УДК 537.1

Н. А. Ахраменко, доцент (БелГут); Л. М. Булавко, ст. преподаватель (БелГут);
В. Я. Матюшенко, профессор (БелГут)

ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЭНЕРГИИ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ СФЕРЫ

Calculation intensity of the electric field was examined for cases when charges disposed on the surfaces and near the surfaces. The law of conservation of energy was used in the study of intensity of the electric field for sphere.

В курсе общей физики существенное место занимают задачи на определение напряженности электростатического поля системы распределенных зарядов. В качестве примера рассмотрим задачу по расчету характеристик в вакууме поля равномерно заряженной сферы как весьма значимую с научно-методической и практической точек зрения. Методика решения этой задачи, приводимая в [1–13], базируется на использовании теоремы Остроградского Гаусса для электрического поля в вакууме либо в диэлектрической среде. При этом получаются выражения для величины напряженности E электрического поля внутри сферы, а также вне ее.

Для определения напряженности электрического поля в точках, принадлежащих поверхности сферы, воспользуемся законом сохранения энергии. Вообразим проводящую сферу радиуса R с равномерно распределенным зарядом q (рис. 1).

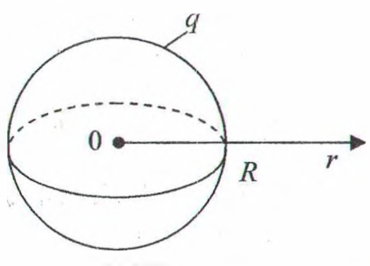

Рис. 1. Равномерно заряженная сфера радиусом R

Каждый элемент поверхности сферы взаимодействует с остальными элементами согласно закону Кулона. Пусть под действием сил взаимного отталкивания зарядов сфера увеличилась и ее радиус стал равным $R + \Delta r$ (рис. 2).

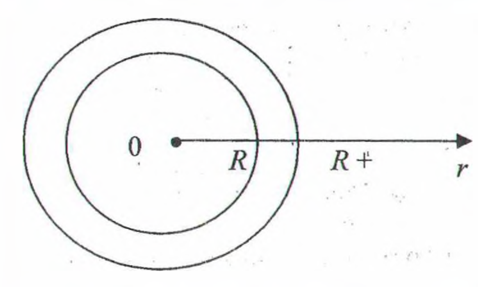

Рис. 2. Увеличение радиуса равномерно заряженной сферы до радиуса $R + \Delta r$

Начальная потенциальная энергия заряженной сферы

$$W_1 = \frac{q^2}{2C_1},$$

конечная потенциальная энергия заряженной сферы

$$W_2 = \frac{q^2}{2C_2},$$

где $C_1 = 4\pi\varepsilon_0 R$ и $C_2 = 4\pi\varepsilon_0 (R + \Delta r)$ – начальная и конечная электроемкости сферы.

В результате увеличения радиуса потенциальная энергия заряженной сферы уменьшилась на величину

$$\Delta W = \frac{q^2}{2C_1} - \frac{q^2}{2C_2}. \quad (1)$$

Подставив начальную и конечную электроемкости сферы в формулу (1), получим

$$\Delta W = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 (R + \Delta r)} = \frac{q^2 \Delta r}{8\pi\varepsilon_0 R (R + \Delta r)}. \quad (2)$$

При $\Delta r \ll R$ можно выражение (2) разложить в ряд по Δr и ограничится линейным приближением, т. е.

$$\Delta W \approx \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2} \Delta r.$$

Найдем работу, совершаемую при раздвижении зарядов. Выделим элемент поверхности сферы площадью dS. На него действует радиальная сила

$$dF = E\sigma dS,$$

где $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$ – поверхностная плотность заряда на сфере; E – напряженность на поверхности сферы.

Работа, совершаемая по перемещению этого элемента

$$\delta A = E\sigma dS \Delta r. \quad (3)$$

Перемещение Δr выбираем малым по величине, чтобы при смещении элемента поверхности сферы площадью dS от R до $R + \Delta r$ напряженность поля E на поверхности сферы можно было бы считать постоянной.

Всю работу, совершаемую при увеличении сферы, находим в результате интегрирования (3) по поверхности сферы:

$$\Delta A = \int\limits_{(S)} E\sigma dS\Delta r = E\sigma\Delta r \int\limits_{(S)} dS = E\sigma S\Delta r = Eq\Delta r .$$

Так как работа совершается за счет убыли потенциальной энергии, то

$$\Delta A = \Delta W .$$

Отсюда, подставив ΔA и ΔW, получим

$$Eq\Delta r = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\Delta r, \text{ или } E = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2} . \qquad (4)$$

Из проведенных исследований следует, что величина напряженности электрического поля на поверхности сферы не равна величине напряженности электрического поля как вблизи внешней поверхности сферы, так и вблизи ее внутренней поверхности.

С учетом выражений напряженностей электрического поля вне поверхности сферы и внутри график зависимости величины напряженности электрического поля от расстояния до исследуемой точки представлен на рис. 3.

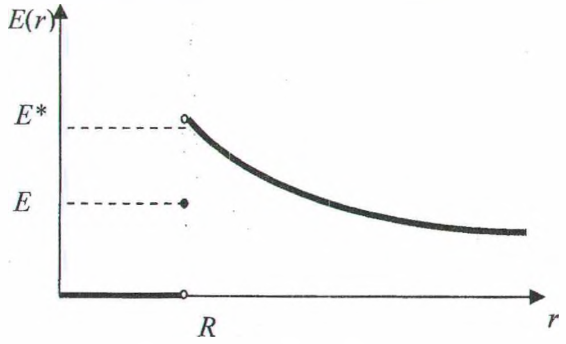

Рис. 3. Зависимость напряженности электрического поля от расстояния до исследуемой точки

Таким образом, определение напряженности электрического поля исходя из закона сохранения энергии показывает, что напряженность поля на поверхности сферы в два раза меньше, чем вблизи внешней поверхности ($E = E^*/2$).

Аналогичный результат был получен при непосредственном использовании принципа суперпозиции в случае расчета напряженности электрического поля сферы [14].

Зная напряженность поля, можно найти силу, действующую на элемент поверхности площадью ΔS с поверхностной плотностью заряда σ: σ

$$f = E\sigma\Delta S = \frac{q\sigma}{8\pi\varepsilon_0 R^2}\Delta S .$$

Учитывая, что $\sigma = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$, получим

$$f = \frac{\sigma^2}{2}\Delta S . \qquad (5)$$

График зависимости величины напряженности электрического поля претерпевает разрыв и, что особенно важно, включает обособленную точку (черная точка на рис. 3).

Выберем на сфере т. B. Пусть она является центром бесконечно малой окружности, расположенной на сфере. Выберем также т. A и т. C, расположенные бесконечно близко слева и справа от т. B (рис. 4).

Напряженность поля в окрестности т. B можно рассматривать как результат суперпозиции напряженностей полей выбранного бесконечно малого элемента и оставшейся части сферы.

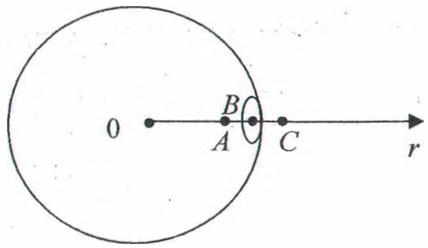

Рис. 4. Бесконечно малый элемент поверхности сферы с центром в т. B

Бесконечно малый элемент с центром в т. B можно рассматривать как часть плоскости. Если устремить т. A и т. C к т. B, то поле, создаваемое выбранным элементом, можно принять равным полю плоскости (при этом, конечно, размеры выбранного элемента намного больше расстояния от т. A и т. C до т. B (рис. 5)).

Напряженность поля, создаваемая плоскостью

$$E_{\text{пл}} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

С учетом этого напряженность поля слева от т. B будет равной

$$E_A = E_1 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где E_1 – напряженность поля, создаваемая оставшейся частью сферы в окрестности т. B.

Напряженность поля справа от т. B будет равной $E_C = E_1 + \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$.

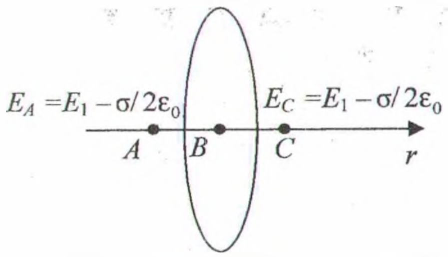

Рис. 5. Напряженность поля слева и справа от т. B

Из последних двух соотношений найдем напряженность поля, создаваемую оставшейся частью сферы в окрестности т. B

$$E_1 = \frac{1}{2}(E_A + E_C).$$

Так как напряженность поля внутри сферы равна нулю ($E_A = 0$), а напряженность поля вне сферы равна $E_C = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ (бесконечно близко к поверхности), то получим

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right) = \frac{q}{8\pi\varepsilon_0 R^2}.$$

В предельном переходе, т. е. когда т. A и т. C устремятся к т. B, а выбранный элемент в виде окружности также преобразуется в т. B, получим, что найденное значение E_1 и будет значением напряженности электрического поля в точках, принадлежащих поверхности сферы. Из этих соображений следует, что наличие обособленной точки на графике (рис. 3) является отражением того обстоятельства, что такая точка присутствует на графике напряженности поля, равномерно заряженной плоскости (рис. 6). Действительно, черная точка в начале координат говорит о том, что напряженность поля в точках, принадлежащих плоскости, равна нулю (такой вывод можно сделать из соображений симметрии).

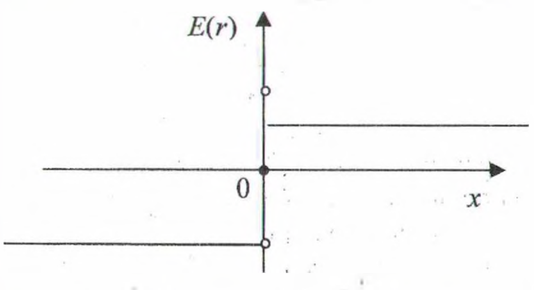

Рис. 6. Напряженность поля бесконечной равномерно заряженной плоскости

Таким образом, в результате исследований обосновано значение напряженности электрического поля сферы в точках, принадлежащих сфере, а также установлена закономерность появления обособленной точки на графике напряженности поля равномерно заряженной сферы.

Учитывая изложенное, можно сделать вывод, что рассмотрение данной задачи целесообразно ввести в содержание учебного процесса курса общей физики как имеющее существенное научно-методическое значение.

Литература

1. Сивухин Д. В. Электричество. – М.: Наука, 1983. – 687 с.
2. Матвеев А. Н. Электричество и магнетизм. – М.: Высш. шк., 1983. – 463 с.
3. Гершензон Е. М. Курс общей физики: Электричество и магнетизм / Е. М. Гершензон, Н. Н. Малов. – М.: Просвещение, 1980. – 223 с.
4. Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высш. шк., 1989. – 608 с.
5. Трофимова Т. И. Курс физики. – М.: Высш. шк., 1999. – 541 с.
6. Савельев И. В. Курс общей физики. Электричество и магнетизм. Волны. Оптика. – М.: Наука, 1988. – 387 с.
7. Яворский Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Наука, 1990. – 624 с.
8. Трофимова Т. И. Справочник по физике для студентов и абитуриентов. – М.: Издательство «Астрель», 2001. – 399 с.
9. Яворский Б. М. Физика для школьников старших классов и поступающих в вузы / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф. – М.: Дрофа, 2001. – 570 с.
10. Тамм И. Е. Основы теории электричества: Учебное пособие для ВУЗов – М.: Физматлит, 2003. – 616 с.
11. Бондарев Б. В., Калашников Н П., Спирин Г. Г. Курс общей физики: Электромагнетизм. Оптика. Квантовая физика. – М.: Высш. шк., 2005 – 438 с.
12. Наркевич И. И., Волмянский Э. Г., Лобко С. И. Физика. – Мн.: Новое знание, 2004. – 680 с.
13. Фриш С. Э., Тиморева А. В. Курс общей физики: В 3 т. Т. 2.: Электрические и электромагнитные явления. – М.: Лань, 2006. – 518 с.
14. Ахраменко Н. А., Булавко Л. М. К определению электрического поля равномерно заряженной сферы // Вестник БГУ. Сер. 1. – 2005. – № 3. – С. 40–43.