УДК 681.3, 681.55

О. В. Герман, канд. техн. наук; Н. Н. Дорожкина, канд. физ.-мат. наук

МАШИНА ВЫВОДА ДЛЯ ТРЕХЗНАЧНОГО ЛОГИЧЕСКОГО ИСЧИСЛЕНИЯ Я. ЛУКАСЕВИЧА

The question about realization of the inference machine for multiple-valued logics is considered. The realization is based on the introduction of "intermediate" vector logic and assignment of the negation operation in this logic in a specific way.

Введение

В статье строится двоичное исчисление, эквивалентное трехзначному логическому исчислению Я. Лукасевича со значениями истинности 0, ½, 1 и операциями &, $\vee$, $\neg$ (отрицание), $\rightarrow$ (импликация) и $\leftrightarrow$ (эквиваленция). Проблема построения выводов и доказательств формул типа $a \rightarrow b$ в таком исчислении решается уже классическим образом [1]. Описанный здесь способ сведения трехзначного исчисления к двоичному может быть обобщен на логики с большими, чем три, числами значений истинности. Это обстоятельство свидетельствует в пользу тезиса Р. Сушко [2], согласно которому любая k-значная логика ($k > 2$) может быть сведена к эквивалентной двузначной логике. Многие понятия, которые используются в этой статье, можно найти в [3, 4].

Достижение поставленной цели оказывается возможным, если ввести в рассмотрение «промежуточную» векторную логику и задать определенным образом операцию отрицания в ней. Именно от задания операции отрицания можно получить «связующую» нить от двузначной к многозначной логике. В этой статье мы даем решение о способе построения операции отрицания не только для трехзначной логики Я. Лукасевича, но и для четырехзначной и пятизначной. Впрочем, порядок можно увеличить, однако, это, несомненно, требует отдельного рассмотрения.

Авторы надеются, что представленный в статье материал, окажется не специфическим, но некоторым общим подходом к решению проблемы вывода в k-значных логиках.

1. Основные определения

Пусть x, y,…z – переменные трехзначного исчисления Я. Лукасевича, т. е. их значения определяются на упорядоченном множестве $0 < ½ < 1$. Значения истинности для логических операций задаются традиционным образом:

$$
\begin{gathered}
val(x \vee y) = \max(val(x); val(y)),\\
val(x \& y) = \min(val(x); val(y)),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

$$
val(\neg x) = \begin{cases} 1, \text{если } val(x) = 0,\\ \frac{1}{2}, \text{если } val(x) = \frac{1}{2},\\ 0, \text{если } val(x) = 1, \end{cases}
$$

где $val(\varphi)$ – значение истинности формулы φ.

Пусть α и β – формулы.

Тогда $\alpha \rightarrow \beta$, если $val(\alpha) \le val(\beta)$ на любых наборах истинности значений переменных, входящих в α и β.

Обозначим

$\alpha[\mu_\alpha]$

формулу, допускающую только такие наборы I, для которых

$val_I(\alpha) \ge \mu_\alpha$.

Определение. Формула

$\varepsilon[\mu_\varepsilon]$

выводима из формул

$\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$

тогда и только тогда, когда можно доказать, что любой набор I, который допускают сразу все формулы

$\alpha_1[\mu_1],...,\alpha_k[\mu_k]$,

допускает также формула

$\varepsilon[\mu_\varepsilon]$.

Ясно, что

$$
\alpha_1 \& \alpha_2 \& ... \& \alpha_k \rightarrow \varepsilon \tag{2}
$$

равносильно

$\alpha_1[0], \alpha_2[0],...,\alpha_k[0] \vdash$

$\varepsilon[\min\{val(\alpha_1),...,val(\alpha_k)\}]$,

где $\vdash$ – символ выводимости.

Следовательно (2) есть лишь частный случай выводимости в k-значной логике ($k \ge 3$).

Следование $\alpha \rightarrow \beta$ понимается так, что на любом наборе I, где $val(\alpha \rightarrow \beta) = 1$, имеет место $val(\alpha) \le val(\beta)$. Для двузначной логики выводимость ($\alpha \vdash \beta$) и следование ($\alpha \rightarrow \beta$) эквивалентные понятия. В многозначной ($k > 2$) логике также справедлива теорема.

Теорема.

$\alpha[\mu_\alpha] \rightarrow \beta[\mu_\beta] \equiv \alpha[\mu_\alpha] \vdash \beta[\mu_\beta]$

Доказательство.

1) Пусть $\alpha[\mu_\alpha] \rightarrow \beta[\mu_\beta]$.

Это значит, что на любом наборе I, где $val_I(\alpha) \ge \mu_\alpha$, имеет место $val_I(\beta) \ge \mu_\beta$.

Но тогда эта формула доказуема, так как таблица истинности конечна. Следовательно

$\alpha[\mu_\alpha] \vdash \beta[\mu_\beta]$.

2) Пусть $\alpha[\mu_\alpha] \vdash \beta[\mu_\beta]$.

Тогда

$\alpha[\mu_\alpha] \to \beta[\mu_\beta]$

в силу определения следования.

Перейдем к построению машины вывода.

2. Машина вывода

Будем интерпретировать формулы трехзначного исчисления векторными формулами с аргументами, представляющими обычные двухзначные формулы или константы 0, 1. Обозначим векторную формулу

$v = (v_1, v_2)$.

Определим для векторной формулы v следующие соотношения:

$v = 1$ равносильно $(v_1 = 1, v_2 = 1)$,

$v = 0$ равносильно $(v_1 = 0, v_2 = 0)$, (3)

$v = \frac{1}{2}$ равносильно $(v_1 = 1, v_2 = 0)$,

$\neg v$ равносильно $(\neg v_2, \neg v_1)$, (4)

$v \,\&\, w$ равносильно $(v_1 \,\&\, w_1, v_2 \,\&\, w_2)$, (5)

$v \vee w$ равносильно $(v_1 \vee w_1, v_2 \vee w_2)$, (6)

$v \to w$ равносильно системе формул $v_i \to w_i$ для $\forall i = 1, 2$, (7)

$v[\mu_v]$ равносильно дизъюнкции наборов $I_1 \vee I_2 \vee \ldots \vee I_t$, которые допускает формула $v[\mu_v]$. (8)

Замечание. Очевидным образом предполагается, что для любой векторной формулы α выполняется условие

$\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$,

которое не допускает набор $\alpha = <0, 1>$, не участвующий в определении (3).

Рассмотрим следующий пример, разъясняющий суть вопроса.

Пример 1. Доказать или опровергнуть, что из формул

$\alpha \vee \beta \;\; [\mu = 1]$,

$\overline{\alpha} \vee \beta \;\; [\mu \geq 0{,}5]$

выводима формула

$\beta \;\; [\mu \geq 0{,}5]$.

Перепишем $\alpha \vee \beta$ в векторном виде:

$(\alpha_1, \alpha_2) \vee (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = (1,\ 1)$.

Поскольку по условию мера этой формулы равна 1, то имеем

$\alpha_1 \vee \beta_1$,

$\alpha_2 \vee \beta_2$.

Вторая формула записывается так

$$(\neg\alpha_1, \neg\alpha_2) \vee (\beta_1, \beta_2) = \\ = (\neg\alpha_2 \vee \beta_1, \neg\alpha_1 \vee \beta_2) = (1, 0) \vee (1, 1).$$

Отсюда получаем

$\neg\alpha_2 \vee \beta_1$

и в совокупности с предыдущими формулами имеем систему посылок:

$\neg\alpha_2 \vee \beta_1$,

$\alpha_1 \vee \beta_1$,

$\alpha_2 \vee \beta_2$,

$\alpha_1 \vee \neg\alpha_2$,

$\beta_1 \vee \neg\beta_2$,

из которых нужно вывести

$\beta = (\beta_1, \beta_2) = (1, 0) \vee (1, 1)$, т. е. формулу β_1.

Убеждаемся средствами обычной двузначной логики, что выводимость действительно имеет место.

Пример 2. Доказать или опровергнуть, что из формул

$\alpha \vee \beta \;\; [\mu \geq 0]$,

$\overline{\alpha} \;\; [\mu \geq 0]$

выводима формула

$\beta \;\; [\mu \geq \min\{val(\alpha \vee \beta); val(\neg\alpha)\}]$.

Имеем

$$(\alpha \vee \beta) = (\alpha_1 \vee \beta_1, \alpha_2 \vee \beta_2) = \\ = (0, 0) \vee (1, 0) \vee (1, 1),$$

что дает

$\alpha_1 \vee \beta_1 \vee \neg(\alpha_2 \vee \beta_2)$,

$\neg\alpha = (\neg\alpha_2, \neg\alpha_1) = (0, 0) \vee (1, 0) \vee (1, 1)$,

что дает

$\neg\alpha_2 \vee \alpha_1$.

Доказываемое условие равносильно

$(\alpha \vee \beta) \,\&\, \overline{\alpha} \to \beta$,

что дает по определению

$\overline{\alpha_2} \,\&\, (\alpha_1 \vee \beta_1) \to \beta_1$,

$\overline{\alpha_1} \,\&\, (\alpha_2 \vee \beta_2) \to \beta_2$.

Итак, общая система посылок такова:

$\beta_1 \vee \neg\beta_2$,

$\alpha_1 \vee \beta_1 \vee \neg(\alpha_2 \vee \beta_2)$,

$\neg\alpha_2 \vee \alpha_1$.

Доказываем:

$\neg\alpha_2 \,\&\, (\alpha_1 \vee \beta_1) \to \beta_1$,

$\neg\alpha_1 \,\&\, (\alpha_2 \vee \beta_2) \to \beta_2$,

откуда легко установить, что выводимость места не имеет.

Теперь мы формализуем описание машины вывода.

1. Каждое доказываемое утверждение имеет следующий вид:

$\alpha_1[\mu_1] \,\&\, ... \,\&\, \alpha_z[\mu_z] \to \beta[\mu_\beta]$.

2. В соответствии с правилами представления векторных формул записываем систему посылок и заключение.

3. Выполняем доказательство средствами обычной двузначной логики.

Доказательство импликаций вида

$\alpha_1 \,\&\, \alpha_2 \,\&\, ... \,\&\, \alpha_n \to \beta_1 \vee \beta_2 \vee ... \vee \beta_m$

реализуется следующим образом. Каждая формула α_i, β_j представляется как векторная. Следовательно, доказывается поразрядно. При этом учитывается ограничение на допустимость интерпретаций для формулы $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ в форме $\alpha_1 \vee \overline{\alpha_2}$.

Пример 3. Доказать или опровергнуть импликацию

$(\alpha \vee \beta) \,\&\, (\neg\alpha) \to \beta$.

Имеем

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$,

$\beta = (\beta_1, \beta_2)$,

$\neg\alpha = (\neg\alpha_2, \neg\alpha_1)$,

$\neg\beta = (\neg\beta_2, \neg\beta_1)$.

Записываем следование для первого разряда

$(\alpha_1 \vee \beta_1) \,\&\, \neg\alpha_2 \,\&\, (\alpha_1 \vee \overline{\alpha_2}) \to \beta_1$.

Нетрудно видеть, что следование не имеет места.

Заключение

Описанный подход сравнительно легко обобщается на k-значные логики с $k > 3$. Проблема состоит лишь в представлении отрицания соответствующей векторной формулы. Например, для $k = 4$ используем векторные формулы вида

$v = (v_1, v_2, v_3)$

с операцией отрицания:

$\neg v = (\neg v_1, \neg v_3, \neg v_2)$

для решений истинности

$v = 0 \leftrightarrow (0,0,0)$,

$v = 1 \leftrightarrow (0,1,0)$,

$v = 2 \leftrightarrow (1,1,0)$,

$v = 3 \leftrightarrow (1,1,1)$.

Для $k = 5$ используем формулы вида

$v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$

и

$\neg v = (\neg v_2, \neg v_1, \neg v_4, \neg v_3)$

для

$v = 0 \leftrightarrow (0,0,0,0)$,

$v = 1 \leftrightarrow (0,0,1,0)$,

$v = 2 \leftrightarrow (1,0,1,0)$,

$v = 3 \leftrightarrow (1,1,1,0)$,

$v = 4 \leftrightarrow (1,1,1,1)$.

Литература

1. Чень Ч., Ли Р. Математическая логика и автоматическое доказательство теорем. – М.: Наука, 1983. – С. 358.

2. Карпенко А. С. Логики Лукасевича и простые числа. – М.: Наука, 2000. – С. 320.

3. Герман О. В., Линник А. А. Логическое исчисление, использующее нечеткие формулы // Вестник БНТУ. – 2005. – № 5. – С. 55–59.

4. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – С. 412.