УДК 517.977

В. М. Марченко, профессор; З. Зачкевич, магистр

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ НАБЛЮДАЕМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ГДР СИСТЕМ [1]

The paper considers the problem of relative observability for hybrid time invariant difference-differential dynamic systems, i. e. linear stationary differential-algebraic systems with delays (DAD systems), some variables of which being continuous the other – piecewise continuous. For solutions of systems under investigation, we present the determining equation algebraic techniques in order to obtain a series representation into solutions of their determining equations. Then several algebraic properties of the determining equation are studied, in particular, a generalization of the well-known Hamilton-Caley matrix theorem is given for the determining equation solutions and a finite number of generators in the span of determining equation solutions is established. As a result, we obtain effective parametric rank criteria for the relative observability of DAD systems.

Введение. При изучении реальных физических процессов наряду с динамическими (дифференциальными) встречаются и алгебраические (функциональные) зависимости. Такие процессы описываются дифференциально-алгебраическими (DAE) системами (отдельные уравнения которых являются дифференциальными, другие – алгебраическими). Эти системы относятся к классу гибридных. Следует, однако, признать, что термин «гибридные системы» перегружен (см., статьи [1, 2] и ссылки к ним).

В работе изучается проблема относительной наблюдаемости для гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем при наличии толчков, т. е. таких систем, в описании которых участвуют как дифференциальные, так и разностные уравнения; толчки при этом описываются также линейным разностным уравнением.

1. Предварительные сведения. Постановка задачи. История проблемы относительной наблюдаемости систем дифференциально-разностных уравнений (запаздывающего типа) датируется 1972 г. [3], где эффективный критерий условной (в терминологии авторов) наблюдаемости таких систем был представлен в терминах решений соответствующих определяющих уравнений.

Рассмотрим простейшую ГДР систему:

$$\dot{x}(t) = A_{11}x(t) + A_{12}y(t),\ \ t > 0, \qquad (1)$$

$$y(t) = A_{21}x(t) + A_{22}y(t-h),\ t \ge 0, \qquad (2)$$

$$x(jh+0) - x(jh-0) = A_{12}z(jh-h),\ j = 1,\ \dots,\ T_t, \qquad (3)$$

$$z(t) = A_{22}\ z(t-h),\ t \ge h, \qquad (4)$$

с выходом

$$g(t) = Bx(t) + By(t) + Bz(t). \qquad (5)$$

Здесь $x(t) \in \mathbf{R}^n$, $y(t) \in \mathbf{R}^m$, $z(t) \in \mathbf{R}^m$, $g(t) \in \mathbf{R}^r$, $t \ge 0$; $A_{11} \in \mathbf{R}^{n\times n}$, $A_{12} \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $A_{21} \in \mathbf{R}^{m\times n}$, $A_{22} \in \mathbf{R}^{m\times m}$, $B_1 \in \mathbf{R}^{n\times r}$, $B_2 \in \mathbf{R}^{m\times r}$; h – постоянное запаздывание, $h > 0$; $T_t = \left[\dfrac{t}{h}\right]$, где символ $[w]$ означает целую часть числа w. Будем считать решением системы (1)–(4) произвольные вектор-функции $x(\cdot)$, $y(\cdot)$, $z(\cdot)$, если они удовлетворяют уравнению (1) на интервалах $[jh,(j+1)h)$, $j = 1, \dots, T_t$, уравнению (2) – для всех $t \ge 0$, и уравнению (3) – в точках jh, $j = 1, \dots, T_t$.

Для системы (1)–(4) зададим начальные условия в виде

$$\begin{gathered} x(0+) = x(0) = x_0,\ z(0) = z_0,\ z(\xi) = 0,\ \xi < 0, \\ y(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in [-h,\ 0), \end{gathered} \qquad (6)$$

где $\psi \in PC([-h,0],\mathbf{R}^m)$, $PC([-h,0],\mathbf{R}^m)$ означает множество кусочно-непрерывных m-вектор-функций на промежутке $[-h,\ 0]$.

В работе исследуется задача интегрального представления решений ГДР систем вида (1)–(4), а также проблема конечномерной наблюдаемости системы (1)–(4) по выходу (5).

2. Алгебраические свойства решений определяющего уравнения. Введем определяющее уравнение системы (1)–(5)

$$X_k(t) = A_{11}X_{k-1}(t) + A_{12}Y_{k-1}(t) + U_{k-1}(t), \qquad (7)$$

$$Y_k(t) = A_{21}X_k(t) + A_{22}Y_k(t-h), \qquad (8)$$

$$Z(t) = A_{22}Z(t-h), \qquad (9)$$

$$G_k(t) = B_1X_k(t) + B_2Y_k(t),\ \ k = 0,1,\dots;\ \ t \ge 0, \qquad (10)$$

с начальными условиями $X_k(t) = 0, Y_k(t) = 0$, $Z(t) = 0, H_k(t) = 0$ для $t < 0$ или $k \le 0$; $Z(0) = I_m$, $U_0(0) = I_n, U_k(t) = 0$ для $t^2 + k^2 \ne 0$.

Легко заметить, что $X_k(t) = 0, Y_k(t) = 0$, $Z(t) = 0$, $G_k(t) = 0$ для $t \ne jh$, где $j = 0,1,\dots$; $k = 0,1,\dots$

Лемма 1. Имеют место тождества

$$(A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1}A_{21})^i \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} X_{i+1}(lh)\omega^l, i = 0,1,\dots$$

---

[1] Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

$$(I_m - \omega A_{22})^{-1} A_{21}(A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1} A_{21})^i \equiv$$
$$\equiv \sum_{l=0}^{+\infty} Y_{i+1}(lh)\omega^l, i = 0, 1, \ \ldots$$

Ниже приводятся некоторые важные свойства решений $G_k(t)$ и $Z(t)$. Введем обозначения

$$A(\omega) = (A_{11} + A_{12}(I_m - A_{22}\omega)^{-1} A_{21}) \in \mathbf{R}^{n\times n}[\omega],$$
$$B(\omega) = (B_1 + B_2(I_m - A_{22}\omega)^{-1} A_{21}) \in \mathbf{R}^{r\times n}[\omega].$$

Лемма 2. Справедливо тождество

$$B(\omega)\left(A(\omega)\right)^k = \sum_{j=0}^{\infty} G_{k+1}(jh)\omega^j, k = 0, 1, \ \ldots \quad (11)$$

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $A(\omega)$:

$$0 = \Delta(\lambda) = \det\left(\lambda I_n - A_{11} - A_{12}\left(I_m - A_{22}\omega\right)^{-1} A_{21}\right) =$$
$$= \frac{1}{(\alpha(\omega))^n} \det\left(\lambda\alpha(\omega) I_n - \alpha(\omega) A_{11} - A_{12} Q_1^*(\omega) A_{21}\right).$$

Здесь $Q_1^*(\omega) \in \mathbf{R}^{m\times m}[\omega]$ – присоединенная матрица для $\left(I_m - A_{22}\omega\right)$, т. е. $\left(I_m - A_{22}\omega\right)Q_1^*(\omega) = \alpha(\omega)$, где $\alpha(\omega) = \det\left(I_m - A_{22}\omega\right) \in \mathbf{R}^{1\times 1}[\omega]$.

Пусть $|\omega| < \omega_1$ для некоторого достаточно малого положительного числа ω_1. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{nm} r_{ij}\lambda^{n-i}\omega^j = 0, \quad (12)$$

где r_{ij} $(i = 0, 1, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, nm)$ – действительные числа, причем $r_{00} = 1$.

Уравнение (12) можно переписать в виде

$$\lambda^n = -\sum_{j=1}^{nm} r_{0j}\lambda^n\omega^j - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{nm} r_{ij}\lambda^{n-i}\omega^j, |\omega| < \omega_1. \quad (13)$$

Лемма 3. Решение определяющего уравнения в виде $\sum_{i=0}^{\xi} G_\eta((\xi - i)h) A_{12} Z(ih)$ удовлетворяет характеристическому уравнению (13), т. е.

$$\sum_{i=0}^{\xi} G_\eta((\xi - i)h) A_{12} Z(ih) =$$
$$= -\sum_{j=1}^{\theta_\xi} r_{0j} \sum_{i=0}^{\xi - j} G_\eta((\xi - j - i)h) A_{12} Z(ih) -$$
$$- \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\theta_\xi} r_{ij} \sum_{i=0}^{\xi - j} G_{\eta-k}((\xi - j - i)h) A_{12} Z(ih), \quad (14)$$

для $\eta = n+1, n+2, \ldots$ и $\xi = 0, 1, \ldots$; $\theta_\xi = \min\{\xi, nm\}$.

Леммы 1–2 можно доказать методом математической индукции. Доказательство леммы 3 основывается на известной из теории матриц теореме Гамильтона – Кэли.

3. Основные результаты.

3.1. Представление решений. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Решения системы (1)–(5) с начальными условиями (6) могут быть выражены следующими рядами по решениям определяющих уравнений (7)–(9) этих систем:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j \\ t-(i+j)h>0}} X_{k+1}(jh) A_{12}(A_{22})^{i+1} \times$$
$$\times \int_0^{t-(j+i)h} \frac{(t - (i+j)h - \tau)^k}{k!} \psi(\tau - h) d\tau +$$
$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{j \\ t-jh>0}} \frac{(t - jh)^k}{k!} X_{k+1}(jh) x_0 -$$
$$- \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j \\ t-(i+j+1)h>0}} \frac{(t - (i+j+1)h)^k}{k!} X_{k+1}(jh) A_{12} Z(ih) z_0,$$

$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j \\ t-(i+j)h>0}} Y_{k+1}(jh) A_{12}(A_{22})^{i+1} \times$$
$$\times \int_0^{t-(j+i)h} \frac{(t - (i+j)h - \tau)^k}{k!} \psi(\tau - h) d\tau +$$
$$+ \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{j \\ t-jh>0}} \frac{(t - jh)^k}{k!} Y_{k+1}(jh) x_0 + \sum_{i=0}^{+\infty} (A_{22})^{i+1} \psi(t - (i+1)h) -$$
$$- \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{\substack{i,j \\ t-(i+j+1)h>0}} \frac{(t - (i+j+1)h)^k}{k!} Y_{k+1}(jh) A_{12} Z(ih) z_0,$$

где полагается $\psi(\tau) = 0$ для $\tau \notin [-h, 0]$.

Схема доказательства. Применяя преобразование Лапласа, имеем:

$$L(\dot{x}(t))(s) = \int_0^{+\infty} \dot{x}(\tau) e^{-s\tau} d\tau = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_{kh}^{kh+h} \dot{x}(\tau) e^{-s\tau} d\tau =$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \left(x(kh + h - 0) e^{-s(kh+h)} - x(kh + 0) e^{-s(kh)} + \right.$$
$$\left. + s \int_{kh}^{kh+h} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau \right) = \lim_{k\to\infty} x(kh) e^{-s(kh)} - x_0 +$$
$$+ \sum_{k=1}^{+\infty} \left(x(kh - 0) e^{-s(kh)} - x(kh + 0) e^{-s(kh)} \right) +$$
$$+ s \int_0^{+\infty} x(\tau) e^{-s\tau} d\tau = s\breve{x}(s) - x_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_{12} z(kh - h) e^{-s(kh)} =$$
$$= s\breve{x}(s) - x_0 + A_{12} e^{-sh} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} (A_{22})^k z_0 e^{-s(kh)} \right) =$$
$$= s\breve{x}(s) - x_0 + A_{12} e^{-sh} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} Z(kh) z_0 e^{-s(kh)} \right),$$

$$\breve{y}(s) = \left(I_m - A_{22} e^{-sh}\right)^{-1} A_{21} \breve{x}(s) +$$
$$+ \left(I_m - A_{22} e^{-sh}\right)^{-1} A_{22} e^{-sh} \int_{-h}^{0} e^{-s\tau} \psi(\tau) d\tau,$$

$$\bar{x}(s)=\left(sI_x-A_{11}-A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{21}\right)^{-1}\times$$

$$\times\left(A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{22}e^{-sh}\int_{-h}^{0}e^{-s\tau}\psi(\tau)d\tau+x_0-\right.$$

$$\left.-A_{12}e^{-sh}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}Z(ih)z_0e^{-s(ih)}\right)\right)=$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\left(A_{11}+A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{21}\right)^{k}\times$$

$$\times\left(A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{22}e^{-sh}\int_{-h}^{0}e^{-s\tau}\psi(\tau)d\tau+x_0-\right.$$

$$\left.-A_{12}e^{-sh}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}Z(ih)e^{-s(ih)}\right)z_0\right).$$

В силу леммы 1 получаем

$$\breve{x}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-jsh}X_{k+1}(jh)A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left.\times A_{22}e^{-sh}\right)+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-jsh}X_{k+1}(jh)x_0-$$

$$-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-(i+j+1)sh}X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)z_0,$$

$$\breve{y}(s)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-jsh}Y_{k+1}(jh)A_{12}\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{22}e^{-sh}\times$$

$$\times\int_{-h}^{0}e^{-s\tau}\psi(\tau)d\tau+\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}e^{-jsh}Y_{k+1}(jh)x_0-$$

$$-\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{s^{k+1}}\sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty}e^{-(i+j+1)sh}Y_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)z_0+$$

$$+\left(I_m-A_{22}e^{-sh}\right)^{-1}A_{22}e^{-sh}\int_{-h}^{0}e^{-s\tau}\psi(\tau)d\tau.$$

Возвращаясь к оригиналам, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

3.2. Параметрический критерий относительной наблюдаемости. Введем обозначения:

$$D(\omega)=((I_m-A_{21}(I_n-A_{11}\omega)^{-1}A_{12})\in\mathbf{R}^{m\times m}[\omega],$$

$$F(\omega)=(B_1(I_n-A_{11}\omega)^{-1}A_{12}\omega+B_2)\in\mathbf{R}^{r\times m}[\omega],$$

$$C(\omega)=A_{21}(I_n-(A_{11}+A_{12}A_{21})\omega)^{-1}\in\mathbf{R}^{m\times n}[\omega].$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 4. Имеет место тождество [4]

$$F(\omega)\left(D(\omega)\right)^{j}C(\omega)=\sum_{k=1}^{\infty}G_k(jh)\omega^{k-1},\ j=1,2,\ \ldots(15)$$

Пусть $\beta(\omega)=\det\left(I_n-A_{11}\omega\right)$,

$$\mu(\omega)=\det\left(I_m\beta(\omega)-A_{21}Q_2^*(\omega)A_{12}\omega\right).$$

Пусть далее $Q_2^*(\omega)\in\mathbf{R}^{n\times n}[\omega]$ и $Q_3^*(\omega)\in\mathbf{R}^{m\times m}[\omega]$ – присоединенные матрицы для матриц $\left(I_n-A_{11}\omega\right)$ и $\left(I_m\beta(\omega)-A_{21}Q_2^*(\omega)A_{12}\omega\right)$ соответственно.

Рассмотрим характеристическое уравнение матрицы $D(\omega)$:

$$0=\Delta(\lambda)=\det\left(\lambda I_m-D(\omega)\right)=$$

$$=\det\left(\lambda I_m-\left(I_m-A_{21}\frac{Q_2^*(\omega)}{\beta(\omega)}A_{12}\omega\right)^{-1}A_{22}\right)=$$

$$=\det\left(\lambda I_m-\beta(\omega)\left(I_m\beta(\omega)-A_{21}Q_2^*(\omega)A_{12}\omega\right)^{-1}A_{22}\right)=$$

$$=\frac{1}{(\mu(\omega))^m}\det\left(\lambda\mu(\omega)I_m-\beta(\omega)Q_3^*(\omega)A_{22}\right),$$

что при достаточно малом положительном числе ω_1 эквивалентно уравнению

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{nm^2}p_{ij}\lambda^{m-i}\omega^{j}=0,\ |\omega|<\omega_1,\ p_{00}=1.\ (16)$$

Представим (16) в виде

$$\lambda^m=-\sum_{j=1}^{nm^2}p_{0j}\lambda^m\omega^j-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{nm^2}p_{ij}\lambda^{m-i}\omega^j.$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 5. Решения определяющих уравнений (9) и (10) удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{\nu+1}G_k((\nu+1-i)h)A_{12}Z(ih)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{\min\{k,\,nm^2\}}r_{0j}\sum_{i=0}^{\nu+1}G_{k-j}((\nu+1-i)h)A_{12}Z(ih)-$$

$$-\sum_{l=1}^{n}\sum_{j=0}^{\min\{k,\,nm^2\}}r_{lj}\sum_{i=0}^{\nu+1-l}G_{k-j}((\nu+1-l-i)h)A_{12}Z(ih).$$

Доказательство леммы 5, как и леммы 3, основывается на теореме Гамильтона – Кэли и предоставляется читателю.

Обозначим символами $x(t,\psi,x_0,z_0)$, $y(t,\psi,x_0,z_0)$, $z(t,\psi,x_0,z_0)$ решение при $t\geq 0$ системы (1)–(4), соответствующее начальному условию (6). Аналогично через $g(t)=g(t,\psi,x_0,z_0)$, $\bar{g}(t)=\bar{g}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$ обозначим выходы (5), соответствующие решению $x(t,\psi,x_0,z_0)$, $y(t,\psi,x_0,z_0)$, $z(t,\psi,x_0,z_0)$ и $\bar{x}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$, $\bar{y}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$, $\bar{z}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$.

Определение. Система (1)–(5) называется $\mathbf{R}^n$-наблюдаемой относительно z, если из выполнения условия $g(t,\psi,x_0,z_0)=\bar{g}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$ при каждой вектор-функции $\psi\in PC([-h,0),\mathbf{R}^m)$ для $t\geq 0$, где $z_0,\bar{z}_0\in\mathbf{R}^m$, $x_0\in\mathbf{R}^n$, вытекает также, что $z_0=\bar{z}_0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Система (1)–(5) является $\mathbf{R}^n$-наблюдаемой тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2 Z(kh) \\ k=0,\dots,m \\ \sum_{i=0}^{\xi} G_\eta((\xi-i)h)A_{12}Z(ih) \\ \xi=0,\dots,m;\ \eta=1,\dots,n; \end{bmatrix} = m. \quad (17)$$

Схема доказательства. В силу теоремы 1 $g(t,\psi,x_0,z_0)=\bar{g}(t,\psi,x_0,\bar{z}_0)$ при каждой функции $\psi \in PC([-h,\ 0),\ \mathbf{R}^m)$, $x_0 \in \mathbf{R}^n$, для $t \geq 0$ означает

$$B_1\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)z_0+$$

$$+B_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)z_0+B_2z(t)=$$

$$=B_1\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)\tilde{z}_0+$$

$$+B_2\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)\bar{z}_0+B_2\bar{z}(t).$$

Поскольку $z(t)=0,\ t\neq jh,\ j=0,1,\ \dots,$ то

$$B_2z(jh)=B_2\bar{z}(jh)\Rightarrow B_2(z(jh)-\bar{z}(jh))=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B_2(A_{22})^j(z_0-\tilde{z}_0)=0,\ j=0,1,\ \dots; \quad (18)$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}\big(B_1X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)+$$

$$+B_2Y_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)\big)z_0=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}\times$$

$$\times\big(B_1X_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)+B_2Y_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)\big)\bar{z}_0.$$

Отсюда получаем

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}\begin{bmatrix}B_1 & B_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{k+1}(jh)\\ Y_{k+1}(jh)\end{bmatrix}\times$$

$$\times A_{12}Z(ih)(z_0-\tilde{z}_0)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i,j\\ t-(i+j+1)h>0}}\frac{(t-(i+j+1)h)^k}{k!}\times$$

$$\times G_{k+1}(jh)A_{12}Z(ih)(z_0-\tilde{z}_0)=0.$$

Так как вектор-функции $\sum_{i=0}^{l}\big(G_{k+1}((l-i)h)\times A_{12}Z(ih)\big)$ линейно независимы ($l=0,1,\ \dots;$ $k=0,1,\ \dots$), и поскольку в силу лемм 3 и 5 вектор-функции $\sum_{i=0}^{j}G_k((j-i)h)A_{12}Z(ih)$ при $k>n-1$, $j>m$ являются линейными комбинациями $\sum_{i=0}^{\xi}G_\eta((\xi-i)h)A_{12}Z(ih)$ при $\eta=1,2,\ \dots,n;\ \xi=0,1,\ \dots,m,$ то на этом доказательство теоремы 2 завершается.

Полученные результаты проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. Рассмотрим систему (1)–(5) с матрицами

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1 & -6\\ \frac{-3403541}{726} & 5\end{bmatrix},A_{12}=\begin{bmatrix}9 & 3 & 12\\ \frac{10267}{66} & \frac{-3277}{22} & 121\end{bmatrix},$$

$$A_{21}=\begin{bmatrix}11 & 3\\ -2 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix},A_{22}=\begin{bmatrix}1 & 4 & 5\\ 1 & 1 & \frac{19}{2}\\ 2 & 4 & 2\end{bmatrix},$$

$$B_1=\begin{bmatrix}\frac{-1823}{11} & 6\end{bmatrix},B_2=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}.$$

Условие (18) принимает вид

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2Z(kh) \\ k=0,\ \dots,\ m \\ \sum_{i=0}^{\xi}G_\eta((\xi-i)h)A_{12}Z(ih) \\ \xi=0,\ \dots,m;\ \eta=1,\ \dots,n \end{bmatrix}=2.$$

Следовательно, система является $\mathbf{R}^n$-наблюдаемой относительно z.

Пример 2. Рассмотрим систему (1) – (5) вида

$$x(t)=\begin{bmatrix}-3 & 7\\ 8 & 3\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}y(t),$$

$$y(t)=\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & -1\end{bmatrix}x(t)+\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}y(t-h),$$

$$x(jh)-x(jh-0)=\begin{bmatrix}3 & 7\\ 2 & 3\end{bmatrix}z(jh-h),\ j=1,\ \dots,\ T_t,$$

$$z(t)=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}z(t-h),\ t\geq h,$$

$$g(t)=\begin{bmatrix}-8 & 6\end{bmatrix}x(t)+B_2y(t)+\begin{bmatrix}2 & 0\end{bmatrix}z(t).$$

Проверим условие (18):

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} B_2Z(kh) \\ k=0,\dots,m \\ \sum_{i=0}^{\xi}G_\eta((\xi-1)h)A_{12}Z(ih) \\ \xi=0,\dots,m;\ \eta=1,\dots,n \end{bmatrix}=1.$$

Таким образом, система не является $\mathbf{R}^n$-наблюдаемой относительно z.

Заключение. В работе рассмотрена простейшая гибридная дифференциально-алгебраическая система наблюдения с запаздывающим аргументом при наличии скачков. Для такой системы введено определяющее уравнение, исследованы алгебраические свойства решений определяющего уравнения, получены представления решения гибридных систем в виде ряда по решениям их определяющих уравнений. В качестве следствия выявлен эффективный параметрический критерий наблюдаемости относительно дискретной переменной *z* для таких систем. Полученные результаты могут быть распространены на другие виды конечномерной наблюдаемости систем вида (1)–(5), а также обобщены на гибридные системы со многими запаздываниями по состоянию и по выходу. Некоторые результаты в этом направлении и нерешенные проблемы можно найти в работах [2, 4, 5].

Литература

1. Марченко, В. М. Линейные стационарные управляемые ГДР системы со случайными возмущениями / В. М. Марченко, Е. И. Блинова // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2007. – Вып. XV. – С. 3–6.

2. Марченко, В. М. Некоторые нерешенные задачи в теории управляемых динамических ГДР систем / В. М. Марченко // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информ. – 2006. – Вып. XIV. – С. 3–6.

3. Условная наблюдаемость линейных систем / Р. Габасов [и др.] // Problems of control and information theory. – 1972. – Vol. 1, № 3. – P. 217–238.

4. Marchenko, V. M. On the observability of linear differential-algebraic systems with delays / V. M. Marchenko, O. N. Poddubnaya, Z. Zaczkiewicz // IEEE Trans. Automat. Control. – 2006. – Vol. 51, № 8. – P. 1387–1392.

5. Марченко, В. М. Представление решений и относительная управляемость линейных дифференциально-алгебраических систем со многими запаздываниями / В. М. Марченко, О. Н. Поддубная // Доклады РАН. – 2005. – Т. 404, № 4. – С. 465–469.