УДК 519.233.3

Е. И. Блинова, доцент

ИССЛЕДОВАНИЕ МОЩНОСТИ СИММЕТРИЧНЫХ КРИТЕРИЕВ В ЗАДАЧЕ ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗЫ О СРЕДНЕМ ДВУМЕРНОГО НОРМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Let $\mathbf{y}$ be an observation of the random variable with two-dimensional normal distribution $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{I})$, $\boldsymbol{\mu}$ being an expectation and $\mathbf{I}$ being the identity covariance matrix. We study the power function for some symmetrical tests in the problem of testing the hypothesis $H_0: \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. The monotony of the power function is proved for the tests to be satisfied the «monotony» condition. The tests based on rectangular and l_p-elliptical acceptance regions are considered also.

Введение. Рассматривается задача проверки гипотезы о равенстве нулю математического ожидания двумерной нормально распределенной случайной величины по одному наблюдению. Обозначим через $\mathbf{y} = (y_1; y_2) \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{I})$ наблюдаемый двумерный вектор, имеющий нормальное распределение с математическим ожиданием $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1; \mu_2)$ и единичной ковариационной матрицей $\mathbf{I}$. Проверяется простая основная гипотеза $H_0 : \boldsymbol{\mu} = \mathbf{0} = (0; 0)$ против некоторой альтернативы H_1 при заданном уровне значимости α. (Напомним, что уровень значимости α есть вероятность ошибки 1-го рода, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_0, когда она верна.)

Статистическое правило принятия гипотезы H_0 по наблюдению $\mathbf{y}$ задается критической функцией $\psi(\mathbf{y})$, определяющей вероятность отвергнуть гипотезу H_0 при наблюдении $\mathbf{y}$. Функцией мощности критерия ψ называется

$$\beta_\psi(\boldsymbol{\mu}) = \mathbf{P}_\mu(H_0 \text{ отвергается}) = \iint \psi(\mathbf{y}) d\Phi_\mu,$$

т. е. вероятность отвергнуть основную гипотезу H_0, если $\mathbf{y} \in \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}; \mathbf{I})$. Задача проверки гипотезы заключается в выборе критерия ψ, позволяющего при фиксированном уровне значимости $\alpha = \beta_\psi(\mathbf{0})$ максимизировать мощность $\beta_\psi(\boldsymbol{\mu})$ для всех $\boldsymbol{\mu}$, соответствующих альтернативной гипотезе H_1.

Лемма Неймана – Пирсона дает конструктивное решение этой задачи в случае простой альтернативы $H_1 : \boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1; \lambda_2)$. Область принятия гипотезы H_0 в этом случае есть полуплоскость

$$\Theta = \{\mathbf{y} = (y_1; y_2) : \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 \le c(\alpha)\},$$

где $c(\alpha)$ определяется уровнем значимости α. В случае сложной (т. е. состоящей из более чем одного элемента) альтернативы H_1 решение задачи в такой постановке не всегда существует. В [1] показано, что полный класс критериев в рассматриваемой нами задаче составляет класс Ψ критериев вида

$$\psi(\mathbf{y}; \Theta) = \begin{cases} 0, \text{ если } \mathbf{y} \in \Theta, \\ 1, \text{ если } \mathbf{y} \notin \Theta, \end{cases} \qquad (1)$$

где область принятия Θ – замкнутое выпуклое множество. Это означает, что для любого критерия ψ_1 существует критерий ψ из класса Ψ, мажорирующий его в том смысле, что $\beta_{\psi_1}(\boldsymbol{\mu}) \le \beta_\psi(\boldsymbol{\mu})$ для всех $\boldsymbol{\mu}$ с равенством при $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$. При этом в [2], [3] показано, что если на поведение $\boldsymbol{\mu}$ при альтернативе накладывается дополнительное условие, т. е. $H_1 : \boldsymbol{\mu} \in \mathcal{M}$, где $\mathcal{M} \ne \mathbf{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$, то можно выделить более узкий полный класс критериев с областями принятия гипотезы, зависящими от вида множества альтернатив $\mathcal{M}$.

Основная часть. Настоящая работа посвящена изучению поведения функции мощности критериев с областями принятия, имеющими две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Обозначим $(\mu; \gamma)$ полярные координаты точки $\boldsymbol{\mu}$. Ясно, что для фиксированного критерия ψ мощность $\beta_\psi(\boldsymbol{\mu})$ возрастает при удалении альтернативы $\boldsymbol{\mu}$ от $\mathbf{0}$, если γ постоянно. Поэтому мы рассматриваем зависимость функции мощности от поворота альтернативы $\boldsymbol{\mu}$ (т. е. от полярного угла γ) при фиксированном μ: $\beta(\gamma) = \beta_\psi(\boldsymbol{\mu})$.

Утверждение 1. Пусть критерий ψ задается формулой (1) с областью принятия гипотезы

$$\Theta = \{\mathbf{y} = (\rho; \varphi) : \rho \le \rho(\varphi)\},$$

где $(\rho; \varphi)$ – полярные координаты точки $\mathbf{y}$. Граница $\rho = \rho(\varphi)$ области Θ обладает следующими свойствами:

1) $\rho(-\varphi) = \rho(\varphi)$ и $\rho\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) = \rho\left(\dfrac{\pi}{2} + \varphi\right)$, т. е. Θ симметрична относительно координатных осей Oy_1 и Oy_2;

2) функция $\rho = \rho(\varphi)$ строго возрастает на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$, т. е. существует обратная функция $\varphi = \varphi(\rho)$.

Тогда мощность критерия $\beta(\gamma) = \beta_\psi(\boldsymbol{\mu})$, рассматриваемая при фиксированном μ как функция полярного угла γ альтернативы $\boldsymbol{\mu} = (\mu; \gamma)$, монотонно убывает на $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Доказательство. Пусть Φ_γ – функция двумерного нормального распределения с математическим ожиданием $\boldsymbol{\mu}$ и единичной ковариационной матрицей $\mathbf{I}$; $(\mu; \gamma)$ – полярные координаты точки $\boldsymbol{\mu}$. Тогда функция мощности может быть записана в виде

$$\beta(\gamma)=1-\iint_\Theta d\Phi_\gamma =$$

$$=1-\frac{1}{2\pi}\iint_\Theta \rho\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}+\rho\mu\cos(\varphi-\gamma)\right\}d\varphi d\rho.$$

Дифференцируя по γ, получим

$$\frac{d}{d\gamma}\beta(\gamma)=-\frac{1}{2\pi}\iint_\Theta\Big[\rho^2\mu\sin(\varphi-\gamma)\times$$

$$\times\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}+\rho\mu\cos(\varphi-\gamma)\right\}\Big]d\varphi d\rho.$$

Обозначим

$$a=\min\rho(\gamma)=\rho(0);\quad b=\max\rho(\gamma)=\rho\left(\frac{\pi}{2}\right);$$

$\varphi_\rho=\varphi(\rho)$ – угол в 1-й четверти. Тогда, интегрируя по φ, имеем

$$\frac{d}{d\gamma}\beta(\gamma)=\frac{1}{2\pi}\int_0^a\rho\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}+\rho\mu\cos(\varphi-\gamma)\right\}\Bigg|_0^{2\pi}d\rho+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_a^b\rho\Bigg[\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}+\rho\mu\cos(\varphi-\gamma)\right\}\Bigg|_{\varphi_\rho}^{\pi-\varphi_\rho}+$$

$$+\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}+\rho\mu\cos(\varphi-\gamma)\right\}\Bigg|_{\pi+\varphi_\rho}^{2\pi-\varphi_\rho}\Bigg]d\rho.$$

Здесь первый интеграл равен 0, а второй, учитывая, что

$$\cos(\pi-\varphi_\rho-\gamma)=-\cos(\varphi_\rho+\gamma),$$

$$\cos(2\pi-\varphi_\rho-\gamma)=\cos(\varphi_\rho+\gamma),$$

$$\cos(\pi+\varphi_\rho-\gamma)=-\cos(\varphi_\rho-\gamma),$$

можно преобразовать к виду

$$\frac{d}{d\gamma}\beta(\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_a^b\Bigg[\rho\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}\right\}\times$$

$$\times\Big(\mathrm{ch}\big(\rho\mu\cos(\varphi_\rho+\gamma)\big)-\mathrm{ch}\big(\rho\mu\cos(\varphi_\rho-\gamma)\big)\Big)\Bigg]d\rho=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_a^b\Bigg[\rho\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}\right\}\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left(\frac{\rho\mu}{2}\big(\cos(\varphi_\rho+\gamma)+\cos(\varphi_\rho-\gamma)\big)\right)\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\left(\frac{\rho\mu}{2}\big(\cos(\varphi_\rho+\gamma)-\cos(\varphi_\rho-\gamma)\big)\right)\Bigg]d\rho=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_a^b\Bigg[\rho\exp\left\{-\frac{\rho^2+\mu^2}{2}\right\}\mathrm{sh}\big(\rho\mu\cos\varphi_\rho\cos\gamma\big)\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\big(-\rho\mu\sin\varphi_\rho\sin\gamma\big)\Bigg]d\rho.$$

Учитывая, что $\mathrm{sgn}\,\mathrm{sh}\,x=\mathrm{sgn}\,x$, определяем, что для γ из 1-й четверти подынтегральное выражение (а значит, и интеграл) отрицательно; для γ из 2-й четверти – положительно; для γ из 3-й четверти – отрицательно; для γ из 4-й четверти – положительно. Следовательно, справедливо утверждение теоремы относительно зависимости мощности критерия от γ; в частности, мощность критерия монотонно убывает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Если рассматривать симметричные относительно координатных осей множества альтернатив $\mathcal{M}$, условие (1) симметричности области принятия гипотезы Θ совершенно естественно. Однако условие (2) существенно ограничивает множество возможных областей принятия гипотезы. В частности, прямоугольники

$$\Theta_{ab}=\left\{\mathbf{y}=(y_1;y_2):|y_1|\le a,\ |y_2|\le b\right\}$$

не удовлетворяют условию (2) утверждения 1; l_p-эллиптические множества

$$\Theta=\left\{\mathbf{y}=(y_1;y_2):\left(\frac{|y_1|}{a}\right)^p+\left(\frac{|y_2|}{b}\right)^p\le 1\right\}$$

удовлетворяют условию (2) только при $p=2$ (Θ – эллипс). В этих случаях зависимость мощности от поворота альтернативы оказывается более сложной.

Для выяснения поведения функции мощности в наиболее простом случае прямоугольной области Θ_{ab} был проведен численный эксперимент с использованием пакета Excel. На рис. 1 и 2 представлены графики зависимости функции мощности $\beta(\gamma)$ от полярного угла альтернативы $\gamma\in[0;\pi]$ при $\mu=5$ для критериев уровня значимости $\alpha=0{,}025$: на рис. 1 для случая Θ – квадрат с $a=2{,}5$; на рис. 2 для случая прямоугольной области принятия Θ_{ab} с $a=2{,}3$; $b=2{,}9$.

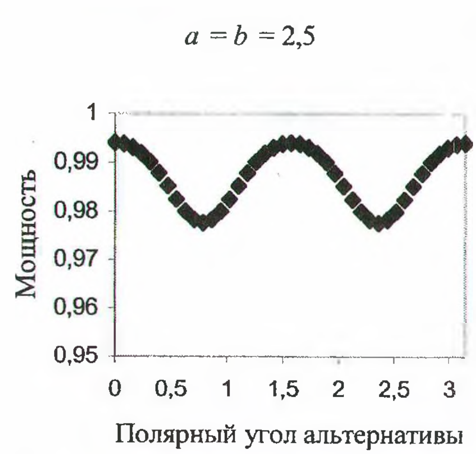

Рис. 1. Зависимость мощности $\beta(\gamma)$ от полярного угла альтернативы $\gamma\in[0;\pi]$ в случае Θ – квадрат, $a=2{,}5$; $\mu=5$; $\alpha=0{,}025$

$a = 2{,}3;\ b = 2{,}9$

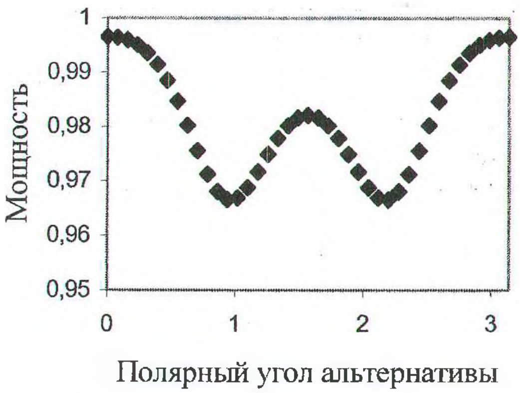

Рис. 2. Зависимость мощности $\beta(\gamma)$ от полярного угла альтернативы $\gamma \in [0; \pi]$ в случае Θ – прямоугольник, $a = 2{,}3$; $b = 2{,}9$; $\mu = 5$; $\alpha = 0{,}025$

Если $a = b$ (область принятия гипотезы – квадрат), то мощность $\beta(\gamma)$ убывает при $\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ и возрастает при $\gamma \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$, т. е. убывает (возрастает) при увеличении (уменьшении) полярного радиуса $\rho = \rho(\varphi)$ границы области Θ_{ab}. Если же $a \neq b$, то мощность также сперва убывает, а затем возрастает при $\gamma \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, однако точка ее минимума отличается от точки максимума границы $\rho = \rho(\varphi)$.

Таким образом, в общем случае нельзя утверждать, что мощность $\beta(\gamma)$ убывает (возрастает) при увеличении (уменьшении) полярного радиуса $\rho = \rho(\varphi)$ границы области Θ.

В утверждении 2 доказывается, что в задаче проверки гипотезы $H_0 : \boldsymbol{\mu} = (0; 0)$ против простой альтернативы $H_1 : \boldsymbol{\mu} = (\mu_1; 0)$ среди симметричных критериев более мощным является тот, у которого область принятия менее вытянута в направлении альтернативы.

Утверждение 2. Пусть критерии ψ_1 и ψ_2 имеют одинаковый уровень значимости α и задаются формулой (1) с l_p-эллиптическими областями принятия гипотезы

$$\Theta_i = \left\{ \mathbf{y} = (y_1; y_2) : \left(\frac{|y_1|}{a_i}\right)^p + \left(\frac{|y_2|}{b_i}\right)^p \le 1 \right\} (i = 1; 2),$$

где $0 < a_1 < a_2$, $0 < b_2 < b_1$. Тогда критерий ψ_1 является более мощным, чем ψ_2.

Доказательство. Обозначим Φ_0 и Φ_1 – функции двумерного нормального распределения, соответствующие основной ($\boldsymbol{\mu} = (0; 0)$) и альтернативной ($\boldsymbol{\mu} = (\mu_1; 0)$) гипотезам. Без ограничения общности можно считать $\mu_1 > 0$.

Пусть $\beta_i = 1 - \iint_{\Theta_i} d\Phi_1$ – мощность i-го критерия $(i = 1; 2)$. Обозначим $\widetilde{\beta}_i = 1 - \beta_i$. Тогда достаточно доказать, что

$$\widetilde{\beta}_1 - \widetilde{\beta}_2 = \iint_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} d\Phi_1 - \iint_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} d\Phi_1 < 0.$$

Подынтегральное выражение равно

$$d\Phi_1 = \exp\left\{-\frac{\mu_1^2}{2}\right\} \cdot \exp\{\mu_1 y_1\} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{y_1^2 + y_2^2}{2}\right\} dy_1 dy_2 = D \exp\{\mu_1 y_1\} \cdot d\Phi_0,$$

где $D = \exp\left\{-\frac{\mu_1^2}{2}\right\} = \text{const}$ – нормирующий множитель.

Воспользуемся леммой, которую докажем ниже.

Лемма.

$$\iint_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} (ky_1 + b) d\Phi_0 - \iint_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} (ky_1 + b) d\Phi_0 = 0. \quad (2)$$

Пусть $(\pm T; S)$ – точки пересечения границ областей Θ_1 и Θ_2, лежащие в 1-й и 2-й координатных четвертях, и пусть прямая $l(y_1) = ky_1 + b$ пересекает график функции $f(y_1) = D \exp\{\mu_1 y_1\}$ в точках $y_1 = \pm T$. Тогда прямые $y_1 = \pm T$ разбивают плоскость Oy_1y_2 на области знакопостоянства функции $f(y_1) - l(y_1)$. Поскольку область $\Theta_1 \setminus \Theta_2$ лежит в полосе $|y_1| < T$, где $f(y_1) - l(y_1) < 0$, то

$$\iint_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} (f(y_1) - l(y_1)) d\Phi_0 < 0.$$

Аналогично, так как область $\Theta_2 \setminus \Theta_1$ лежит в области $|y_1| > T$, то

$$\iint_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} (f(y_1) - l(y_1)) d\Phi_0 > 0.$$

В силу этого имеем

$$\widetilde{\beta}_1 - \widetilde{\beta}_2 =$$

$$= \iint_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} D \exp\{\mu_1 y_1\} d\Phi_0 - \iint_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} D \exp\{\mu_1 y_1\} d\Phi_0 =$$

$$= \iint_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} (D \exp\{\mu_1 y_1\} - ky_1 - b) d\Phi_0 -$$

$$\boxed{- \iint_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} (D \exp\{\mu_1 y_1\} - ky_1 - b) d\Phi_0 < 0}.$$

Следовательно, утверждение 2 доказано.

Доказательство леммы.

1. Равенство

$$\iint\limits_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} b d\Phi_0 - \iint\limits_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} b d\Phi_0 = 0$$

следует из того, что

$$\iint\limits_{\Theta_i} b d\Phi_0 = b(1-\alpha),$$

где α – уровень значимости, и

$$\iint\limits_{\Theta_1} b d\Phi_0 - \iint\limits_{\Theta_2} b d\Phi_0 = \iint\limits_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} b d\Phi_0 - \iint\limits_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} b d\Phi_0 = 0.$$

2. Равенство

$$\iint\limits_{\Theta_1 \setminus \Theta_2} k y_1 d\Phi_0 - \iint\limits_{\Theta_2 \setminus \Theta_1} k y_1 d\Phi_0 = 0$$

следует из того, что области интегрирования симметричны относительно оси Oy_2, а подынтегральная функция нечетна по переменной y_1. Равенство (2) доказано.

Следствие. Утверждение 2 справедливо, если области Θ_1 и Θ_2 принятия гипотезы обладают свойствами:

1) симметричны относительно координатных осей Oy_1 и Oy_2;

2) границы областей Θ_1 и Θ_2 в 1-й координатной четверти имеют единственную точку пересечения $(T; S)$, и прямоугольник $[-T; T] \times [-S; S]$ лежит внутри каждой из областей Θ_1 и Θ_2.

Заметим, что прямоугольники Θ_{ab} и l_p-эллиптические области удовлетворяют условиям следствия.

Заключение. Таким образом, исследована мощность критериев с областями принятия, имеющими две взаимно перпендикулярные оси симметрии. Доказано, что функция мощности критериев, удовлетворяющих определенному условию «монотонности», убывает (возрастает) при увеличении (уменьшении) полярного радиуса границы области принятия гипотезы. Приведены графики зависимости функции мощности от полярного угла альтернативы в случае прямоугольных областей Θ_{ab}. Для прямоугольных и l_p-эллиптических областей, которые не удовлетворяют условию «монотонности», но удовлетворяют условию «выпуклости», показано, что мощность критериев в направлении меньшей оси больше, чем в направлении большей.

Литература

1. Чибисов, Д. М. Теорема о допустимых критериях и ее применение к одной асимптотической задаче проверки гипотез / Д. М. Чибисов // Теория вероятностей и ее применения. – 1967. – Т. 12. – Вып. 1. – С. 96–111.

2. Бернштейн, А. В. О построении мажорирующих критериев / А. В. Бернштейн // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – Т. 25. – Вып. 1. – С. 18–29.

3. Бернштейн, А. В. Структура класса абсолютно допустимых критериев / А. В. Бернштейн // Теория вероятностей и ее применения. – 1983. – Т. 28. – Вып. 2. – С. 404–410.