К вопросу о выпрямлении окружностей и приближенной величине π

Вопрос в выпрямлении окружности и изображении величины π занимал математиков и инженеров с древнейших времен.

Величина π, которая представляет, как известно, отношение окружности к диаметру, есть величина не соизмеримая и может быть построена лишь с большим или меньшим приближением, путем нанесения на чертеж по масштабу. Наиболее древнее выражение величины π предложено, как известно, еще Архимедом и представляется дробью $\frac{22}{7} = 3{,}1428$. Во всех обыкновенных случаях и пользуются этой величиной, которую можно построить и можно отложить по масштабу по крайней мере с двумя десятичными знаками.

Впоследствии, подбирая числа, голандский математик Adrien Metius [1]) предложил дробь $\frac{355}{113} = 3{,}1416$, которая чрезвычайно мало отличается от величины π, полученной вычислением при помощи высшей математики, но способы построения этой величины названный ученый не дал.

Известно что, полуокружность довольно близко выражается суммой стороны правильного вписанного квадрата и стороны правильного вписанного треугольника (см. чертеж).

Если взять круг с диаметром АС, то весьма легко сделать следующее построение: поставив ножку циркуля в точку С, каким либо радиусом, но во всяком случае большим радиуса ОС отчеркнем по обоим сторонам круга части дуг. Затем, тем-же радиусом, отчеркнем части дуг из точки А. Точка пересечения будет лежать на перпендикуляре к диаметру, проходящему через центр О. Построив эту линию и соединив точку А и В, получим сторону вписанного квадрата. Далее, отложив радиус ОС по окружности, получим точку D, которая будет вершиной одного из углов правильного шестиугольника. Соединив точки D и С, получим сторону шестиугольника. Если соединить вершины углов шестиугольника через одну, то получим стороны правильного треугольника; таким образом линия AD и будет представлять сторону такового. Весьма легко доказать, что сторона квадрата равняется

1) Метиус жил 1571—1635.

радиусу, умноженному на $\sqrt{2}$, а сторона правильного треугольника— радиусу, помноженному на $\sqrt{3}$.[1])

Таким образом, согласно сделанному предложению полуокрожность $\pi R = R\sqrt{2} + R\sqrt{3}$, а окружность при $2R = D$ будет $\pi D = D.(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ приняв $D = 1$ получим $\pi = \sqrt{2} + \sqrt{3} = 1{,}4142 + 1{,}74321 = 3{,}1463$ т, е. на 0,0047 более точной величины.

Точность для отложения на чертеже обыкновенного масштаба достаточна, так что при отложении обыкновенно отлагаемой величины 3,14 получается совпадение, глазом незаметное; отложить же 3,14 в небольшом масштабе весьма затруднительно.

Рассматривая величину корня квадратного из 2-х= 1,4142 и отнеся запятую влево на один знак получим величину 0,14142, которая от дробной части величины π отличается весьма мало и подставляя ее в выражение величины окружности получим следующее уравнение:

$$2\pi R = 2R\ (3 + 0{,}14142) = 2R \times 3 + 2R \times 0{,}14142\ ,$$

но $0{,}14142 = 0{,}1\sqrt{2}$,подставляя получаем:

$$2\pi R + 2R\ (3 + 0{,}1\sqrt{2}) \quad \text{или} \quad \pi R = 3R + 0{,}1\, R\sqrt{2}$$

т. е. *полуокружность равна трем радиусам сложенным с 0,1 стороны правильного вписанного квадрата.* Окружность $2\pi R = \pi D = 3D + D0{,}1\sqrt{2}$ равна трем диаметрам, сложенным с удвоенным радиусом, или диаметром, помноженным на корень квадратный из двух.

Приняв D за единицу, получим: $\pi = 3 + 0{,}1\sqrt{2} = 3{,}14142$.

Предлагаемое выражение $3 + 0{,}1\sqrt{2}$ много точнее $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ и весьма легко может быть построено. Проведем из точки А произвольную секущую (см. черт.) и отложим на ней 10 равных частей. Соединив конец Е с точкой В и проводя парралельные линии, мы линию АВ, т. е. сторону квадрата, разделяем на 10 равных частей.

Взяв три радиуса и одну десятую стороны квадрата, получим полуокружность, а взяв три диаметра и две десятых$=\frac{1}{5}$ стороны квадрата—полную окружность.

Таким - же способом можно построить и Архимедово число $\frac{22}{7} = 3 + \frac{1}{7} = 3{,}1428$.

Определим погрешность для чисел $3 + \frac{1}{7}$ и $3 + 0{,}1\sqrt{2}$

Выражение первое $\left(3 + \frac{1}{7}\right)$ больше истинного, а выражение второе $(3 + 0{,}1\sqrt{2})$ менее. [2])

---

[1]) Пусть AB=a a AD = b. Из прямоугольного треугольника АОВ имеем $a^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2 = R^2 + R^2 = 2R^2$ откуда $a = \sqrt{2R^2} = R\sqrt{2}$

Треугольник АОС прямоугольный, потому что опирается на диаметр и измеряется половиной полуокружности, отсюда $b^2 = \overline{AC}^2 - \overline{CO}^2 = (2R)^2 - R^2 = 4R^2 - R^2 = R^2$;$b = \sqrt{3R^2} = R\sqrt{3}$

[2]) Точное выражение $\pi = 3{,}1415926535$

Для определения величины относительной погрешности необходимо взять разность чисел точного и приближенного и разделить ее на первое

$$\text{для } \frac{22}{7} \text{ будет: } \frac{3{,}1428-3{,}1416}{3{,}1416}=\frac{0{,}0012}{3{,}1416}$$

т. е. ошибка, которую мы делаем взяв Архимедово число будет не более 12 десятитысячных, относительная-же ошибка, т. е. отношение ошибки к определяемому числу меньше 4 десятитысячных. Таким образом, если окружность равна 1 метру, то ошибка будет менее 0,4 миллм.

Взяв выражение $3+0{,}1\sqrt{2} = 3{,}14142$, определим относительную погрешность (с пятью десятичными знаками). Она равна

$$\frac{3{,}14159-3{,}14142}{3{,}14159}=\frac{0{,}00017}{3{,}14159}=0{,}0000541.$$

т. е. при длине окружности в один миллиметр ошибка будет менее 0,054 миллиметра.

Проф. **В В. Шкателов**.

Zur Frage über das Geradmachen der Peripherien und über die Approximationsgrösse π.

Zusammenfassung.

Es ist sehr beschwerlich eine Peripherie und die Grösse π zu konstruieren, und man muss eine Ablagerung dem Massstabe nach verrichten.

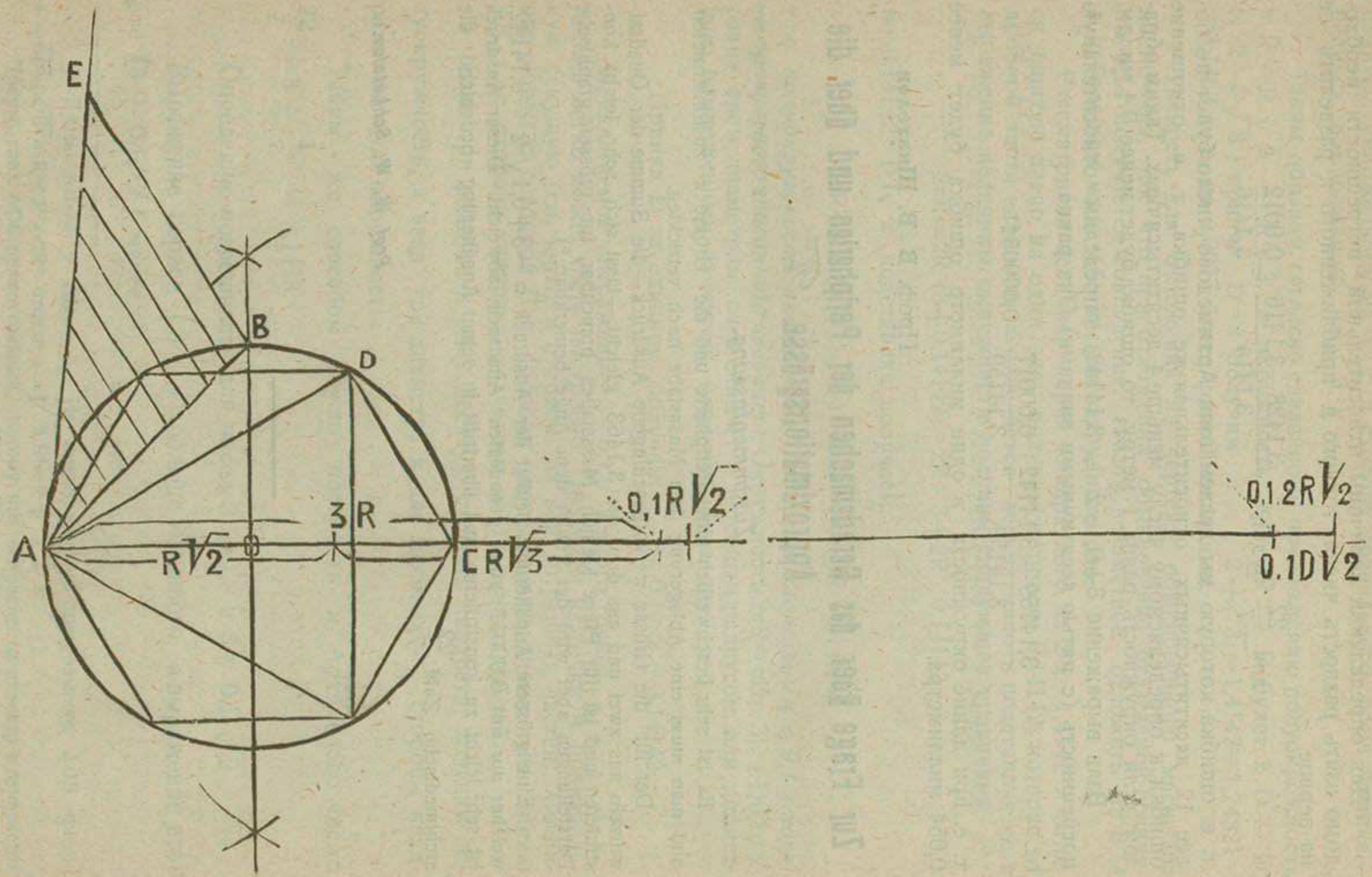
Der für die Grüsse π vorgeschlagene Ausdruck—die Summe der Quadratwurzeln aus zwei und aus drei, die 3,1463 gleicht,—lässt sich sehr leicht konstruieren und ist für Pläne kleinen Massstabes brauchbar, fur grössere graphische Darstellungen aber wird der Fehler dem Auge bemerkbar *).

Eine grössere Annäherung besitzt der Ausdruck $\pi = 3+0{,}1\sqrt{2} = 3{,}14142$, welcher nur mit 0,00017 vom genauesten Ausdruck abweicht. Dieser Ausdruck ist sehr leicht zu konstruieren und übertrifft in seiner Annäherung bedeutend die archimedische Zahl $\frac{22}{7}$.

*Prof **W. W. Schkatelov**.*

---

*) Bei einer 1 Meter langen Peripherie wird der Fehler etwas weniger als 1,5 mm. sein.


E
B
D
0,1R√2
0.12R√2
A
R√2
O
3R
CR√3
0.1D√2