяема полюсами.

Вектор v назовем цикличным для F, если множество $v,Fv,\ldots,F^{n-1}v$ образует базис в $\mathbb{R}^n$.Для линейных систем имеет место

Теорема 5. Пусть (F,g) система над R и f -характеристический полином матрицы F. Следующие предложения эквивалентны
1) Система (F,g) достижима.
2) Вектор g цикличен для F.
3) Матрица $[g\vdots Fg\vdots\ldots\vdots F^{n-1}g]^{-1}F[g\vdots\ldots\vdots F^{n-1}g]$ является сопровождающей матрицей $\tilde{F}$ для f.
4) Система (F,g) обладает свойством произвольного распределения коэффициентов.
5) Система (F,g) распределяема по полюсам.

Многовходный случай часто удаётся свести к одновходному с помощью аналога леммы Уонэма [15]. В этом случае справедлива.

Теорема 6. Если для системы (F,G) существует матрица L:, такая, что матрица $F-GL$ имеет циклический вектор $g = Gu$ для некоторого $u \in R^m$, то система (F,G) обладает свойством произвольного распределения коэффициентов . Если каждая достижимая система над R обладает этим свойством , то R обладает свойством распределения коэффициентов.

Эта теорема используется для широкого класса колец [10,12,14], например, для полей и почти квази-локальных колец (колец, имеющих только конечное число максимальных идеалов). Однако, как мы дальше увидим, она не применима ни к кольцу целых чисел , ни к кольцу полиномов одной переменной над полем действительных чисел, хотя можно доказать, что в этих кольцах можно распределять полюса.

Кольцо R имеет свойство цикличности по ЛОСС если $\forall$ достижимой системы $(F,G)\exists K$ и u: такие, что Gu-циклический вектор для $F-GK$. Отметим несколько классов таких колец .

Лемма 1. Поле обладает свойством цикличности по ЛОСС.

Лемма 2. Если $R\alpha$-набор колец, имеющих свойство цикличности по ЛОСС, то их прямое произведение также имеет это свойство.

Лемма 3. Пусть R-кольцо с радикалом Jacobsona J.
Тогда R/J имеет свойство цикличности по ЛОСС, тогда и только тогда, когда кольцо R обладает этим свойством.

Из этих утверждений вытекает следующий вывод.

Теорема 7. Пусть R- кольцо , имеющее только конечное число максимальных идеалов. Тогда R обладает свойством цикличности по ЛОСС и свойством распределения коэффициентов.

Теорема 8. Если коммутативное кольцо R имеет свойство цикличности по ЛОСС, тогда для $a,b \in R$, $(a,b)=R$, существует $c,d \in R$, причем d -единица так, что $bc^2 = d(\mathrm{mod}\, a)$.

На основании теоремы 7 можно показать [14], что ни $R[x]$, ни Z не имеют свойства цикличности по ЛОСС.

Вопрос об обладании этим свойством $C[x]$ остается открытым. Дальнейшее исследование линейных систем над коммутативными кольцами касается выделения типов колец , которые обладают свойствами цикличности по ЛОСС, выяснение вопроса о возможности модального управления в системах с неполной информацией при помощи динамического регулятора , а также проблем построения канонических форм.

Отметим, что задача модального управления для систем над коммутативным кольцом в смысле определения распределения коэффициентов в применении к системам с запаздыванием эквивалентна в каком-то смысле задаче управления "цепочками корней".

ЛИТЕРАТУРА

1. Калман Р., Фалб П., Арбиб М. Очерки по математической теории систем. - М.: Мир: – 1971.
2. Dai L. Singular Control Systems . Lecture Notes in Control and information Sciences , Vol.118. - Berlin , Springer - Verlag , 1989.
3. Sontag E.D. Linear systems over commutative rings : A survey // Ricerche di Automatica , vol . , 7 , 1976 . - №1. - P. 1 - 34.
4. Brewer J.W. , Bunce J.W. , Van Vleck F. Linear systems over commutative rings // New York ; Basel : Marcel Dekker , 1986.
5. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems // Automatica , 1976, v.12 , № 5. - P. 529 -531.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц . - М.: Наука , 1976.
7. Spong M.W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circ. Systems Sing. Proc.-1986.-Vol.5, № 1. - P.69-85
8. Rouchaleau V., Wyman B.F., Kalman R.E. Algebraic structure of linear dynamical systems . III . Realization theory over a commutative rings // Proc . Nat .Acad . Sci . USA . - vol . 69, 1972 . - № 11 . - P.3404 - 3406.
9. Brewer J.W., Klinger L, and Schmale W., Feedback stabilizibility over commutative rings // Linear algebra for control theory / Paul van Dooren, B. Wyman ed. / (The IMA volumes in mathematics and its applications; v.62).- Springer – Verlag. – 1994. – P. 31 – 42.
10. Chen W.D. Systems theory over quasi – field // Annu Rev. Autom. Program. (1985) v.12. - P. 143 – 146.
11. Kamen E., On an algebraic systems theory of systems defined by convolution operator, Math. Systems Theory 9 (1975), 57 – 74.
12. Kamen E.W., Linear systems over rings: from R.E.Kalman to the present, in Mathematical Systems Theory – The Influence of R.E.Kalman, A.C.Antoulas (Ed.), Springer – Verlag, Berlin (1991).- P. 311 – 324.

13. Kamen E.W., The block form of linear systems over commutative ring with applications to control // Linear algebra for control theory / Paul van Dooren, B. Wyman ed. / (The IMA volumes in mathematics and its applications; v.62).- Springer – Verlag. – 1994. – P. 103 – 116.
14. Tannenbaum A., Polynomial rings over arbitrary fields in two or more variables are not pole assignable, Systems and Control Letter 2, 1982).- P. 222–224.
15. Wonham W., On pole assignment in multi – input controllable linear systems, IEEE Trans. Automatic Control AC – 12 (1967).-P. 660 – 665.

УДК 518.5

А.А. Лялько, аспирант

РОБАСТНОЕ ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СТОХАСТИЧЕСКИХ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ МОДЕЛЕЙ

The robust parameter estimation for of autoregressive model which takes into account errors of observation is considered. Iterative algorithms for robust parameter estimation are proposed.

Для оценивания параметров моделей динамических объектов часто используют метод максимального правдоподобия. Этот метод обладает свойствами универсальности, позволяя при достаточно общих предположениях получать эффективные или асимптотически эффективные оценки, однако он чувствителен к возмущающим факторам, имеющим место при функционировании объекта

В связи с этим целесообразно наделить алгоритм оценивания параметров робастными свойствами [1-3].

Рассмотрим модель динамического объекта на основе авторегрессионной модели и уравнения наблюдения:

$$y(n) = \sum_{m=1}^{M} a_m y(n-m) + e(n); \tag{1}$$

$$z(n) = y(n), \tag{2}$$

где $y(n)$- переменная состояния объекта; $z(n)$- наблюдаемая величина; $e(n)$- случайная ошибка (возмущение объекта) измерения; m=[1 M],a_m - неизвестные коэффициенты авторегрессии; n=0,1,...- дискретное время; M-параметр, характеризующий порядок модели [4 ,5].

Представим систему (1) ,(2) в матричном виде:

$$\mathrm{y} = \mathrm{YA} + \mathrm{E}; \tag{3}$$

$$\mathrm{Z} = \mathrm{y}, \tag{4}$$