

Кулак М. И., профессор; Сменяко Н. М., ассистент; Трусевич Н. Э., старший преподаватель

## ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ЖИЗНЕННОГО ЦИКЛА ПЕЧАТНОЙ ПРОДУКЦИИ

In article the mathematical model for definition of all stages of life cycle of a printed matter is constructed. The opportunity to use the offered variant of model of life cycle for classification of production within the limits of marketing model of the Boston consulting group is shown. Practical application of model of life cycle in the specified context allows to raise accuracy of strategic marketing planning at the printing enterprises.

Жизненный цикл продукции представляет собой временной интервал, включающий в себя несколько стадий, каждая из которых отличается особым характером процесса изменения во времени объемов производства [1].

В практической деятельности чаще всего оперируют понятием жизненного цикла продукции в сфере производства, называя его сокращенно «жизненный цикл». Как показано на рис. 1, этот цикл включает в себя следующие стадии: внедрение продукции на рынок, расширение объема продаж на рынке (рост), замедление роста объема продаж (зрелость), начало его сокращения (насыщение), падение объема продаж (спад).

В работе [2] был предложен метод моделирования жизненного цикла полиграфического оборудования. В соответствии с этим методом жизненный цикл представляет собой S-образную кривую, которая описывается модифицированной формулой Перла

$$y(t) = \frac{a}{1 + Ce^{-k \cdot a \cdot t}} = \frac{y_0 \cdot a}{y_0 + (a - y_0)e^{-k \cdot a \cdot t}}, \quad (1)$$

где  $y$  — объем выпуска продукции;  $t$  — время;  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $a$  — асимптота  $y(t)$ ;  $C = (a - y_0)/y_0$ ;  $y_0$  — начальная партия продукции.

Чтобы описать с помощью (1) жизненный цикл, необходимо знать асимптоту  $a$  и коэффициент пропорциональности  $k$ . В работе [2] эти неизвестные параметры находились исходя из знания количества единиц продукции, выпущенной за время жизненного цикла.



Рис. 1. Основные стадии жизненного цикла продукции в период ее реализации на рынке

Основной недостаток развитого в [2] подхода заключается в том, что он не гарантирует точность представления функциональной зависимости внутри жизненного цикла.

Пример S-образной кривой, полученной с помощью разработанной в [2] модели жизненного цикла приведен на рис. 2. Сопоставление ее с принципиальной качественной зависимостью на рис. 1 показывает, что предложенная ранее модель не описывает стадию спада. В результате затруднена возможность детального прогнозирования процесса полного исчерпания емкости рынка продукции.

Целью данной работы является построение обобщенной математической модели жизненного цикла печатной продукции, которая может быть использована для повышения эффективности технологической подготовки полиграфического производства.

Для определения значений неизвестных коэффициентов  $a$  и  $k$  в модифицированной формуле Перла (1), описывающей жизненный цикл продукции, в данной работе предлагается использовать выражение для скорости изменения функции  $y(t)$ , которое имеет вид [2]:

$$\frac{dy}{dt} = p(y) = ky(a - y). \quad (2)$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены в правой части уравнения (2), в результате получим параболическую зависимость, которая имеет следующий вид:

$$p(y) = -ky^2 + kay. \quad (3)$$

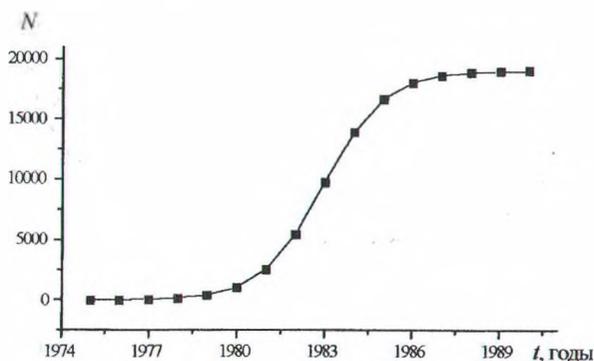


Рис. 2. Жизненный цикл фотонаборных автоматов CRTronic

Параболическую функцию в правой части (3) можно представить в каноническом виде:

$$p(y) = Ay^2 + By + C. \quad (4)$$

Неизвестные коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  в выражении (4) можно найти с помощью метода наименьших квадратов. При этом исходными данными будут статистические данные о динамике реализации продукции.

Значения производной  $p$  находятся путем численного дифференцирования данных о статистике реализации продукции.

При сравнении формул (3) и (4) видно, что неизвестные коэффициенты  $a$  и  $k$  выражаются через коэффициенты параболы  $A$  и  $B$  следующим образом:

$$\begin{aligned} k &= -A, \\ a &= \frac{B}{A}. \end{aligned} \quad (5)$$

Найденные по формулам (5) коэффициенты  $a$  и  $k$  далее используются для построения графика жизненного цикла продукции по формуле (1).

Обобщение модели жизненного цикла полиграфической продукции также предусматривает построение стадии спада путем присоединения к графику жизненного цикла на стадии зрелости второй кривой, задаваемой определенной экспоненциальной зависимостью.

В результате график жизненного цикла будет представлять собой  $S$ -образную кривую, левая часть которой описывается уравнением (1), а правая часть — экспоненциальной зависимостью вида:

$$h(t) = Ae^{-B(t-t_s)^2}, \quad (6)$$

где  $t_s$  — точка склейки графиков функций;  $A$ ,  $B$  — неизвестные коэффициенты.

Чтобы склейка не происходила непосредственно в точке перегиба графика, добавляется еще одна неизвестная  $b$ , — и зависимость (6) принимает следующий вид:

$$h(t) = Ae^{-B(t-(t_s+b))^2} = Ae^{-B(t-t_s-b)^2}. \quad (7)$$

Построенная обобщенная кривая жизненного цикла представляет собой сплайн, состоящий из двух функций —  $y(t)$  и  $h(t)$ .

Определение неизвестных коэффициентов в уравнении (7) осуществляется исходя из условия непрерывности сплайна в точке склейки, а именно: в точке склейки должны совпадать значения самих функций, а также их первых и вторых производных, т. е. в этой точке совпадают наклон касательных и радиусы кривизны функций.

Определим первую и вторую производные функции  $y(t)$  представленной формулой (1) по времени и введем обозначения:

$$y(t_s) = \frac{a}{1 + Ce^{-kat_s}} = p_0,$$

$$y'(t_s) = \frac{ka^2Ce^{-kat_s}}{(1 + Ce^{-kat_s})^2} = p_1, \quad (8)$$

$$y''(t_s) = \frac{k^2a^3Ce^{-kat_s}(Ce^{-kat_s} - 1)}{(1 + Ce^{-kat_s})^2} = p_2.$$

Тогда для правой части кривой жизненного цикла должны выполняться условия:

$$\begin{aligned} h(t_s) &= p_0, \\ h'(t_s) &= p_1, \\ h''(t_s) &= p_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Продифференцировав уравнение (7), получим

$$\begin{aligned} h'(t) &= -2AB(t - t_s - b)e^{-B(t-t_s-b)^2}, \\ h''(t) &= [4AB^2(t - t_s - b)^2 - 2AB] \times \\ &\quad \times e^{-B(t-t_s-b)^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Воспользовавшись условиями (10), получаем значения неизвестных коэффициентов функции  $h(t)$

$$\begin{aligned} b &= \frac{p_0 \cdot p_1}{p_1^2 - p_0 \cdot p_2}, \\ B &= \frac{p_1}{2 \cdot b \cdot p_0}, \\ A &= \frac{p_0}{e^{-Bb^2}}. \end{aligned} \quad (11)$$

Далее на отрезке  $[t_0; t_s]$  строится график функции  $y(t_1)$ , а на отрезке  $[t_s; t_k]$  —  $h(t_2)$ , где  $[t_0; t_k]$  — интервал времени, в течение которого выпускалась продукция. Проверить адекватность модели можно с помощью вычисления интеграла от всей функции, величина которого должна быть равна количеству продукции, выпущенной за весь промежуток времени.

С учетом того, что интеграл от функции  $y(t)$  рассчитан ранее [1], количество выпущенной продукции будет находиться по формуле

$$\begin{aligned} S &= a \cdot t_s + \frac{\ln \left[ \frac{y_0 + (a - y_0)e^{-kat_s}}{a} \right]}{k} + \\ &\quad + \int_{t_s}^{t_k} h(t_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Предложенный алгоритм моделирования жизненного цикла полиграфической продукции может быть использован для описания маркетинговых стратегий.

В настоящее время предложен ряд полезных моделей, которые используются при осуществлении стратегического маркетингового планирования [3]. Их практическая значимость для полиграфических предприятий заключается в том, что в рамках этих моделей они могут оценить свои мощности, продукцию и направления деятельности. На основе полученных оценок распределяются ресурсы предприятий, а также разрабатываются соответствующие конкретные стратегии маркетинга.

Одной из наиболее известных моделей для планирования полиграфического производства является матрица «роста рыночной доли», разработанная Бостонской консультационной группой (БКГ) [3]. Эта модель позволяет полиграфическому предприятию классифицировать каждый вид своей продукции по ее доле на рынке относительно основных конкурентов и темпам роста продаж. Продукция, занимающая в матрице схожее стратегическое положение, объединяется в однородные совокупности. Для нее можно определить базовые или так называемые нормативные стратегии, которые используются для целевого и стратегического планирования, а также для распределения ресурсов предприятий [4].

В модели БКГ матрицу образуют два показателя:

1) рост объема продаж, который рассчитывается как индекс физического объема продаж продукции всех или основных полиграфических предприятий, работающих на рынке;

2) относительная доля рынка, занимаемая предприятием, исчисляется как отношение его объема продаж к общему объему или объему продаж основных конкурентов.

В немалой степени популярность матрицы БКГ обусловлена образной выразительностью названий типов продукции (рис. 3).

В матрице БКГ продукция классифицируется по определенным типам следующим образом. В правом нижнем квадранте на рис. 3 находится продукция, относящаяся к типу, именуемому «дойные коровы».

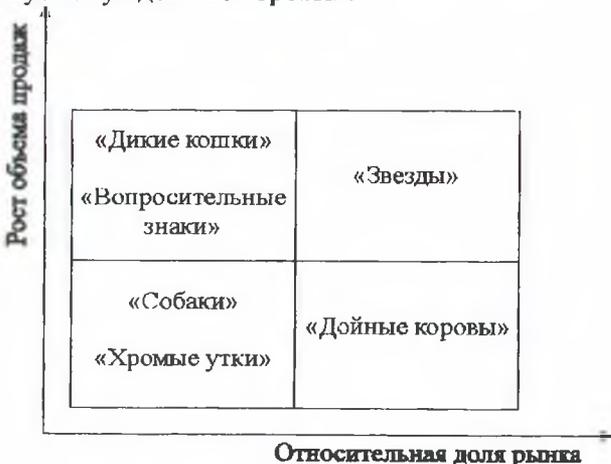


Рис. 3. Матрица маркетинговой модели БКГ

Она имеет большую долю на медленно развивающемся рынке. Для полиграфических предприятий такая продукция — основной источник доходов от производства и реализации, которые можно использовать для поддержания другой продукции.

В правом верхнем квадранте находятся «звезды». К этому типу относится продукция, занимающая значительную долю рынка, причем спрос на нее растет высокими темпами. Она требует затрат для обеспечения дальнейшего роста, но в будущем эта продукция может стать «дойной коровой» (т. е. генератором прибыли).

В левом верхнем квадранте находятся «дикие кошки», или «вопросительные знаки». Продукция этого типа занимает незначительную долю рынка в его развивающихся секторах, что обеспечивает ей быстрый рост. Однако спрос на эту продукцию у потребителей незначительный, ее преимущества неясны, ведущее положение на рынке занимает продукция конкурентов. Для поддержания и увеличения доли этой продукции на рынке в условиях сильной конкуренции нужны значительные средства. Предприятие должно решить, следует ли увеличивать расходы на ее продвижение и активнее искать каналы сбыта, улучшать ли ее характеристики и потребительские свойства или уйти с рынка. Следовательно, в перспективе такая продукция может либо стать «звездой», либо уйти с рынка.

В левом нижнем квадранте находятся «собаки» или «хромые утки». Это продукция с ограниченным объемом сбыта. Она имеет малую долю на рынке в насыщенных или сокращающихся его секторах (медленный рост). Несмотря на достаточно длительное присутствие на рынке, продукции этого типа не удалось привлечь к себе необходимое количество покупателей и она значительно отстает от конкурентов по объему сбыта. От этой продукции стремятся как можно быстрее избавляться, так как держать на рынке продукцию, пользующуюся ограниченным спросом, чрезвычайно убыточно.

На рис. 4 представлены графики жизненных циклов продукции, рассчитанные по формулам (1), (5), (7), (11) и соответствующие определенным ее типам по модели БКГ. Значения параметров обобщенной модели жизненных циклов приведены в таблице. Для проведения расчетов использовались модельные данные о статистике продаж продукции.

Стратегическое планирование по методу БКГ выражается в стремлении предприятий к достижению оптимальной структуры выпускаемой продукции. Возможные успехи деятельности предприятий в перспективе определяются выбором направлений и масштабов перераспределения финансовых средств от «дойных коров» в пользу «звезд» и «диких кошек».

Параметры жизненных циклов,  
соответствующих маркетинговой модели БКГ

Тип продукции по модели БКГ	$a$	$k = -A$	$B$
«Дойные коровы»	765	$0,646 \cdot 10^{-3}$	0,494
«Звезды»	1896	$0,110 \cdot 10^{-2}$	2,086
«Дикie кошки» («Вопросительные знаки»)	1464	$0,174 \cdot 10^{-2}$	2,555
«Собаки» («Хромые утки»)	229	$0,100 \cdot 10^{-1}$	2,320

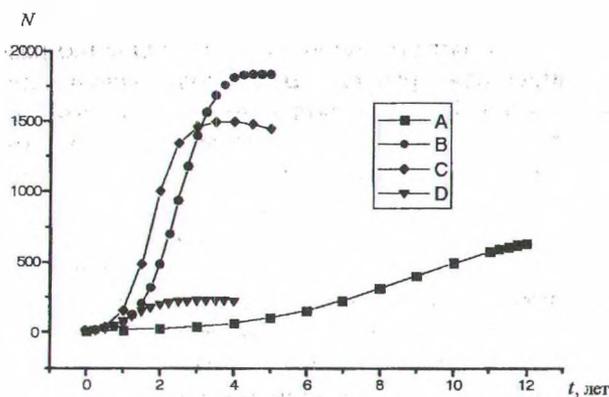


Рис. 4. Жизненные циклы продукции, соответствующие маркетинговой модели БКГ: А — «Дойные коровы», В — «Звезды», С — «Дикie кошки» («Вопросительные знаки»), D — «Собаки» («Хромые утки»)

Одновременно следует учитывать, что «звезды» будут превращаться в «дойных коров», «дикie кошки» перейдут в разряд либо «звезд», либо «собак» и т. д. Эти изменения непосредственно связаны со стадиями жизненного цикла продукции.

Точное знание места расположения продукции на матрице БКГ позволяет оценить ее маркетинговые перспективы. В свою очередь, обобщенная модель жизненного цикла позволяет уже на начальных его стадиях спрогнозировать, к какому типу по модели БКГ может быть отнесена продукция.

Как видно на рис. 4 и в таблице, жизненный цикл продукции, относящейся к типу «дикie кошки», имеет небольшую асимптоту  $a$  и наименьший коэффициент пропорциональности  $k$ . Кривая жизненного цикла наглядно демонстрирует, что сбыт продукции имеет устойчивый, но медленный рост.

Жизненный цикл продукции, относящейся к типу «звезды», имеет наибольшую асимптоту  $a$  и на порядок больший коэффициент пропорциональности  $k$ . Кривая жизненного цикла на рис. 4 показывает намного более быстрый рост объемов сбыта продукции. Причем стадии спада в принципе может и не быть.

У продукции, относящейся к типу «дикie кошки», жизненный цикл имеет асимптоту  $a$  меньше, чем у «звезд».

Вместе с тем коэффициент пропорциональности  $k$  больше. Поскольку рынок ограничен, то он довольно быстро насыщается и наступает стадия спада.

Продукция, которая относится к типу «собаки», имеет наименьшую асимптоту жизненного цикла  $a$  и наибольший коэффициент пропорциональности  $k$ . Как видно на рис. 4, не успев выйти на стадию роста, стадия внедрения сменяется спадом.

Таким образом, приведенные на рис. 4 кривые жизненного цикла, полученные с помощью обобщенной модели, позволяют достаточно точно классифицировать продукцию в соответствии с моделью БКГ. В результате появляется возможность повысить точность стратегического маркетингового планирования на полиграфических предприятиях.

### Литература

1. Гончаров В. В. В поисках совершенства управления: руководство для высшего управленческого персонала. — М.: МНИИПУ, 1998. — Т. 1. — 816 с.
2. Кулак М. И., Гончарова З. В., Семяко Н. М. Метод моделирования жизненного цикла полиграфического оборудования в задачах инновационного менеджмента // Труды БГТУ. Сер. IX. Издат. дело и полиграфия. — 2004. — Вып. XII. — С.110–114.
3. Перлов В. И. Маркетинг на предприятиях отрасли печати. — М.: Изд-во МГУП, 2000. — 284 с.
4. Производственный менеджмент. Управление предприятием / Под ред. С. А. Пелиха. — Мн.: БГЭУ, 2003. — 556 с.