УДК 517.9

И.К.Асмыкович, доцент

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ В ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ*

For linear stationary descriptor systems with state delay the problem of modal control by derivative and proportional state feedback is considered. The sufficient conditions of modal control are proved. A procedure for finding coefficients of the regulator is presented, and illustrated by a numerical example.

Введение. При изучении реальных систем управления математическая модель процесса в физически реальных переменных обычно записывается в виде дифференциального уравнения, неразрешенного относительно производной. Причем, если объект помимо дифференциальных связей содержит также и алгебраические [10, 14], то матрица при производной будет обязательно вырожденной. Интерес к таким системам особенно активизировался в последние годы, поэтому пока нет даже единой терминологии. Эти системы называют либо вырожденными системами [5, 12], либо системами неразрешенными относительно старшей производной [4, 6, 11], либо сингулярными системами [13-15, 17-19], либо обобщенными линейными системами [20, 21], либо дескрипторными системами [1, 16]. В последнее время наиболее часто используется термин дескрипторные (от английского *descriptor* - описывать), который, по-видимому, наиболее точно отражает специфику таких систем. К таким системам приводят задачи управления движением самолета, исследование процессов, происходящих в турбореактивном двигателе с дожиганием, задачи теории электрических цепей, задачи демографии, некоторые экономические модели, исследование взаимосвязанных систем, рассмотрение систем с обратной связью, когда в регулятор входит производная либо в системе есть производная по управлению и линейная обратная связь по состоянию.

Задачи качественной теории управления для дескрипторных систем в последние годы привлекают внимание многих исследователей [1, 4, 17, 19]. Одной из таких задач является задача модального управления, подробно изученная как для обыкновенных линейных систем (см. [3]), так и для дескрипторных систем [1, 11-21]. При этом применялись как геометрические методы [16, 17], так и методы пространства состояний [1, 11-13, 19-21]. Задача рассматривалась как задача управления отдельными модами [11, 12, 16, 17], так и как задача управления коэффициентами характеристического уравнения 20 . Известно, что для систем с запаздыванием эти две постановки задачи модального управления

* Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований РБ

не эквивалентны [3. 7].

Одной из первых работ по модальному управлению в системах с последействием была работа [7] , в которой приведен алгоритм построения регулятора, изменяющего конкретные собственные числа системы. Позднее было выяснено, что для систем с запаздыванием существенную роль имеет вид регулятора. Особенно важным это является потому, что использование интегральных регуляторов (а именно такие регуляторы используются в большинстве работ) требует знания и запоминания состояния на отрезке времени, равном величине запаздывания, а, возможно, и большем отрезке. Кроме того, наличие бесконечного спектра у систем с последействием требует изменения самой постановки задачи. Так как спектр системы однозначно определяется коэффициентами характеристического квазиполинома, то задачу модального управления можно рассматривать как задачу управления этими коэффициентами.

На этом пути были получены критерии разрешимости задачи модального управления для одновходных систем с запаздыванием, отдельно необходимые и отдельно достаточные условия для многовходных систем с последействием при замыкании системы линейным регулятором со многими запаздываниями по состоянию. Если в регуляторе допустить запаздывания по управлению, то условия разрешимости ослабляются, но при этом замкнутая система получается как система с запаздыванием нейтрального типа. Дальнейшие исследования типов регуляторов связаны с решением задачи стабилизации.

Дескрипторным системам с запаздыванием посвящено небольшое количество работ. Первые исследования вопросов существования и единственности решения систем с запаздыванием приведены в работах [15, 17] . Ряд результатов для специальных классов непрерывных и дискретных дескрипторных систем с запаздыванием получены в работах В.В.Игнатенко и Р.В.Крахотко. Ими приведены достаточные условия существования единственного решения и даны формулы, выражающие решение через решения определяющего уравнения. В работе M. Kotiechi [18] решение записано через обратную Дразина, описан класс совместимых начальных условий, показано, как,используя линейную обратную связь по состоянию, можно обеспечить единственность и непрерывность решения. Системы с запаздыванием нейтрального типа допускают логичную интерпретацию как дескрипторные системы с параметрами [22] . Используя такую методику, в [22] была изучена задача стабилизации для систем нейтрального типа

В настоящей работе для дескрипторных систем с запаздыванием,которые удовлетворяют условию регуляризации [17] , рассмотрена задача управления коэффициентами характеристического квазиполинома с помощью линейного запаздывающего регулятора с производной по состоянию. Оплгоритм построения регулятора, приведен числовой пример.

Постановка задачи

Рассмотрим линейную дескрипторную систему с запаздыванием

$$K\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t),\ t>0, \quad (\mathrm{I})$$

где K, A, A_1 - $n\times n$ - постоянные матрицы, B - $n\times r$ - постоянная матрица, $\det K=0$, $h>0$ - постоянное запаздывание, начальные условия полагаются нулевыми. Будем полагать, что система (I) удовлетворяет условиям существования и единственности решения [I5], [I8].

Присоединим к системе (I) запаздывающий статико-дифференциальный регулятор вида

$$u(t) = F\dot{x}(t) + \sum_{j=0}^{\theta} F_j x(t-jh), \quad (2)$$

где θ - натуральное число, $F, F_j, j=0,1,\dots,\theta$ - некоторые $r\times n$ - матрицы и $x(\tau)\equiv 0,\ \tau<0$.

Определение. Систему (I) назовем модально управляемой регулятором (2), если для любых наперед заданных чисел r_{ij}, $i=0,1,\dots,n-1$; $j=\overline{0,1,\dots,i}$ существуют натуральное число θ и $r\times n$ матрицы F, F_j $j=\overline{0,\theta}$, такие, что характеристическое уравнение замкнутой системы (I), (2) имеет вид:

$$\varphi^*(\lambda, e^{-\lambda h}) = \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{i} r_{ij}\lambda^i \exp(-\lambda j h) = 0. \quad (3)$$

По аналогии с [I7], систему (I) будем называть регулируемой, если существует матрица F такая, что матрица $K+BF$ является невырожденной.

Обозначим через [3] $P(z)$ матрицу

$$P(z) = [B \,\vdots\, (A+zA_1)B \,\vdots\, \dots \,\vdots\, (A+zA_1)^{n-1}B] \quad (4)$$

и через $\mathcal{D}(z)$, $R(z)$ наборы линейно независимых векторов, составленные из векторов (4) по методам Луенбергера и Бруновского [3] соответственно. Поставим задачу выяснить, при каких условиях на параметры системы (I) существуют параметры регулятора (2), обеспечивающего модальное управление в замкнутой системе (I), (2).

Решение задачи.

Предположим, что матрицы K и B образуют полностью управляемую пару, т.е. [3]

$$\operatorname{rank}[B \,\vdots\, KB \,\vdots\, \dots \,\vdots\, K^{n-1}B] = n. \quad (5)$$

Теорема I. Если выполняется условие (5), то система (I) является регуляризуемой.

Доказательство. Запишем систему (I) как обыкновенную дескрипторную систему с параметром, т.е. в виде

$$K\dot{x}(t) = (A + zA_1)x(t) + Bu(t). \qquad (6)$$

Необходимым и достаточным условием регуляризуемости такой системы является [17]

$$\operatorname{rank}[K : B] = n. \qquad (7)$$

Так как, в силу условия (5), существует базис (см [3]), в котором матрицы K, B имеют вид

$$K = \begin{bmatrix} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ x & x & x & \dots & x \end{matrix} & & \\ & \ddots & \\ & & \begin{matrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ x & x & x & \dots & x \end{matrix} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x & \dots & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

то отсюда следует выполнение условия (7), т.е. система (6) регуляризуема регулятором $u(t) = Q\dot{x}(t) + v(t)$.

Теорема 2. Система (I) модально управляема регулятором (2), если для нее выполнено условие (5), одно из условий

$$\det Q(z) \equiv const \neq 0 \quad \text{или} \quad \det R(z) \equiv const \neq 0 \qquad (8)$$

и существует матрица F такая, что

$$K - BF = I_n. \qquad (9)$$

Доказательство. В силу теоремы I система (I) является регуляризируемой. Присоединим к этой системе регулятор

$$u(t) = F\dot{x}(t) + v(t), \qquad (10)$$

где матрица F выбрана в соответствии с формулой (9). Тогда получаем систему с управлением $v(t)$ вида

$$(K - BF)\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bv(t),$$

т.е., в силу формулы (9) получим обыкновенную систему с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_1x(t-h) + Bv(t),$$

для которой условия (8) гарантируют существование линейного разностного регулятора вида

$$v(t) = \sum_{j=0}^{\theta} F_j x(t-jh), \qquad (11)$$

обеспечивающего в замкнутой системе требуемые коэффициенты характеристического квазиполинома.

Объединяя регуляторы (I0) и (II), получаем, что линейная обратная связь

$$u(t) = A\dot{x}(t) + \sum_{j=0}^{\theta} F_j x(t-jh) \qquad (12)$$

решает поставленную задачу модального управления.

Алгоритм построения регулятора

I) Для исходной системы решаем матричное уравнение (9)

2) Присоединяем к системе (I) дифференциальный регулятор (I0)

3) Для полученной системы записываем матрицу управляемости

4) Выбираем из $P(z)$ матрицы $D(z)$ и $R(z)$ и проверяем условие (8)

5) Перейдя к соответствующей канонической форме, находим параметры регулятора (II)

6) Объединив регуляторы (I0) и (II), получаем требуемую линейную обратную связь (I2).

Проиллюстрируем полученные результаты на примере.

Рассмотрим дескрипторную систему с запаздыванием при нулевых начальных условиях:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-h) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t). \qquad (13)$$

Ее характеристическое уравнение

$$\varphi(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - e^{-\lambda h} & -1 & \lambda - 1 \\ & \lambda - e^{-\lambda h} & \lambda + e^{-\lambda h} \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(\lambda - e^{-\lambda h}\right)^2 = 0$$

имеет положительные корни, т.е. система является неустойчивой. Рассчитаем для нее стабилизирующий регулятор.

Проверим условие (7)

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Матрица F из уравнения (9) равна

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Присоединив к системе (I3) регулятор

$$u(t)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\dot{x}(t)+v(t),$$

получаем систему

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&-1\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&0\end{pmatrix}x(t-h)+\begin{pmatrix}0&1\\0&1\\1&0\end{pmatrix}v(t). \tag{I4}$$

Потребуем, чтобы характеристическое уравнение замкнутой системы имело вид $\varphi^*(\lambda)=(\lambda+2)^3=0$.

Поскольку

$$P(z)=\begin{bmatrix}0&1&1&z+1&0&z^2+2z\\0&1&1-z&z&-(z-1)^2&z^2\\1&0&-1&0&1&0\end{bmatrix},$$

то, выбирая последовательность $[b_1,(A+zA_1)b_1,(A+zA_1)^2b_1]$, имеем

$$D(z)=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&1-z&-(z-1)^2\\1&-1&1\end{bmatrix},\quad \det D(z)=-(z-1)^2,$$

т.е. $\det D(z)\neq const$, но, выбирая линейно независимые векторы по методу Бруновского (см [3]), получаем $\det[b_1\vdots b_2\vdots(A+zA_1)b_2]=-1$, т.е. выполнено тождество $\det P(z)\equiv const\neq 0$. Теперь, используя технику приведения системы к аналогу канонической управляемой формы (см. [3]), вычислим коэффициенты требуемого регулятора. Он имеет вид

$$v(t)=\begin{pmatrix}-8&-4&-5\\0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}-12&20&0\\0&-2&1\end{pmatrix}x(t-h)+\begin{pmatrix}8&-8&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}x(t-2h) \tag{I5}$$

и тогда замкнутая система (I4),(I5) запишется в форме

$$\dot{x}(t)=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\-8&-4&-6\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}1&-2&1\\0&-1&0\\-12&20&0\end{pmatrix}x(t-h)+\begin{pmatrix}-1&1&-1\\-1&1&-1\\8&-8&6\end{pmatrix}x(t-2h).$$

Ее характеристическое уравнение $\varphi^*(\lambda)=(\lambda+2)^3=0$, т.е. система асимптотически устойчива со степенью устойчивости, равной 2. Окончательно регулятор (I2) для системы (I3) равен

$$u(t)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\dot{x}(t)+\begin{pmatrix}-8&-4&-5\\0&0&0\end{pmatrix}x(t)+\begin{pmatrix}-12&20&0\\0&-2&1\end{pmatrix}x(t-h)+\begin{pmatrix}8&-8&0\\-1&1&-1\end{pmatrix}x(t-2h).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмыкович И.К. Линейная обратная связь в дескрипторных системах / Минск, БТИ, 1988. Рукопись деп. в ВИНИТИ 06.07.88. Деп. N 5453-1388.
2. Asmykovich I.K. Decoupling by linear regulator for time-delay systems // Bulleting of the Polish A.S. Techn. Sci. V. 37, 1989. - N 1-2.-P.1-6.
3. Асмыкович И.К., Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М. Задачи управления конечномерными системами // Автоматика и телемеханика. - 1986. - N11. - С.5-29.
4. Ахундов А.А. Обзор некоторых результатов по теории линейных дифференциальных уравнений, неразрешенных относительно производной // Mathematical control theory / Banach Contr. Publ.- Warsaw, 1985. - Vol. 14.- P.7-16.
5. Бояринцев Ю.Е. Методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.- Новосибирск, 1988.
6. Булатов В.И. К управляемости систем с запаздыванием, неразрешенных относительно производных // Управление многосвязными системами: Тез. докл. Y Всесоюз. совещ., Тбилиси, 1984.- М., 1984.- С.78.
7. Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. _ 1974.- Т.10, N11. - С. 1946-1952.
8. Востриков А.С., Уткин В.И., Французова Г.А. Системы с производной вектора состояния в управлении // Автоматика и телемеханика.- 1982. - N 3. - С.22-25.
9. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М., 1976.
10. Кантарович Л.В., Макаров В.Л. Дифференциальные и функциональные уравнения, возникающие в моделях экономической динамики // Сиб. мат. журн. - 1970. N5. - С.1046-1069.
11. Курина Г.А. Управление обратной связью для линейных систем, не разрешенных относительно производной // А. и Т., 1984. - N 6.- С.37-41.
12. Хасина Е.Н. Об управлении вырожденными линейными динамическими системами // Автоматика и телемеханика. - 1982. - N4.-С.30-37.
13. Ailon A. An approach for pole assignment in singular systems// IEEE Trans. Autom.Contr.-1989.- Vol.34, N9.- P.889-893.
14. Banaszuk A. Singular system as a model of electrical circuit

(in Polish) // X Stminarium z podstaw electrotechnic i teorii obwodow. - Clewice-Wisla, Czesc. I. 1987.-P.189-196.

15. Campbell S.L. Singular systems of differential equations with delays //Applicable analysis.-1980.- Vol.11, N 2.-P.129-136.
16. Cobb J.D. Feedback and pole placement in descriptor variable systems // Intern. J. Control.- 1981.- Vol.33, N 6.- P.1135-1146.
17. Dai L. Singular Control Systems. Lecture Notes in Control and information Sciences, Vol.118.- Berlin, Springer-Verlag,1989.
18. Kocieoki M. On solutions of singular equations with delays // V Polish-English on "Real-time procese control" Radziejowice, Sept. 8-12, 1986.- Warsaw, 1986.- P.227-235.
19. Lewis F.L. A survey of linear singular systems // J. Circ. Syst. Sign.Proc: Special Issue: Semistate System.- 1986,v.5. - N1.- P.3-36.
20. Pandolfi L. Coefficient assignment for generalized control systems // Systems Science.- 1982.- Vol.8, N 2,3.- P.195-203.
21. Pandolfi L. A canonical form for generalized linear systems // Bollettino U.M.I.- 1985.- Vol.6, N 4.- P.125-137.
22. Spong M.W. A semistate approach to feedback stabilization of neutral delay systems // Circ. Systems Sing. Proc.- 1986.- Vol.5, N 1.- P.69-85.
23. Tan S., Vandewalle J. Canonical form under strong equivalence tranformations and controllability indexes in singular systems // IEEE Trans. Circ. and Syst.- 1988.-Vol.35,N11.- P.1438-1441.
24. Verghese G.C., Levy B.C., Kailath T. A generalized state-space for singular systems // IEEE Trans. Aut. Control.- 1981.- Vol. AC-26, N 4.- P.811-831.
25. Wang Y.Y., Shi S., Zhang Z.J. Pole placement and compensator design of generalized systems // Systems and Control Letters.- 1987.- Vol.8, N 2.- P.205-209.
26. Zagalak P., Kucera V. Fundamental theorem of state feedback. The case of infinite poles.- Kybernetika.- 1991.-27,N 1.- P.1-11.