МАТЕМАТИКА

УДК 62-50

И.К. Асмыкович

Белорусский государственный технологический университет

ИМПУЛЬСНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Описаны возможности приведения обыкновенных регулярных дескрипторных систем к трем видам канонических форм и приведены достаточные условия импульсной управляемости. Аналогичные задачи изучены для вполне-регулярных систем с запаздыванием.

В качественной теории управления в последние десятилетия большой популярностью пользуются дескрипторные системы [1], т.е. объекты управления, описываемые системами дифференциальных уравнений, у которых матрица при производной вырождена:

$$S\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), Sx(0) = Sx_0 \quad t > 0 \quad \det S = 0\,. \tag{1}$$

Дескрипторные системы регулярно возникают при анализе линейных электрических цепей. Это связано с тем, что законы Кирхгофа определяют как дифференциальные, так и алгебраические связи между токами и напряжениями. Теория электрических цепей позволяет строить примеры конкретных схем, представление которых в пространстве переходных функций соответствует конкретным блокам в канонической форме Кронеккера регулярного пучка матриц. В частности, развита теория дескрипторных систем с точки зрения пространства переходных функций Розенброка и рассмотрены конкретные электрические цепи [8].

Для дескрипторных систем изучены различные постановки и критерии разрешимости задач управляемости и наблюдаемости [1], причем обычно рассматриваются регулярные системы, т.е. при выполнении условия

$$\det|A + \lambda S| \text{ не равен тождественно нулю.} \tag{2}$$

При выполнении этого условия пучок матриц $\alpha S - A$ можно привести к канонической форме Вейерштрасса, что для системы (1) означает существование невырожденных матриц P и Q таких, что умножение системы (1) на матрицу Q и замена переменных $\bar{x} = Px$ приводит систему к виду

$$\dot{x}_v(t) = Lx_v(t) + B_v u(t), \tag{3}$$

$$N\dot{x}_w(t) = x_w(t) + B_w u(t), \tag{4}$$

которую называют стандартной канонической формой дескрипторной системы. При этом систему (3) размерности n_1 обычно называют подсистемой медленных движений, а систему (4) размерности n_2 - подсистемой быстрых движений, или импульсной подсистемой.

Здесь N - матрица с индексом нильпотентности h, т.е. $N^h = 0, N^{h-1} \neq 0$.

В книге L. Dai [2] представление (3), (4) называют первой эквивалентной формой (EF1) дескрипторной системы.

Из теории матриц известно, что для вырожденной матрицы S с $rankS = q$ существует декомпозиция $Q_1 S P_1 = diag(I_q, 0)$. Если в системе (1) выполнить преобразование $P_1^{-1}x = [x_1, x_2]$ и умножить ее слева на матрицу Q_1, то получим вторую эквивалентную форму (EF2) [2]

$$\dot{x}_1 = A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + B_1 u, \; x_1 \in R^q, \tag{5}$$

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + B_2 u, \; x_2 \in R^{n-q}. \tag{6}$$

Известно, что если система (1) регулярна, то можно полагать, что матрицы S и A коммутативны, т.е. $SA = AS$. Если это условие не выполняется, то матрицы S, A, B заменяют на матрицы $\bar{S}, \bar{A}, \bar{B}$, где $\bar{S} = (\lambda S - A)^{-1} S$, $\bar{A} = (\lambda S - A)^{-1} A$, $\bar{B} = (\lambda S - A)^{-1} B$ и тогда коммутативность имеет место.

Отметим, что в регулярной системе (1) можно выполнить неособое преобразование $y(t) = \exp(\lambda_0 t)x(t)$ и привести систему (1) к виду $(\lambda_0 S - A)^{-1} S\dot{y} = y + (\lambda_0 S - A)^{-1} Be^{\lambda_0 t}$, т.е.

$$\bar{S}\dot{y} = y + \bar{B}\bar{u}(t). \tag{7}$$

Такая запись системы называется [2] третьей эквивалентной канонической формой (EF3).

Для дескрипторных систем изучены различные постановки и получены критерии разрешимости задач управляемости и наблюдаемости [1] и, в частности, задача управляемости для подсистемы (4) называется задачей импульсной управляемости [2].

Определение. Система (1) называется импульсно управляемой, если для любого начального условия x_0 и вектора $w \in R^{n_2}$ существует управление $u(t)$ так, что $x_w(t_1) = w$.

Это определение требует возможности достижения любой импульсной составляющей с помощью допустимого управления. Справедлива теорема.

Теорема. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(a) Система (1) импульсно управляема.

(b) Подсистема (4) полностью управляема.

(c) $KerN + \mathrm{Im}[B_w : NB_w : \ldots : N^{n_2-1}B_w] = R^{n_2}$.

(d) $\mathrm{Im}\, N = \mathrm{Im}[NB_w : \ldots : N^{n_2-1}B_w]$.

(e) $\mathrm{Im}\, N + \mathrm{Im}\, B_w + KerN = R^{n_2}$.

Импульсная управляемость позволяет с помощью обратной связи избавляться от импульсных компонент решения дескрипторной системы.

В работе [6] доказано, что существует пара невырожденных ортогональных матриц P, Q , таких, что имеет место равенство

$$P(sE-A)Q = \begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \quad l_1 \qquad & \qquad l_2 \qquad & \qquad l_3 \qquad & \qquad l_4 \quad \end{array} \\ \begin{bmatrix} sE_{11}-A_{11} & sE_{12}-A_{12} & sE_{13}-A_{13} & sE_{14}-A_{14} \\ 0 & sE_{22}-A_{22} & sE_{23}-A_{23} & sE_{24}-A_{24} \\ 0 & 0 & sE_{33}-A_{33} & sE_{34}-A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & sE_{44}-A_{44} \end{bmatrix} \end{array}.$$

Используя данное преобразование матричной пары можно получить новые условия импульсной управляемости для специальных классов регулярных дескрипторных систем.

Рассмотрим линейную стационарную непрерывную дескрипторную систему с запаздыванием вида

$$H\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t) + Gq(t),\ t \ge 0, \qquad (8)$$

с начальными условиями

$$Hx(+0) = Hx_0, \quad A_1 x(\nu) = A_1\varphi(\nu),\ \nu \in [-h, 0) \qquad (9)$$

и выходом

$$y(t) = Cx(t),$$

где $u(t)$ – r-мерный вектор управления, который предполагается достаточно гладким, $q(t)$ - p-мерный вектор возмущений, $y(t) - q$ – мерный вектор выхода, причем матрицы входа, возмущений и выхода имеют полный ранг, т.е.

$$H, A, A_1 \in R^{n\times n}, \quad B \in R^{n\times m}, G \in R^{n\times p}, C \in R^{n\times q}, \det H = 0, rankB = m,$$

$$rankG = p, rankC = q.$$

Систему (8) будем полагать регулярной [4], т.е.

$$\det(sH - A - A_1\lambda) \ne 0, \quad s, \lambda \in C, \qquad (10)$$

При выполнении специальных условий можно получить разбиение линейной стационарной дескрипторной системы с запаздыванием аналогичное первой эквивалентной форме (EF1) обыкновенной дескрипторной системы и для подсистемы быстрых движений рассмотреть некоторые аналоги задачи импульсной управляемости, как конечномерной, так и функциональной. В некоторых частных случаях получены достаточные условия возможности такой управляемости, выраженные через параметры системы (8).

Пусть далее $k = \operatorname{rank} H < n$. Тогда найдутся $n \times n$ – матрицы P и Q такие, что

$$P(sH - A - \lambda A_1)Q = \begin{bmatrix} sI_k - A_{11} - A_{11}^1\lambda & -A_{12} - A_{12}^1\lambda \\ -A_{21} - A_{21}^1\lambda & -A_{22} - A_{22}^1\lambda \end{bmatrix}, \tag{11}$$

где I_k – единичная $k \times k$ – матрица; $A_{11}, A_{11}^1 \in R^{k\times k}$; $A_{12}, A_{12}^1 \in R^{k\times n}$; $A_{21}, A_{21}^1 \in R^{(n-k)\times k}$; $A_{22}, A_{22}^1 \in R^{(n-k)\times(n-k)}$.

На основании этого представления можно записать вторую эквивалентную форму (EF2) для линейной стационарной дескрипторной системы с запаздыванием [2]

Система (8) называется *вполне регулярной* [4], если λ – матрица $A_{22} + A_{22}^1\lambda$ в представлении (11) не имеет элементарных делителей вида $\lambda^i, i \in N$.

Доказано [4], что всякая вполне регулярная (8) с начальными условиями (9) однозначно разрешима и может быть сведена к гибридной системе с последействием.

Другое преобразование системы (8) к виду

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & I_2 & 0 & 0 \\ B_{31} & 0 & 0_3 & 0 \\ B_{41} & 0 & 0 & 0_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & I_3 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & 0 & 0_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-r) \\ x_2(t-r) \\ x_3(t-r) \\ x_4(t-r) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \\ f_4(t) \end{bmatrix}$$

предложено в работе [7]. При различных предположениях на соотношения между частями системы (12) изучен вопрос о существовании и несуществовании решения задачи (8), (9), а также о единственности этого решения. Применяя этот результат к исследованию управляемости системы (8), можно получить достаточные условия возможности импульсной управляемости как конечномерной, так и функциональной. Для частных случаев удается выразить эти условия через параметры системы (8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Асмыкович И.К.* Некоторые задачи качественной теории управления для дескрипторных систем (обзор) // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. N4. C.130.
2. *Dai L.* Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences, Vol.118. Berlin, Springer-Verlag, 1989.
3. Задачи управления конечномерными системами / И.К. Асмыкович, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.М. Марченко // Автоматика и телемеханика. 1986. N11. C.5-29.
4. *Марченко В.М.* Регулярные дифференциально-разностные системы с управлением // VIII Белорусская математическая конф. 19-24 июня 2000 г.: Тез. докл. Часть 4. Минск, 2000. C.77-78.
5. *Ailon A.* A solution to the disturbance decoupling problem in singular systems via analogy with state-space systems // Automatica. 1993. V.29. N6. P.1541-1545.
6. *Chu D., Mehrmann V.* Disturbance decoupling for descriptor systems // Technische universitat Chemnitz – Zwickau // Preprint 97 – 7. 1997. 29 p.
7. *Li Y., Liu Y.* Basic theory of singular systems of linear differential difference equations // Preprints of the 13th World Congress IFAC. San Francisco, USA, 30th June - 5th Jule 1996 / V.D. P. 79-84.
8. *Kaczorek T.* Positive linear systems and their relationship with electrical circuits // SPETO^97 Ustron 21-24.05 1997. P.33-41.

УДК 512.8

Ю.И. Большаков

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $f(x) = ax + b\overline{x} + c$

Изучаются некоторые важные свойства функции $f(x) = ax + bx + c$ над полем C. Полученные результаты могут быть применены при решении некоторых задач классификации пар матриц над полем C.

Функция $f : C \to C$, определенная равенством

$$f(x) = ax + b\overline{x} + c, \tag{1}$$