

УДК 681.62:519.87

Зязюля В. Н., аспирант; Вихренко В. С., профессор; Юденков В. С., доцент

### МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ АСИНХРОННОГО ДВИГАТЕЛЯ ПЕЧАТНОЙ МАШИНЫ

The equations of motion of an asynchronous electric motor used in printing machine are considered. The analytical solution of equations is derived when the rotational velocity of the rotor is considered as a parameter. The mechanical characteristics of the motor is represented as an analytical expression of the motor parameters and the rotational velocity of the rotor. Damping oscillations in the mechanical characteristics are investigated as well. The results can be used for any asynchronous motor.

**Введение.** Полиграфическое производство основано на выпуске серийной печатной продукции. К качеству воспроизведения современных печатных изданий предъявляются высокие требования. Одним из таких требований является высокая повторяемость, т. е. обеспечение идентичности оттисков в пределах одного тиража [1].

Удовлетворить этому требованию не просто. Печатный процесс является многофакторным. Во время печати может изменяться вязкость краски на валиках красочного аппарата, химический состав увлажняющего раствора, распределение давления в зоне печати, не говоря о механических вибрациях и биениях в машине, зависящих от скорости работы и технического состояния и т. п. Развитие современного полиграфического оборудования ориентировано на повышение уровня автоматизации всех систем печатной машины (системы термостатирования валиков красочного аппарата, контроль концентрации и кислотности увлажняющего раствора и др.). Для обеспечения качественного управления оборудованием необходимо знать природу и поведение всех (или хотя бы наиболее значимых) влияющих на качество конечной полиграфической продукции факторов [2].

Факторы, определяющие качество печатного оттиска, рознятся в зависимости от типа печатной машины (электропривод, система управления, красочный аппарат и другие). Для их адекватного учета необходимо уметь рассчитывать каждую подсистему печатной машины. На основании таких расчетов может быть создана математическая модель работы полиграфического печатного оборудования.

Для решения задачи необходимо объединить механическую часть машины, ее электропривод, системы управления и другого в пределах единой вычислительной среды. Построение планируется выполнить на основе взаимодействия программных пакетов VisualNastran 4D и Matlab\Simulink в режиме реального времени. Наличие единой модели существенно

повысит эффективность проектирования оборудования за счет снижения времени его разработки, числа натурных испытаний.

Электропривод печатной машины — одна из ее важнейших систем. От качества его работы зависит стабильность проведения процесса печати, так как необходимо обеспечить постоянство скорости во время печати или изменение скорости по заданному закону.

Моделированию асинхронного двигателя печатной машины, как одного из элементов будущей комплексной модельной системы, должно быть уделено необходимое внимание.

**1. Построение сглаженной характеристики асинхронного электродвигателя.** Работа асинхронного двигателя печатной машины описывается системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\frac{d\psi_{sa}}{dt} = \sqrt{2}U_n \cos \omega_s t - Ar_s (\psi_{sa}L_r - \psi_{ra}L_m),$$

$$\frac{d\psi_{sb}}{dt} = -\sqrt{2}U_n \sin \omega_s t - Ar_s (\psi_{sb}L_r - \psi_{rb}L_m),$$

$$\frac{d\psi_{ra}}{dt} = -Ar_r (\psi_{ra}L_s - \psi_{sa}L_m) + \omega\psi_{rb},$$

$$\frac{d\psi_{rb}}{dt} = -Ar_r (\psi_{rb}L_s - \psi_{sb}L_m) + \omega\psi_{ra}, \quad (1)$$

$$M = \frac{3}{2}pL_m A (\psi_{sa}\psi_{rb} - \psi_{sb}\psi_{ra}), \quad (2)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{J}(M - M_c), \quad (3)$$

где  $\psi_{sa}, \psi_{sb}, \psi_{ra}, \psi_{rb}$  — проекции потокосцепления статора и ротора на оси  $a$  и  $b$  соответственно;  $\omega$  и  $\omega_s$  — угловая скорость вращения ротора и поля статора ( $\omega_s = \omega_c/q$ );  $U_n$  и  $\omega_c$  — номинальное напряжение и круговая частота питания двигателя;  $r_s, r_r$  — приведенные реактивные моменты сопротивления обмоток статора и ротора;  $L_s, L_r$  — приведенные реактивные сопротивления обмоток статора и ротора;  $M,$

$M_s$  — момент двигателя и момент сопротивления;  $J$  — приведенный момент инерции двигателя и привода;  $q$  — число пар полюсов;  $t$  — время;  $A$  — константа, определяемая формулой

$$A = (L_s L_r - L_m^2)^{-1}. \quad (4)$$

Система уравнений (1)–(3) включает подсистему (1) четырех линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка относительно проекций потокосцеплений статора и ротора, нелинейное алгебраическое уравнение (2) для вращающего момента двигателя и дифференциальное уравнение вращения ротора (3). Неоднородность подсистемы уравнений (1) имеет гармонический характер и обусловлена переменным напряжением питания двигателя.

Решение подсистемы уравнений (1) состоит из гармонических слагаемых, отражающих вынужденные колебания потокосцеплений вследствие гармонических возмущений от питающего поля и затухающих собственных колебаний. Ниже будет показано, что структура уравнений (1) такова, что все четыре корня характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части. Нелинейность системы уравнений (1)–(3) обусловлена уравнениями (2) и (3) и отражается в подсистеме (1) посредством угловой скорости ротора  $\omega$ , которая вследствие высокой инерционности привода является медленно изменяющейся функцией времени по сравнению с гармоническими функциями, входящими в первые два уравнения подсистемы (1). Поэтому для нахождения момента двигателя естественно воспользоваться широко известным в теории нелинейных колебаний методом усреднения [4, 5]. В соответствии с этим методом найдем решение подсистемы (1), рассматривая  $\omega$  как параметр, а при вычислении момента двигателя согласно уравнению (2) выполним усреднение по промежутку времени порядка периода колебаний поля статора  $2\pi/\omega_s$ . В результате получим усредненную характеристику двигателя. Быстрые же осцилляции в среднем дадут близкий к нулю вклад в уравнение движения (3), которым можно пренебречь. Для упрощения последующих преобразований примем обозначения:

$$\Psi_{sa} = x_1, \Psi_{sb} = x_2, \Psi_{ra} = x_3, \Psi_{rb} = x_4;$$

$$A_1 = A_r L_r, A_2 = A_r L_s,$$

$$A_3 = A_r L_m, A_4 = A_r L_m; \quad (5)$$

$$B_1 = \sqrt{2}U_n \cos \omega_s t, B_2 = \sqrt{2}U_n \sin \omega_s t. \quad (6)$$

Переходя к операторной форме записи, первые два уравнения системы (1) представим в виде

$$A_3 x_3 = (p + A_1)x_1 - B_1,$$

$$A_3 x_4 = (p + A_1)x_2 + B_2 \quad (7)$$

где введен дифференциальный оператор

$$p = d/dt. \quad (8)$$

Используя (7) в двух последних уравнениях системы (1), получим неоднородную систему двух линейных дифференциальных уравнений, определяющую  $x_1$  и  $x_2$ :

$$\begin{aligned} (-A_3 A_4 + (p + A_1)(p + A_2))x_1 - \omega(p + A_1)x_2 = \\ = (p + A_2)B_1 + \omega B_2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(p + A_1)x_1 + (-A_3 A_4 + (p + A_1)(p + A_2))x_2 = \\ = \omega B_1 - (p + A_2)B_2. \quad (9) \end{aligned}$$

Общее решение полученной системы уравнений состоит из общего решения  $x_j$  ( $j = 1, 2$ ) соответствующей системы однородных уравнений и какого-либо частного решения  $x_j^*$  неоднородной системы. В первую очередь найдем частное решение. Для упрощения обозначений звездочку опускаем. Учитывая, что неоднородность системы определяется гармоническими функциями  $B_1$  и  $B_2$ , это решение ищем в виде

$$x_1 = C_1 \cos \omega_s t + D_1 \sin \omega_s t,$$

$$x_2 = C_2 \cos \omega_s t + D_2 \sin \omega_s t. \quad (10)$$

Далее следует учесть, что действие дифференциального оператора на рассматриваемые функции выражается отношениями:

$$p^2 x_j = -\omega_s^2 x_j; \quad pB_1 = -\omega_s B_2; \quad pB_2 = \omega_s B_1. \quad (11)$$

С учетом (11) система уравнений (9) после некоторых преобразований принимает вид

$$\begin{aligned} (A_5 + (A_1 + A_2)p)x_1 - \omega(p + A_1)x_2 = \\ = A_2 B_1 - (\omega_s - \omega)B_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega(p + A_1)x_1 + (A_5 + (A_1 + A_2)p)x_2 = \\ = -(\omega_s - \omega)B_1 - A_2 B_2. \quad (12) \end{aligned}$$

$$A_5 = A_1 A_2 - A_3 A_4 - \omega_s^2. \quad (13)$$

Учитывая, что в систему уравнений (12) входит дифференциальный оператор  $p$ , который не коммутирует с функциями времени, для ее решения относительно  $x_1$  умножим первое уравнение системы на  $(A_5 + (A_1 + A_2)p)$ , а второе — на  $\omega(p + A_1)$  и результат сложим. Аналогично поступаем для решения уравнения относительно  $x_2$ . В результате получим:

$$\Delta_1 x_1 = F_1 \cos \omega_s t + F_2 \sin \omega_s t,$$

$$\Delta_1 x_2 = F_2 \cos \omega_s t - F_1 \sin \omega_s t. \quad (14)$$

В правую часть входят величины

$$F_1 = ((A_5 - \omega_s^2)A_2 - (\omega_s^2 - \omega^2)A_1)\sqrt{2}U_n,$$

$$F_2 = -((A_5 - \omega\omega_s)(\omega_s - \omega) + A_1A_2(\omega_s - \omega) + A_2^2\omega_s)\sqrt{2}U_n. \quad (15)$$

Определитель левой части системы уравнений (12)

$$\Delta_1 = z_1 + z_2 p, \quad (16)$$

где

$$z_1 = A_5^2 - (A_1 + A_2)^2 \omega_s^2 + (A_1^2 - \omega_s^2) \omega^2, \\ z_2 = 2(A_5(A_1 + A_2) + A_1 \omega^2). \quad (17)$$

Тогда левая часть первого уравнения системы (14) принимает вид

$$\Delta x_1 = (z_1 C_1 + z_2 \omega_s D_1) \cos \omega_s t + (-z_2 \omega_s C_1 + z_1 D_1) \sin \omega_s t. \quad (18)$$

Приравняв коэффициенты в левой и правой частях уравнения для  $x_1$  при одинаковых тригонометрических функциях, получаем систему уравнений для коэффициентов  $C_1$  и  $D_1$ :

$$z_1 C_1 + z_2 \omega_s D_1 = F_1, \\ -z_2 \omega_s C_1 + z_1 D_1 = F_2. \quad (19)$$

Решая систему (19) по методу Крамера, запишем

$$C_1 = (z_1 F_1 - z_2 F_2 \omega_s) / \Delta_2, \\ D_1 = (z_1 F_2 + z_2 F_1 \omega_s) / \Delta_2, \quad (20)$$

где определитель

$$\Delta_2 = z_1^2 + z_2^2 \omega_s^2. \quad (21)$$

Проделав аналогичные операции со вторым уравнением системы (14), находим коэффициенты, определяющие  $x_2$ :  $C_2 = D_1$ ,  $D_2 = -C_1$ .

Теперь, когда искомые коэффициенты для проекций потокосцеплений статора найдены, рассмотрим уравнение (2) для определения момента двигателя. Используя соотношения (7), запишем

$$M = \frac{3}{2} \frac{qL_m}{A_3} (x_1 B_2 + x_2 B_1 + x_1 p x_2 - x_2 p x_1). \quad (22)$$

Используя свойства оператора  $p$  и соотношения (10) и (20), запишем

$$M = \frac{3}{2} p L_m \frac{A}{A_3 \Delta_2} [(z_1 F_2 + z_2 F_1 \omega_s) \sqrt{2} U_n - (F_1^2 + F_2^2)] \omega_s. \quad (23)$$

Таким образом, получено аналитическое выражение для зависимости момента двигателя от угловой скорости  $\omega$  вращения ротора, входящей в соотношение (23) через величины  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $F_1$ ,  $F_2$  и  $\Delta_2$ . Примечательно, что вынужденная

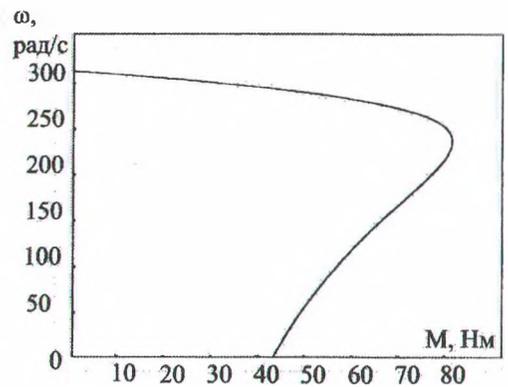


Рис. 1. Механическая характеристика асинхронного двигателя

часть решения системы (1) приводит к механической характеристике двигателя, вовсе не содержащей осциллирующих слагаемых.

Осцилляции обеспечиваются решениями соответствующих однородных уравнений и исследуются ниже.

Параметры моделируемого асинхронного двигателя печатной машины Romayor 314 следующие:  $U_n = 220$  В;  $L_m = 0,284$  Гн;  $L_s = 0,29$  Гн;  $L_r = 0,294$  Гн;  $r_s = 1,66$  Ом;  $r_r = 1,29$  Ом;  $\omega_s = 314$  рад/с. На рис. 1 показана механическая характеристика двигателя, найденная по соотношению (23).

Для оценки правильности вычислений механическая характеристика была сопоставлена с аналогичной характеристикой, полученной численным интегрированием системы (1) в среде Mathcad по алгоритму Эйлера [6]. По сравнению с численным решением соотношение (23) обеспечивает быстрое и надежное определение момента двигателя как функции  $\omega$ . Отметим, что численное интегрирование уравнений (1)–(3) ввиду наличия быстро осциллирующих слагаемых требует выбора малого шага по времени, сложных численных алгоритмов (алгоритм Эйлера не обеспечивает достаточной точности), связано со значительными затратами компьютерного времени и по этой причине не может быть использовано в системах реального времени.

**2. Анализ общего решения соответствующих однородных уравнений.** Соответствующие однородные уравнения получаются из уравнений системы (9), если их правые части положить равными нулю. Отыскивая их решение в виде  $H \exp(pt)$ , где  $H = \text{const}$ , находим характеристический определитель:

$$\Delta = ((p + A_1)(p + A_2) - A_3 A_4)^2 + \omega^2 (p + A_1)^2, \quad (24)$$

где  $p$  — некоторое число.

Для определения корней характеристического уравнения  $\Delta = 0$  преобразуем к виду

$$(p + A_1)(p + A_2) - A_3 A_4 = \mp i \omega (p + A_1). \quad (25)$$

Полученное уравнение эквивалентно двум квадратным уравнениям:

$$p^2 + (A_1 + A_2 \pm i\omega)p + A_1A_2 - A_3A_4 \pm i\omega A_1. \quad (26)$$

Корни уравнений (26)

$$p_{1,2} = -\frac{A_1 + A_2 - i\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a + bi},$$

$$p_{3,4} = -\frac{A_1 + A_2 + i\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a + bi}, \quad (27)$$

где

$$a = (A_1 + A_2)^2 - \omega^2, \quad b = 2(A_1 - A_2)\omega. \quad (28)$$

После извлечения корня квадратного находим действительные части корней характеристического уравнения

$$\alpha_1 = -\frac{A_1 + A_2}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1/2},$$

$$\alpha_2 = -\frac{A_1 + A_2}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)^{1/2}. \quad (29)$$

Отметим, что  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — строго отрицательные величины.

Мнимые части корней характеристического уравнения

$$\beta_{1,2} = \omega \pm \left(\frac{2b}{a + \sqrt{a^2 + b^2}}\right)^{1/2}. \quad (30)$$

Второе слагаемое в правой части (30) составляет сотые доли первого, поэтому  $\beta_{1,2} \approx \omega$ .

Фундаментальная система решений соответствующего однородного уравнения включает функции

$$He^{\alpha_j t} \sin \beta_j t, \quad i, j = 1, 2. \quad (31)$$

Часть решения системы уравнений (1), отражающая начальные условия, имеет вид затухающих колебаний частоты  $\beta_1 \approx \beta_2 \approx \omega$  с характерными временами затухания  $\tau_j = -1/\alpha_j$  ( $j = 1, 2$ ), представленными как функции угловой скорости ротора  $\omega$  на рис. 2. Большее из времен затухания колебаний составляет величину порядка 0,1 с при  $\omega = 0$  рад/с и быстро уменьшается до сотых долей секунды с увеличением угловой скорости ротора. Второе слабо зависит от  $\omega$  и не превосходит 0,01 с. Учитывая, что амплитуда затухающих колебаний уменьшается в 20 раз за время, равное  $3\tau$ , можно утверждать, что при малых  $\omega$  осцилляции потокосцеплений затухают в течение 0,3 с, а при изменении нагрузки на рабочих скоростях ротора  $\omega \approx \omega_0$  осцилляции затухают за время порядка 0,03 с, т. е. за один-два периода изменений напряжения питающей цепи.

Так как в (2) для момента двигателя входят произведения потокосцеплений, вклады от решений вида (31) после перемножения будут затухать минимум в два раза быстрее, чем колебания потокосцеплений. Более продолжитель-

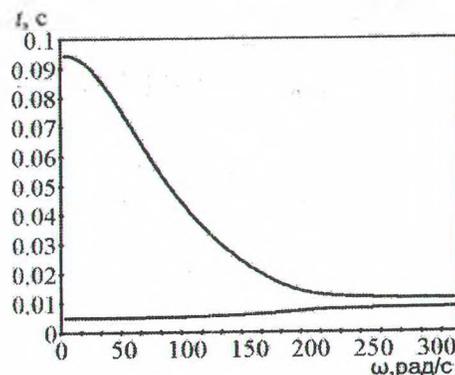


Рис. 2. Зависимость времени релаксации от угловой скорости вращения ротора.

ные осцилляции момента двигателя обусловлены произведениями решений (10) и (31), характеристические времена затухания которых равны  $\tau_1$  и  $\tau_2$ . Частоты осцилляций определяются комбинацией частот,  $\omega_s \pm \omega$ , т. е. близки к частоте поля статора. Такое поведение момента двигателя наблюдается при численном решении системы уравнений (1)–(3) [6].

**Заключение.** Полученное аналитическое выражение для механической характеристики асинхронного двигателя печатной машины позволяет быстро выполнять вычисления и, в отличие от численного интегрирования исходных дифференциальных уравнений движения, использовать его в системах управления реального времени. Найдены и исследованы характеристики затухающих колебаний потокосцеплений и момента двигателя, возникающих при его запуске или изменении режима работы. Результаты справедливы для широкого класса асинхронных двигателей.

### Литература

1. Никанчикова, Е. А. Технология офсетного производства / Е. А. Никанчикова, А. Л. Попова. — М.: Книга, 1980 — 320 с.
2. Киппхан, Г. Энциклопедия по печатным средствам информации / Г. Киппхан. — М.: МГУП, 2003. — 1255 с.
3. Башарин, А. В. Управление электроприводами / А. В. Башарин, В. А. Новиков, Г. Г. Соколовский. — Л.: Энергоиздат, 1982 — 392 с.
4. Волосов, В. М. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем / В. М. Волосов, Б. И. Моргунов. — М.: МГУ, 1971. — 508 с.
5. Андронов, А. А. Теория колебаний / А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин. — М.: Наука, 1981. — 568 с.
6. Исследование динамики печатной машины ROMAYOR 314 при помощи пакетов VISUAL NASTRAN и MATHCAD / С. А. Гляков [и др.] // Теорет. и прикл. механика: межвед. сб. науч.-метод. статей. — 2005. — Вып. 19. — С. 250–254.