УДК 517.944.22

В.М. Марченко, профессор

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ *)

The paper gives the analytical survey of recent results on the qualitative control theory for linear functional-differential equations with after-effect and presents the perspectives of further investigations in this field. The main attention is paid to such questions as controllability, observability, modal control and the construction of a general approach to the controllability and observability theory on the basis of minimal state concept for time-delay systems. Unsolved problems are also discussed.

Введение

Теория управляемости и наблюдаемости систем с последействием начинает свою историю с доклада [1] Н.Н.Красовского на II Конгрессе ИФАК в 1963г., где была сформулирована задача полного успокоения (управляемости на нулевую функцию) системы с запаздыванием. Параллельно Ф.М.Кирилловой и С.В.Чураковой была рассмотрена и исследована [2] задача относительной управляемости линейной стационарной системы с запаздывающим аргументом. С тех пор различные аспекты этих задач стали предметом исследования многих авторов. С соответствующими результатами и библиографией можно ознакомиться по монографиям [3] - [5], а также обзорам [6] -[8] и библиографическому указателю [9].

К настоящему времени наиболее разработанной является теория управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем. Используя технику определяющего уравнения [4], можно исследовать [10] задачи относительной управляемости линейных нестационарных систем с аналитическими коэффициентами. Для линейных систем с достаточно гладкими коэффициентами известны [3],[4],[10] в ос-

---

*) Работа финансируется Фондом фундаментальных исследований Республики Беларусь.

новном достаточные условия управляемости и наблюдаемости. Для нелинейных систем имеются лишь достаточные условия, большинство из которых основаны на управляемости и наблюдаемости их линейных приближений (см., например, [11],[12]). Вопросы функциональной управляемости для нестационарных систем в литературе почти не рассматривались. Исключение составляют лишь различные утверждения, относящиеся к принципу двойственности между управляемостью и наблюдаемостью, в которых, как правило, требование стационарности несущественно. В связи с этим ниже основное внимание уделяется линейным стационарным системам с последействием.

Рассмотренные ниже проблемы разделены на две группы: 1)конечномерные задачи, 2) бесконечномерные задачи. К первой группе относятся те задачи, которые либо по постановке, либо по методу решения являются конечномерными. Работа в целом непосредственно примыкает к обзору [8].

I. Конечномерные задачи

I.I.Управляемость и наблюдаемость в пространстве $\mathbb{R}^n$. Как уже отмечалось, исторически первой проблемой данного направления является проблема относительной (евклидовой, конечномерной, $\mathbb{R}^n$ -) управляемости. Этот тип управляемости подробно рассмотрен в [[6],[7] и мы остановимся здесь в основном на результатах, не вошедших в эти работы.

Рассмотрим систему управления вида

$$\sum_{j=0}^{\ell}\left(D_j\dot{x}(t-jh)+A_j x(t-jh)+B_j u(t-jh)\right)=0, \quad t>0 \qquad (1.1)$$

с начальными условиями

$$x(\tau)=\varphi(\tau),\ u(\tau)=\xi(\tau),\ \tau\in[-\bar{h},0],\ x(+0)=\varphi_0\in\mathbb{R}^n, \qquad (1.2)$$

где D_j, A_j, B_j - постоянные соответственно $(n\times n)$,$(n\times n)$ и $(n\times r)$-матрицы; $j=0,1,\dots,\ell$; $D_0=I_n$, I_n - единичная $(n\times n)$ - матрица; $h>0$, $\bar{h}=\ell h$; $x(t)\in\mathbb{R}^n$, $u(t)\in\mathbb{R}^r$; начальные данные *) φ_0, φ, ξ и управление u таковы, что соответствующее решение $x(t,\varphi_0,\varphi,\xi,u)$, $t>0$, существует и абсолютно непрерывно.

---

*) Такие начальные данные и управление считаем допустимыми.

Система (I.I) называется $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляемой (относительно t_1 -управляемой), если для любых допустимых начальных данных φ_0, φ и любого n-вектора x_1 существует допустимое управление u, при котором

$$x(t_1, \varphi_0, \varphi, \xi, u) = x_1 . \qquad (1.3)$$

Если момент t_1 не фиксирован, приходим к задаче $\mathbb{R}^n$ -управляемости (относительной управляемости).

Сформулированная задача $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляемости получила исчерпывающее решение [4],[6] - [8],[10],[13],[14],[15],[16] в рамках метода [4] определяющего уравнения

$$\sum_{j=0}^{\ell} (D_j X_{k+1}(t-jh) + A_j X_k(t-jh) + B_j V_k(t-jh) = 0 , \quad t \geq 0, \quad k = 0, 1, \dots; \qquad (1.4)$$

с начальными условиями

$X_k(t) = 0$, если $k \leq 0$ или $t \leq 0$, $V_0(0) = I_r$, $V_k(t) = 0$, если $k^2 + t^2 \neq 0$.

Основной результат гласит: система (I.I) $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank} [X_k(t), t \in [0, t_1), k = 1, \dots, n] \underset{def}{=} \operatorname{rank} X_{t_1} = n . \qquad (1.5)$$

Заметим, что $X_k(t) \neq 0$ только в конечном числе точек $t \in [0, t_1)$. Поэтому в (1.5) рассматривается ранг конечномерной матрицы.

Для систем без запаздывания ($D_j = 0, A_j = 0, B_j = 0, j = 1, \dots, \ell$) хорошо известно, что она не может быть управляемой по Калману для любой матрицы B_0 , если $\operatorname{rank} B_0 < n-1$. На относительную управляемость системы (I.I) это утверждение не переносится, поскольку для системы (I.I) с матрицами

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} D_j = 0, \ B_j = 0, \\ A_i = 0, \ i = 2, \dots, \ell, \\ j = 1, \dots, \ell, \end{matrix}$$

$\operatorname{rank} B_0 = 1 < n-1 = 2$, а $\operatorname{rank} X_{2h} = 3$ для любого ненулевого вектора B_0.

При некоторых предположениях на параметры системы (I.I) имеет место следующее тождество [16], [17]:

$$\left(\left(I_n + \sum_{j=1}^{\ell} m^{jh} D_j\right)^{-1} \sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} A_j\right)^i \left(I_n + \sum_{j=1}^{\ell} m^{jh} D_j\right)^{-1} \sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} B_j \equiv \qquad (1.6)$$

$$\equiv \sum_{j=0}^{+\infty} X_{i+1}(jh)m^{jh}, \quad 0 \le m \le m_1,$$

m_1 - достаточно мало, откуда в качестве следствия можно получить: 1) обобщение [15]-[17] на решение уравнения (1.4) известной из теории матриц теоремы Гамильтона-Кэли; 2) представление [18],[19] фундаментальной матрицы, а также решений [16] системы (I.I) посредством ряда по решениям определяющего уравнения ; 3) различные методы [16] доказательства критериев относительной управляемости. Следствием (1.6) является также утверждение [17]: если система

$$\dot{x}(t)=\left(I_n+\sum_{j=1}^{\ell} m^{jh}D_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh}A_j\right)x(t)+$$
$$+\left(I_n+\sum_{j=1}^{\ell} m^{jh}D_j\right)^{-1}\left(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh}B_j\right)u(t), \quad t>0, \tag{1.7}$$

управляема в смысле Калмана хотя бы при одном m , $0 \le m \le m_1$, то система (I.I) $\mathbb{R}^n$-управляема. Для частных случаев системы (I.I) сформулированное утверждение содержится в работах [16], [20],[21].

Важной с прикладной точки зрения задачей теории управляемости систем с последействием является задача управляемости в простейших классах допустимых управлений, таких, как алгебраические, тригонометрические полиномы; выходы линейных систем управления, релейные функции и др. Большая работа проделана [18],[19] в этом направлении Б.Ш. Шкляром. В частности, им показано, что критерий управляемости во многих практически важных классах функций совпадает с условием (1.5), а минимальные свойства (например, число точек переключения релейных управлений) классов допустимых управлений полностью характеризуются структурой матрицы X_{t_1}. Из более поздних исследований по этой теме отметим результаты В.В.Игнатенко [13] и А.И.Астровского [22], которые исследовали задачу относительной управляемости в классах выходов динамических регуляторов и классе функций Чебышева.

Другой важной задачей рассматриваемой теории является задача вычисления минимального числа входов, при которых система (I.I) относительно управляема. Для решения этой задачи в [23] предложен конструктивный конечный алгоритм.

Наряду с системой (I.I) рассмотрим сопряжённую систему с обращённым временем

$$\sum_{j=0}^{\ell} \left(D_j' \dot{x}^*(t+jh) - A_j' x^*(t+jh) \right) = 0, \quad t < t_1, \tag{1.8}$$

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\ell} B_j' x^*(t+jh), \tag{1.9}$$

где

$$x^*(t_1+\tau) = \begin{cases} g_0 - \sum_{j=1}^{\ell} D_j' g(t_1+jh-0), \\ \qquad \tau \to +0; \\ g(\tau), \ \tau \in [0,\bar{h}]; \end{cases} \quad \dot{x}^*(t) = \begin{cases} 0, \ t \in [t_1, t_1+\bar{h}], \\ \frac{d}{dt} x^*(t), \ t < t_1; \end{cases} \tag{1.10}$$

вектор-функция $\sum_{j=0}^{\ell} D_j' x^*(t+jh)$ непрерывна по t, $t < t_1$; (1.11)

$g_0 \in \mathbb{R}^n$, $g \in L_1([0,\bar{h}], \mathbb{R}^n)$, $L_1([a,b], \mathbb{R}^m)$ – пространство эквивалентных классов интегрируемых на $[a,b]$ m – векторов-функций; штрих (′) обозначает транспонирование. Заметим, что условие (1.11) вызывает, вообще говоря, наличие разрывов первого рода у решения системы (1.8) в точках $t_1 - jh$, $j = 0, 1, \ldots$.

Система (1.8) называется $\mathbb{R}^n - t_1$ -наблюдаемой (условно t_1 - наблюдаемой [24]), если по измерениям выхода $y(t)$, $t \in [0, t_1]$, и по известной начальной n -вектор-функции g (обычно $g(\tau) = 0, \tau \in [0,\bar{h}]$) можно однозначно восстановить с помощью линейной интегральной операции неизвестный начальный вектор $g_0 \in \mathbb{R}^n$.

При некоторых предположениях на параметры системы справедлив следующий принцип двойственности [66],[24]: система (1.8), (1.9) является $\mathbb{R}^n - t_1$ -наблюдаемой в том и только в том случае, если система (1.1) $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляема.

Зачастую на практике возникает необходимость перевода траектории системы не в любую точку $x_1 \in \mathbb{R}^n$ (как в (1.3)), а в точку $x_1 = 0 \in \mathbb{R}^n$. Это задача относительной нуль-управляемости (нуль- $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляемости). Хорошо известно, что для линейных стационарных без запаздывания задачи $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляемости и нуль $\mathbb{R}^n - t_1$ -управляемости совпадают. Для систем с последействием задача оказывается гораздо сложнее. Эта ситуация подробно анализировалась в [25],[26] . Оказалось [25], что для системы (1.1) с

$$A_j = 0,\ D_i = 0,\ B_i = 0,\quad j = 2,\dots,\ell,\ \ i = 1,\dots,\ell, \tag{1.12}$$

критерии $\mathbb{R}^n$ -управляемости и нуль-$\mathbb{R}^n$ -управляемости совпадают при $n \le 3$. Эти критерии совпадают [26] и для $n=4$ (недавно В.В.Карпук подтвердил этот результат для $n=5$). В связи с этим возникает вопрос об эквивалентности критериев нуль-$\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ -управляемости в общем случае системы (1.1),(1.12).

Для общего случая системы (1.1) можно утверждать, что критерии нуль-$\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n$ -управляемости совпадают при $n \le 2$. Этот результат справедлив и для общей стационарной системы с распределённым запаздыванием, но перестает быть верным в следующих случаях: 1) для системы (1.1) при $n=3$ (пример:

$$A_0=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-\frac12\\0&0&0\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\frac12&\frac12\\0&0&0\end{bmatrix},\ A_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\\frac12&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix};\ A_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&\frac12&0\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_4=\begin{bmatrix}0&0&0\\\frac12&0&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ D_1=\begin{bmatrix}0&0&0\\-1&0&0\\0&1&0\end{bmatrix},\ D_2=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix};\ D_3=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix},$$

$$B_0=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix};\quad \begin{array}{l} A_i=0,\ D_j=0,\ i=5,\dots,\ell;\ j=4,\dots,\ell,\\ B_j=0,\ j=1,\dots,\ell,\quad h=1);\end{array}$$

2) для системы (1.1) запаздывающего типа [26] с $n=4$, $D_j=0$, $B_j=0$, $j=1,\dots,\ell$; 3) для системы запаздывающего типа с распределённым запаздыванием для $n=3$ (пример:

$$\dot x_1(t) = u(t),$$

$$\dot x_2(t) = -x_1(t) - x_3(t) - \int_{-1}^{0} x_2(t+s)\,ds - \int_{-1}^{0} x_2(t-1+s)\,ds + \int_{-1}^{0}\int_{-1}^{0} x_1(t+\tau+s)\,ds\,d\tau,$$

$$\dot x_3(t) = x_2(t) - 2x_2(t-1) + x_2(t-2) + \int_{-1}^{0} x_1(t+s)\,ds - \int_{-1}^{0} x_1(t-1+s)\,ds).$$

Для системы (1.1) без запаздывания понятие управляемости (в смысле Калмана) полностью характеризуется одним параметром t ($\mathbb{R}^n$- t -управляемость). Для систем с последействием, как мы видим на примере уравнения (1.4), одного параметра уже недостаточно. Этот факт находит отражение во вводимых ниже понятиях.

Пусть $s \ge 0$, $t \ge 0$. Система (1.1) называется: 1) $\mathbb{R}^n$-(s,t)-

управляемой, если для любых допустимых начальных данных $\varphi_0, \varphi, \xi, \bar\varphi_0, \bar\varphi, \bar\xi$ и любого допустимого управления v существует допустимое управление u, при котором

$$x(t, \varphi_0, \varphi, \xi, u) = x(s+0, \bar\varphi_0, \bar\varphi, \bar\xi, v); \tag{1.13}$$

2) вполне $\mathbb{R}^n-(s,t)$ -управляемой $(t \geq s)$, если соотношение (1.13) выполняется с дополнительным требованием:

$$u(\tau) \equiv v(\tau, \tau - t - s.$$

Аналогично, систему (1.8),(1.9) назовем: 1) $\mathbb{R}^n-(s,t)$ наблюдаемой, если при любых $g_0, \bar g_0 \in \mathbb{R}^n$, для которых справедливо тождество $y(\tau, g_0, 0) \equiv y(\tau, \bar g_0, 0)$, $\tau \in [t_1 - t, t_1]$, имеет место также соотношение $x(\tau, g_0, 0) \equiv x(\tau, \bar g_0, 0)$ для $\tau \leq t_1 - s$; 2) вполне $\mathbb{R}^n-(s,t)$ -наблюдаемой, если $(t > s)$:

$$y(\tau, g_0, 0) = y(\tau, \bar g_0, 0), \tau \in [t_1 - t, t_1 - s] \Rightarrow x(\tau, g_0, 0) \equiv x(\tau, \bar g_0, 0), \tau \leq t_1 - s.$$

Замечания: 1) в силу конечномерности $\mathbb{R}^n$ сформулированные определения наблюдаемости эквивалентны восстановлению решения $x(\tau)$ для $\tau \leq t_1 - s$ по известным измерениям выхода на $[t_1 - t, t_1]$ при помощи линейной (интегральной) операции (при этом можно потребовать, что $g, \bar g$ - не нули, но известны), 2) как легко видеть, сформулированные понятия управляемости и наблюдаемости обобщают введенные ранее понятия $\mathbb{R}^n - t$, нуль- $\mathbb{R}^n - t$ -управляемости и условной наблюдаемости.

Справедлив следующий принцип двойственности: система (1.1) $\mathbb{R}^n-(s,t)$ - управляема (вполне $\mathbb{R}^n-(s,t)$ -управляема, $t > s$) тогда и только тогда, когда система (1.8) -(1.11) $\mathbb{R}^n-(s,t)$ -наблюдаема (вполне $\mathbb{R}^n-(s,t)$ -наблюдаема, $t > s$).

Пусть $t > (n-1)\bar h$. Используя технику [4] определяющего уравнения и понятия t - информатора [27], можно доказать следующее утверждение : система (1.1) $\mathbb{R}^n-(t,t)$ -управляема (нуль- t -управляема) в том и только в том случае, когда

$$\operatorname{rank}\left[\frac{d^j}{dp^j}(\Pi(p))\Big|_{p=p_k}, j=0,1,\dots,\nu_k-1, k=1,2,\dots; X_i(t),\right.$$

$$\left. t \in [0,(n-1)\bar h], i=1,\dots,n\right] = \operatorname{rank}\left[X_k(t), t \in [0,(n-1)\bar h], k=1,\dots,n\right],$$

где

$$\Pi(p)\Delta(p) \equiv \det \Delta(p), \quad \Delta(p) = \sum_{j=0}^{l} (pD_j + A_j) e^{-pjh}, \tag{1.14}$$

$p \in C$, C - поле комплексных чисел;

$\{p_1, p_2, \dots\} \underset{def}{=} \{p \mid \det \Delta(p)=0,\ p \in C\} \underset{def}{=} \sigma(\Delta)$,

ν_k - кратность корня p_k.

Более подробно с некоторыми задачи управляемости и наблюдаемости в пространстве $\mathbb{R}^n$ можно ознакомиться по работам:[3]-[19], [22]-[28],[29].

1.2. Поточечная управляемость и наблюдаемость. Задачи поточечной управляемости и наблюдаемости, являясь непосредственным обобщением задач относительной управляемости и условной наблюдаемости, представляют собой по существу многоточечные краевые задачи для бесконечномерных систем. Задачи такого рода ставились Р.Габасовым, и одна из них была исследована в [29] (см. также [30]). Понятие поточечной управляемости, формулируемое ниже, впервые было введено автором [31], где был выяснен физический смысл этого понятия, а также установлена связь поточечной управляемости систем с запаздыванием с управляемостью в смысле Калмана однопараметрических систем без запаздывания. В связи с последним замечанием отметим также работы [33], [34], где рассматривается аналогичное понятие ($\mathbb{R}^n$-(d)-controllability) без анализа, однако, его физического содержания. Ниже мы следуем изложению работ [17], [27]

Пусть в (1.1),(1.2)

$$D_j = 0,\ j=1,\dots,\ell,\ \xi(\tau)\equiv 0,\ \tau\in[-\bar h, 0]. \qquad (1.15)$$

Система (1.1),(1.15) называется: 1) управляемой в точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$ $(0=\beta_0<\dots<\beta_\gamma)$, если существует момент $t_1,\ t_1>0$, такой, что для любых начальных данных φ_0, ψ, ξ и любых n-векторов $x_j,\ j=0,\dots,\gamma$ существует кусочно-непрерывное управление u, при котором существующее решение системы (1.1),(1.15) обладает свойством: $x(t_1-\beta_j;\varphi_0,\psi,\xi,u)=x_j,\ j=0,1,\dots,\gamma$; 2) α - поточечно управляемой, если она управляема в любых точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$ таких, что $0=\beta_0<\dots<\beta_\gamma\le\alpha$; 3) α - поточечно управляема при любом неотрицательном числе α.

Пусть символ $X(\beta_0,\dots,\beta_\gamma)$ обозначает матрицу, столбцами которой служат ненулевые столбцы матриц $[X_k'(t-\beta_0)\vdots\dots\vdots X_k'(t-\beta_\gamma)]',\ t\in[0,\dots,\beta_\gamma+(n-1)\bar h],\ k=1,\dots,n$, где $X_k(t)$ ... , - решение уравнения (1.4)

Имеют место утверждения [17], [27]:

1) система (1.1), (1.15) управляема в точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$ в том и только в том случае, если $\operatorname{rank} X(\beta_0,\dots,\beta_\gamma)=(\gamma+1)n$;

2) необходимое и достаточное условие α-поточечной управляемости системы (1.1),(1.15) заключается в требовании

$\operatorname{rank} X(0,\bar h,\dots,j\bar h)=(j+1)n$, где $j\bar h\le\alpha$, но $(j+1)\bar h>\alpha$;

3) система (1.1),(1.15) поточечно управляема тогда и только тогда, когда система

$$\dot{x}(t)=\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{jh} A_j\Big)x(t)+\Big(\sum_{j=0}^{l} m^{jh} B_j\Big)u(t),\quad t>0,$$

управляема в смысле Калмана хотя бы при одном m, $m\geq 0$.

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\dot{x}^*(t)&=\sum_{j=0}^{l} A_j'\,\dot{x}^*(t-jh),\\ y(t)&=\sum_{j=0}^{l} B_j'\,x^*(t-jh),\end{aligned}\qquad t>0. \qquad (1.16)$$

На каждом промежутке $[\beta_j-\bar{h},\ \beta_j]$ зададим начальные условия для (1.16) в виде: $x^*(\tau)=g_j(\tau),\ \tau\in[\beta_j-\bar{h},\beta_j]$; $x^*(\beta_j+0)=x_j\in R^n$; соответствующее решение системы (1.16) обозначим через $x_j^*(t)$, $t>\beta_j$. Пусть далее $y_j(t)=\sum_{i=0}^{l} B_i'\,x_j^*(t-ih)$. Введём функционал

$$B_{t_1}(y_j)=\int_0^{t_1}\vartheta'(t)\,y_j(t)\,dt.$$

Система (1.16) называется: 1) наблюдаемой в точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$, если существует число $t_1>0$ такое, что для любых n-векторов p_j, $j=0,\dots,\gamma$, существует кусочно-непрерывная вектор-функция ϑ, при которой $B_{t_1}(y_j)=p_j'x_j$ для любых $x_j\in R^n$; 2) α-поточечно наблюдаемой, если она наблюдаема в точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$ для любых $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$, $0>\beta_0<\dots<\beta_\gamma\leq\alpha$; 3) поточечно наблюдаемой, если она α-поточечно наблюдаема при любом числе α, $\alpha\geq 0$.

Справедлив следующий принцип двойственности: 1) система (1.1),(1.15) управляема в точках $\beta_0,\dots,\beta_\gamma$ в том и только в том случае, если система (1.16) наблюдаема в этих же точках; 2) система (1.1),(1.15) поточечно (α-поточечно) управляема тогда и только тогда, когда система (1.16) поточечно (α-поточечно) наблюдаема.

Основной метод [17],[27] доказательства сформулированных утверждений - это метод [4] определяющего уравнения.

Замечания: 1. Если система (1.1),(1.15) α-поточечно управляема, то она и β-поточечно управляема при $\beta\leq\alpha$. Обратное утверждение в общем случае неверно. Отметим однако, что свойство α-поточечной управляемости "насыщается", в частности, если система $\bar{\alpha}$-поточечно управляема при

$$\bar{\alpha}=(n-1)(n-2)\bar{h}/2+\max_{j\in\{0,1,\dots,l\}}\min\{h_j,\ h_j\,\mathrm{rank}\,B_j\},$$

то она α -поточечно управляема и при $\alpha \geq \bar{\alpha}$. Вопрос о точной нижней границе таких чисел $\bar{\alpha}$ остается открытым.

2. Система (1.1),(1.15) поточечно управляема в том и только в том случае, если она $\bar{\alpha}$-поточечно управляема [17]. Отсюда двумерная система с $B_j = 0, j > 0$, поточечно управляема тогда и только тогда, когда она относительно управляема [17], [29]. Для $n \geq 3$ это утверждение перестает быть верным.

3. Минимальное число r_0 входов, при которых система (1.1),(1.15) поточечно управляема, определяется соотношением [17]: $r_0 = \min\limits_{m \geq 0} \rho\left(\sum\limits_{j=0}^{\ell} m^{jh} A_j\right)$, где символом $\rho(D)$ обозначено число нетривиальных инвариантных полиномов λ-матрицы $\lambda I_n - D$, при этом достаточно положить $B_j = 0,\ j = 1, \dots, \ell$.

В силу принципа двойственности аналогичные замечания имеют место для задачи поточечной наблюдаемости системы (1.16). Заметим также, что в [27] исследована задача поточечной наблюдаемости в случае ненулевых начальных вектор-функций.

1.3. Модальная управляемость в классе линейных дискретных регуляторов с запаздыванием. Являясь развитием важных прикладных задач (стабилизации и аналитического конструирования регуляторов - в первую очередь), задача модального управления (управления спектром - в другой терминологии) сама имеет многочисленные практические приложения, что предопределило значительный интерес к этой проблеме со стороны многих исследователей. В результате число публикаций по этой теме за последние 10 лет достигло, пожалуй, рекордного числа [9] по сравнению с другими проблемами качественной теории управления линейными системами. Эти работы, как правило, относятся к системам без запаздывания. Для систем с последействием рассматривался в основном частный случай задачи - задача стабилизации (детали имеются в [8]). Проблема модального управления системами с последействием долгое время была вне поля зрения специалистов.

По существу модальное управление системой заключается в построении такой обратной связи, при которой замкнутая система имеет произвольный наперед заданный возможный спектр. В этом направлении первый результат получен в [35],[36], где была исследована задача управления произвольной конечной частью спектра системы с последействием, при этом использовалась интегральная линейная обратная связь (см. также [37]).

Постановка задачи модального управления при помощи дискретного регулятора была дана почти одновременно в [33],[37], при этом [33] рассмотрена задача управления "цепями" корней характеристического уравнения; в [38] задача модального управления формулируется как задача управления коэффициентами характеристического уравнения системы. С дальнейшими результатами можно ознакомиться по работе [39], где имеются ссылки на предыдущие работы. Сформулируем основные результаты.

Рассмотрим систему (1.1) с матрицами

$$D_j = 0,\ B_j = b_j \in \mathbb{R}^n,\ j = 1,\dots,\ell;\ B_0 = b_0 \in \mathbb{R}^n, \qquad (1.17)$$

и дискретным регулятором вида:

$$u(t) = \sum_{j=0}^{\ell} q_j' x(t - jh),\ x(\tau) \equiv 0,\ \tau < -\bar{h};\ q_j \in \mathbb{R}^n,\ j = 0,\dots,\theta. \qquad (1.18)$$

Система (1.1), (1.17) называется модально управляемой при помощи дискретного регулятора (1.18), если для любых действительных чисел τ_{ij}, $i = 0,\dots,n-1$; $j = 0,\dots,\kappa$; существует регулятор вида (1.18) такой, что

$$\det\Big(A(p) - \Big(\sum_{j=0}^{\ell} b_j e^{-pjh}\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\theta} q_j' e^{-pjh}\Big)\Big) = p^n + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{\kappa} \tau_{ij} p^i e^{-pjh},\quad p \in \mathbb{C}.$$

Оказывается [39], система (1.1), (1.17), (1.18) модально управляема тогда и только тогда, когда справедливо тождество

$$\det\Big[\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} b_j \,\vdots\, \Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} A_j\Big)\Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} b_j\Big) \,\vdots\, \dots \,\vdots\, \Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} A_j\Big)^{n-1} \cdot$$

$$\cdot \Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh} b_j\Big) \underset{\mathrm{def}}{=} \det K(m) \equiv \mathrm{const} \neq 0,\quad m \geq 0; \qquad (1.19)$$

при этом неизвестные n-векторы q_j, $j = 0,\dots,\theta$, находятся из системы линейных алгебраических уравнений [39].

Предположим теперь, что измерению доступна величина

$$y(t) = \sum_{j=0}^{\ell} c_j' x(t - jh),\ t > 0,\ j = 0,\dots,\ell. \qquad (1.20)$$

Системы вида (1.1), (1.20) получили название систем с неполной информацией. Задача модального управления для них заключается в построении такой обратной связи по выходу (1.20), которая обеспечила бы замкнутой системе желаемый спектр. Для решения этой задачи оказывается, вообще говоря, недостаточно использования дискретного линейного по выходу регулятора типа (1.18). Поэтому рассмотрим более общий динамический дискретный регулятор с запаздыванием [39]:

$$\frac{d^p u(t)}{dt^p}+\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{\mu}\alpha_{ij}\frac{d^i u(t-jh)}{dt^i}=\sum_{i=0}^{p-1}\sum_{j=0}^{\mu}\beta_{ij}\frac{d^i y(t-jh)}{dt^i}. \qquad (1.21)$$

Система (1.1), (1.17),(1.20) называется модально управляемой при помощи регулятора (1.21), если для любых наперёд заданных чисел r_{ij}, $i=0,\dots,n+p-1$, $j=0,\dots,k$, найдутся числа μ, α_{ij}, β_{ij}, $i=0,\dots,p-1$; $j=0,\dots,\mu$; такие, что характеристическое уравнение замкнутой системы (1.1), (1.17),(1.20),(1.21) имеет вид

$$\lambda^{n+p}+\sum_{j=0}^{k}\sum_{i=0}^{n+p-1} r_{ij}\lambda^i \exp(-\lambda jh)=0.$$

Основной результат таков: если наряду с (1.19) выполнено условие

$$\det\Big[\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh}C_j \vdots \dots \vdots \Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh}A_j\Big)^{n-1}\Big(\sum_{j=0}^{\ell} m^{jh}C_j\Big)\Big]\equiv const\neq 0,$$

$m\geq 0$, то система (1.1),(1.17),(1.20),(1.21) модально управляема.

Подробно обсуждение задачи модального управления для систем с запаздыванием, а также некоторые обобщения сформулированных результатов имеются в [17],[39],[40], где формулируются некоторые нерешённые задачи, в частности, в [40] задача модального управления исследуется для систем с распределённым запаздыванием.

2. Бесконечномерные задачи

2.1. Проблема полной управляемости. Задача полной управляемости на нулевую функцию (полного успокоения [1]) является одной из самых трудных задач теории управляемости систем с последействием. Различные частные случаи таких систем были рассмотрены с точки зрения их полной управляемости в [3],[4],[6] - [8],[42], [43] (там же имеются ссылки и на предыдущие работы). Необходимое и достаточное условие полной управляемости системы с одним запаздыванием по состоянию получено в [43], однако выражено в неявной форме, основанной на геометрической теории М.Уонэма подпространств управляемости. Эффективные алгоритмы (с использованием ЭВМ) проверки полной управляемости системы с запаздыванием получены Г.П.Размысловичем [44].

Необходимый и достаточный критерий полной управляемости, выраженный непосредственно через параметры системы, получен в [42]. Согласно [42] система (1.1), (1.15) вполне нуль-управляема тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}[\Delta(p) \vdots \bar{B}(p)]=n,\quad p\in\mathbb{C}, \qquad (2.1)$$

где $\bar{B}(p)=\sum_{j=0}^{\ell}B_j e^{-pjh}$; матрица $\Delta(p)$ определена в (1.14).

Система (1.1) считается вполне нуль-управляемой, если для любых допустимых φ_0, φ, ξ существует число $t_1>0$ и кусочно-непрерывное управление u, при которых

$$x(t_1+\tau, \varphi_0, \varphi, \xi, u)\equiv 0,\ u(t_1+\tau)\equiv 0,\ \tau\in[0,\bar h).$$

Отметим [42], что если система (1.1), (1.15) вполне нуль-управляема, то она и поточечно управляема. Обратное утверждение в общем случае неверно (пример: $A_i=0,\ D_j=0,\ B_j=0,$

$$A_0=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ A_1=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ B_0=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix},\ i=2,\dots,\ell;\ j=1,\dots,\ell).$$

Однако, если система (1.1), (1.15) поточечно управляема и $\operatorname{rank}\left[\sum_{j=0}^{\ell} A_j \vdots \sum_{j=0}^{\ell} B_j\right]=n$, то она и вполне нуль-управляема почти при всех $h,\ h\geq 0$, [42],[45].

Эффективным достаточным условием полной нуль-управляемости системы (1.1), (1.15) при любых $h, h>0$, может служить тождество $\det K(m)\equiv C m^{k},\quad m\geq 0$, где $C\neq 0,\ k\geq 0,\ K(m)$ из (1.19).

Вопросы полной нуль-управляемости в некоторых простейших классах функций (алгебраические полиномы, кусочно-постоянные функции и др.) рассматривались для частных случаев системы (1.1), (1.15) в [22],[46]; некоторые вопросы полной аппроксимативной управляемости (когда траектория переводится в некоторую окрестность нулевого конечного состояния) изучены в [47]-[49]. В работах [17],[42],[47],[50] приведены удобные формулы для вычисления минимального числа входов (выходов) вполне управляемых (наблюдаемых) систем.

2.2 Модальная управляемость при помощи интегральной линейной обратной связи. Пусть дана система (1.1) с

$$D_j=0,\ B_j=0,\ j=1,\dots,\ell;\ B_0=b\in\mathbb{R}^n,\ A_i=0,\ i=2,\dots,\ell, \qquad (2.2)$$

и регулятором вида

$$u(t)=\int_{-\theta}^{0}[dQ(s)]x(t+s),\ x(\tau)\equiv 0,\ \tau<-\bar h, \qquad (2.3)$$

где $Q(\cdot)$ — $(1\times n)$ - матрица-функция, элементы которой суть функции ограниченной вариации на $[-\theta,0]$.

Пусть $f(\cdot)$ - квазиполином, отношение $F(p):f(p)$ является целой функцией комплексного переменного p, где $F(p)=\det\Delta(p)$, причём

$(\Lambda_F - \Lambda_f) \cap \Lambda_f = \varnothing$ (здесь $\Lambda_F = \{p \mid F(p)=0,\ p \in \mathbb{C}\}$, $\Lambda_f = \{p \mid f(p)=0,\ p \in \mathbb{C}\}$).

Система (1.1), (2.2),(2.3) называется модально управляемой на множестве Λ_f, если для любых $r_{ij} \in \mathbb{R}^n, \ldots$, существует регулятор вида (2.3) такой, что

$$\det\Big(\Delta(p) - e\int_{-\theta}^{0} e^{ps}\, dQ(s)\Big) = \frac{F(p)}{f(p)}\Big(p^m + \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=0}^{k} r_{ij}\, p^i e^{-pjh}\Big),$$

$f(p): p^m \to const \neq 0$, когда $|p| \to +\infty$ вдоль мнимой оси, $p \in \mathbb{C}$.

Оказывается [51], система (1.1), (2.2), (2.3) модально управляема на множестве Λ_f в том и только в том случае, когда $rank[\Delta(p) \vdots \bar{B}(p)] = n$ для всех $p \in \Lambda_f$.

Отсюда: система управляема на множестве Λ_F (модально управляема) тогда и только тогда, когда она вполне нуль-управляема.

Если f -полином, задача модального управления на Λ_f аналогична задаче частичного модального управления [35],[37]; если $f(p) \equiv \det\Delta(p)$, а мера Стилтьеса в (2.3) дискретна и сосредоточена в конечном числе точек, то задача модального управления на Λ_f эквивалентна задаче модального управления при помощи дискретного регулятора (см.п.1.3).

2.3. О функциональной управляемости и наблюдаемости систем с последействием. Эта тема чрезвычайно популярна в зарубежной литературе и располагает обширной библиографией, с которой можно ознакомиться по работам [31],[52],[53]. Сформулируем некоторые результаты данного направления.

Давно было замечено, что пространство состояний системы с последействием, вообще говоря, бесконечномерно: для вычисления движения такой системы в будущем необходимо знать информацию о предыстории системы на целом промежутке времени, длина которого равна величине последействия. Обычно эта информация связывалась с начальными данными, $(\varphi_0, \varphi, \xi) \in \Omega$, где Ω - некоторое множество, используемое в качестве пространства состояний исследуемой системы. Тогда управляемость интерпретируется (в соответствии с определением Калмана) как существование допустимого управления, порождающего траекторию, соединяющую любые две произвольные наперед заданные точки из Ω.

Оказывается (см.[52]), что даже в случае, когда Ω изоморфно пространству Соболева $W_2^{(1)}$, такая задача управляемости имеет решение лишь в исключительных случаях. В связи с этим свойство управляемости приходится рассматривать в более слабом смысле: с одной стороны, стали рассматриваться задачи, в которых траектории требовалось уложить в произвольную окрестность конечного состояния (аппроксимативная управляемость) [7],[31],[45],[50],[52],[53]; с другой стороны, совпадение траектории с конечным состоянием требовалось на любом промежутке, длина которого сколь угодно меньше, чем величина запаздывания (см.[7]). В последние годы большое внимание в зарубежной литературе уделяется M_2-аппроксимативной управляемости [31],[52],[53] (здесь $M_2=\mathbb{R}^n\times L_2([-\bar{h},0],\mathbb{R}^n)$; $\mathbb{R}^n\times L_2([a,b],\mathbb{R}^n)$ -гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_{M_2}=(\cdot,\cdot)_{\mathbb{R}^n}+(\cdot,\cdot)_{L_2}$).

Рассмотрим для простоты систему (1.1),(2.2). Она называется M_2-аппроксимированно управляемой, если для любых $x_1\in M_2([-\bar{h},0],\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon>0$ найдутся момент $t_1<+\infty$ и кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $0\le t\le t_1$, такие, что $\|x_1-x_{t_1+[-\bar{h},0]}\|_{M_2}<\varepsilon$, где

$$x_{t_1+[-\bar{h},0]}(\tau)=x(t_1+\tau,0,0,0,u),\quad \tau\in[-\bar{h},0].$$

Оказывается [43],[51], для M_2-аппроксимированной управляемости системы (1.1),(2.2) необходимо и достаточно, чтобы наряду с условием (2.1) имело место соотношение

$$\operatorname{rank}\left[A_\ell : B_0\right]=n. \tag{2.4}$$

Аналогичный результат справедлив для многовходной системы (1.1),(2.2). А.Манитиусом [53] получено необходимое и достаточное условие M_2-аппроксимативной управляемости общих линейных интегро-дифференциальных систем, ядро которых содержит только дискретную и абсолютно-непрерывную составляющие меры Стильтьеса. Здесь наряду с выполнением условия (2.1) дополнительно требуется, чтобы существовала такая линейная обратная связь, при которой линейная оболочка собственных и корневых функций была бы плотна в M_2. В такой форме теорема Манитиуса допускает обобщение на линейные системы нейтрального типа с распределённым запаздыванием *)

----

*) Это сообщение было сделано З.Бартосевичем в докладе в период Осеннего семестра по оптимальному управлению Международного математического центра им. С.Банаха (Варшава,1980).

762223

Проблема функциональной (полной) наблюдаемости рассматривалась многими авторами (см.[50],[54] и их библиогр.). Параметрический критерий полной наблюдаемости получен в [50].

Система (1.8) называется [50] полностью наблюдаемой, если по измерениям выхода (1.9) можно однозначно восстановить начальные данные g_0, g из (1.10).

Оказывается [50], система (1.8) с $D_j=0, B_j=0, j=1,\dots,\ell$, полностью наблюдаема тогда и только тогда, когда наряду с условием (2.1) имеет место равенство $\det A_\ell \neq 0$. Здесь же рассмотрена двойственная задача M_2-аппроксимативной управляемости.

Заметим, что хотя аппроксимативная управляемость и формулируется в духе определения Калмана, она не является обобщением управляемости по Калману. В самом деле, рассмотрим систему (1.1) без запаздывания $A_j=0, D_j=0, B_j=0, j=1,\dots,\ell$. В силу условия (2.4) эта система M_2-аппроксимативно управляема лишь в том случае, когда $\operatorname{rank} B_0=n$, что не совпадает с критерием Калмана управляемости обыкновенных систем. Возникшая ситуация объясняется тем, что пространство состояний рассмотренной системы, по существу, конечномерно, что не учитывается в определении M_2-аппроксимативной управляемости.

Ниже дается другое [27],[49] ослабление требования полной функциональной управляемости, связанное с использованием минимальной информации о предыстории системы, что может послужить основой нового общего подхода к управляемости и наблюдаемости бесконечномерных систем.

2.4. К общей теории управляемости и наблюдаемости систем с последействием. При исследовании конкретных процессов управления и наблюдения (например, при изучении установившихся режимов) часто приходится рассматривать задачу управления (или наблюдения) по истечении некоторого времени ξ работы системы "вхолостую". В этой ситуации с точки зрения управления безразлично, как вела себя система прежде. Таким образом, нет необходимости различать те решения, которые совпадают при $t \geq \xi$. Более точно: пусть Ω — произвольное множество начальных данных. На Ω введем соотношение эквивалентности $\mathcal{L}_\xi$, положив [49]: $(\varphi_0,\varphi,\xi)\mathcal{L}_\xi(\bar\varphi_0,\bar\varphi,\bar\xi)$ в том и только в том случае, если при каждом допустимом управлении u имеет место тождество $x(t,\varphi_0,\varphi,\xi,u)\equiv x(t,\bar\varphi_0,\bar\varphi,\bar\xi,u)$ для

$t \geq s$. Тогда множество $\Omega/\mathcal{L}_s$ эквивалентных классов (фактор-множество) интерпретируется как множество допустимых начальных s -состояний системы, а его образ в силу системы (при отображении "вход-выход") дает множество s -решений системы. Наконец, сужение $_sX_t$ множества s -решений на промежутке $[t-\bar{h}, t]$ имеет смысл множества допустимых s -состояний в момент t. Отсюда (по аналогии с определением Калмана) задача s-наблюдаемости понимается [49] как возможность восстановления (различения) по измерениям выхода $y(t)$ для $t \geq s$ соответствующего начального s-состояния, т.е. $(\forall u)$

$$(y(t,\varphi_0,\varphi,\xi,u) \equiv y(t,\bar\varphi_0,\bar\varphi,\xi,u),\ t \geq s \Rightarrow (\varphi_0,\varphi,\xi)\mathcal{L}_s(\bar\varphi_0,\bar\varphi,\xi)$$

Аналогично можно ввести понятие s -управляемости. Детали данного подхода имеются в [7],[49]. Там же получены критерии ∞ -управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем с запаздыванием.

При исследовании управляемости и наблюдаемости линейных систем с последействием весьма полезным оказывается [27],[49] понятие t-информатора $_tИ(\varphi_0,\varphi,\xi,u)=(f_0,f)\in R^n \times L_1([0,\bar h], R^n)$,

где $\quad f_0 = x(t+0;\varphi_0,\varphi,\xi,u) \underset{def}{=} x(\cdot+0)$,

$$f(\tau)=\sum_{jh>\tau}(D_j\dot x(t+\tau-jh)+A_j x(t+\tau-jh)+B_j u(t+\tau-jh)),\ \tau\in[0,\bar h].$$

. Величина $_tИ(\varphi_0,\varphi,\xi,u)$ называется t-информатором решения системы (1.1).

Основное свойство t -информатора:

$$(\varphi_0,\varphi,\xi)\mathcal{L}_s(\bar\varphi_0,\bar\varphi,\bar\xi) \Longleftrightarrow {}_sИ(\varphi_0,\varphi,\xi,0)={}_sИ(\bar\varphi_0,\bar\varphi,\bar\xi,0).$$

Аналогично вводится понятие t -информатора для системы (1.8) $_tИ^*(g_0,g)=(d_0,d)\in R^n \times L_1([-\bar h,0], R^n)$,где

$$d_0 = x^*(t-0,g_0,g) \underset{def}{=} x^*(t-0),$$

$$d(\tau)=\sum_{jh>-\tau}(D_j'\dot x^*(t+\tau+jh)-A_j' x^*(t+\tau+jh)+$$

$$+\sum_{j=0}^{\ell}\delta(\tau+jh)D_j' x^*(t+\tau+jh)+\sum_{j=0}^{\ell}\sum_{s_i\in[0,jh]}\delta(\tau+s_i)D_j(x^*(t+\tau+jh+0)-$$

$$x^*(t+\tau+jh-0)],$$

$\tau\in[-\bar h,0]$, $s_i = ih - t_1$, $\quad i=0,1,\dots$; $\delta(t)=\delta$ -функция Дирака.

Имеет место следующее двойственное соотношение:

$$((g_0,g),{}_{t_1}И(\varphi_0,\varphi,\xi,u))_{M_2}=({}_0И^*(g_0,g_0),(\varphi_0,\varphi))_{M_2}- \qquad (2.5)$$

$$-\int_0^{t_1}(\sum_{j=0}^{\ell}(x^*(t+jh))'B_j)u(t)dt-\int_{-\bar h}^{0}(\sum_{jh>-t}(x^*(t+jh))'B_j)\xi(t)dt.$$

Введем обозначения: ${}_t И\Sigma = \{{}_t И(\varphi_0, \psi, \xi, u) \mid \forall (\varphi_0, \psi, \xi), \forall u\}$,
${}_t ИН = \{{}_t И(\varphi_0, \psi, \xi, 0) \mid \forall (\varphi_0, \psi, \xi)\}$,
${}_t ИC_s = \{{}_t И(0,0,0,u) \mid \forall u,\ u(\tau) = 0,\ \tau \geq t - s\}$.
Допустим, что множество ${}_t И\Sigma$ является подмножеством некоторого топологического пространства R. Тогда система (1.1) называется: 1) R-(s,t) -управляемой, если

$Cl_R({}_t ИC_0) \geq_{s+0} И\Sigma,\ s \geq 0,\ t \geq s$; 2) вполне R-(s,t) -управляемой $(t > s)$, если $Cl_R({}_t ИC_s) \geq_{s+0} ИН$.

В случае, когда в этих определениях включения имеют место для самих множеств ${}_t ИC_0$ и ${}_t ИC_s$ (а не для их замыканий), символ R опускается.

Аналогично, система (1.8), (1.9) называется: 1) (s,t) -наблюдаемой, если из того, что $y(\tau, g_0, g) \equiv y(\tau, \bar g_0, \bar g)$ для $\tau \in [t_1 - t, t_1]$, вытекает, что $(g_0, g) \mathcal{Y}_s (\bar g_0, \bar g)$, т.е. $x^*(\tau, g_0, g) \equiv x^*(\tau, \bar g_0, \bar g)$, $\tau \leq t_1 - s$;
2) вполне (s,t)-наблюдаемой, если $y(\tau, g_0, g) \equiv y(\tau, \bar g_0, \bar g)$ для $\tau \in [t_1 - t, t_1 - s] \Rightarrow (g_0, g) \mathcal{Y}_s (\bar g_0, \bar g)$.

Следствием (2.5) является следующий принцип двойственности: система (1.1) M_2-(s,t) -управляема (вполне M_2-(s,t)-управляема) тогда и только тогда, когда система (1.8), (1.9) (s,t) -наблюдаема (вполне (s,t) -наблюдаема), где

$$M_2 = \mathbb{R}^n \times L_2([0,h], \mathbb{R}^n).$$

Вопрос о задачах, двойственных (s,t) -управляемости и вполне (s,t) -управляемости, много труднее для исследования. Известно, что [27] задача $(s,s]$ -управляемости двойственна задаче линейной (s,s) -наблюдаемости. Вопрос о параметрическом критерии (s,t) -управляемости и вполне (s,t) -управляемости остаётся открытым.

3. Заключительные замечания

В работе приведен обзор основных результатов по проблемам управляемости и наблюдаемости линейных стационарных систем с последействием. Изложение дано с точки зрения нового подхода, в основу которого положено понятие состояния, аккумулирующее минимальную информацию о предыстории, необходимую для вычисления движения системы в будущем, что является непосредственным обобщением подхода Калмана к управляемости и наблюдаемости систем без запаздывания. Заметим, что для линейных нестационарных систем с запаздыванием ряд задач исследуется [4],[10],[54],[55] вполне аналогично. Критериев разрешимости бесконечномерных задач в явной форме для нестационарных систем в литературе почти нет.

Для систем с запаздыванием можно сформулировать около трёх десятков определений управляемости и наблюдаемости, из которых более половины не исследовались в литературе и все определения непосредственно обобщают на системы с последействием определение Калмана. Оперировать со всеми этими определениями не вполне удобно, но отдать предпочтение каким-то конкретным весьма затруднительно. По-видимому, вопрос о полезности того или иного определения управляемости и наблюдаемости не может быть решён в рамках самой проблемы управляемости и наблюдаемости вне связи с другими проблемами теории управляемых систем.

Есть все основания полагать, что значение определяющего уравнения [4] не исчерпывается его применением при исследовании задачи относительной управляемости, а отражает более глубокие внутренние свойства системы, такие, как представление [18], [19] фундаментальной матрицы, представление решения [16] и др.

Представляется, что условие (2.1) также отражает внутренние (спектральные) свойства [34],[35],[36],[37],[42],[45],[49],[50],[51],[53],[56],[57]системы: оно входит в той или иной форме практически во все условия функциональной управляемости; является необходимым и достаточным критерием вполне нуль-управляемости, а также аппроксимативной управляемости [42],[48],[49] для некоторых систем с последействием; в последнее время обнаружилась [57] связь этого условия с задачей построения спектрально минимальных реализаций.

В связи с предыдущим замечанием отметим, что условие (2.1) как необходимое условие полной нуль-управляемости остаётся в силе и для системы (1.1) с распределённым запаздыванием общего вида, однако достаточным условием (в общем случае таких систем) не является (пример: $\dot{x}(t)=\dot{x}(t-h_1)+\int_{-h_2}^{0}u(t+\xi)\,d\xi$, $x(\tau)\equiv 0$, $\tau\le 0$, $x(+0)=x_0$, $u(t)\equiv 1$, $t\le 0$. Существуют такие несоизмеримые запаздывания h_1, h_2, при которых система не является вполне нуль-управляемой). Вопрос об общем необходимом и достаточном критерии полной нуль-управляемости остаётся открытым.

4. Некоторые нерешённые задачи качественной теории управления для систем с последействием

Из других задач, решение которых представляется актуальным для дальнейшего развития теории управляемости и наблюдаемости систем с последействием, отметим следующие:

1) описание классов систем, для которых критерии относительной и нуль-относительной управляемости совпадают;

2) исследование поточечной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа;

3) модальная управляемость многовходных систем;

4) получение критериев разрешимости задач вполне (s,t) и (s,t) -управляемости;

5) качественная теория управления и наблюдения для систем с распределённым запаздыванием, в частности, необходимое и достаточное условие модальной управляемости (см. [40]);

6) стабилизируемость систем с запаздывающим аргументом воздействием разностных регуляторов по типу обратной связи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н.Н. Оптимальные процессы в системах с запаздыванием. В кн.: Оптимальные системы. Статические методы: Тр. П Конгресса ИФАК, Базель, 1963.-М.:Наука, 1965.
2. Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. Относительная управляемость линейных динамических систем с запаздыванием // Докл. АН СССР.-1967.-N 6.-С.1260-1263.
3. Красовский Н.Н. Теория управления движением.-М.: Наука, 1968.
4. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов.-М.: Наука, 1971.
5. Куржанский А.Б. Управление и наблюдение в условиях неопределённости.-М.: Наука, 1977.
6. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов // Автоматика и телемеханика.-1972, N 9.-С.31-62.
7. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Математическая теория оптимального управления // Итоги науки и техники. Математический анализ.-1979.-N 16.-С.55-97.
8. Габасов Р., Кириллова Ф.М., Марченко В.М., Асмыкович И.К. Задачи управления и наблюдения для бесконечномерных сис-

тем.-Мн.: 1982. (Препринт/ Институт математики АН БССР,N 1 (186)).
9. Теория управления движением. Библиографический указатель /Р.Габасов., Ф.М.Кириллова, В.М.Марченко, И.К.Асмыкович.- Мн.: 1982. (Препринт/ Институт математики АН БССР, ч.I,II).
10. Забелло Л.Е. К вопросу управляемости линейных нестационарных систем // I, II.- Изв. вузов. Математика.-1976.- N 12.-С.30-37; 1977.-N 2.-С.27-36.
11. Kopeikina T.B. A controllability of nonlinear delay systems. In: Functional-differential systems and related topics.: Proc. of the First international conference held at Blazejewko, 1979. Zielona Gora.: 1980.
12. Ву К.Х. К вопросу управляемости нелинейных нестационарных систем с переменным запаздыванием // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.-1981.-N 5.-С.33-38.
13. Игнатенко В.В. Управляемость систем нейтрального типа со многими входами группой обыкновенных динамических регуляторов // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.-1976.-N 3.- С.26-33.
14. Крахотко В.В., Метельский А.В. К управляемости систем с рапределённым запаздыванием // Дифференц. уравнения.- 1974.-N 3.-С.419-425.
15. Manitius A., Olbrot A.W. Controllability conditions for linear systems with delayed state and control // Arch. Automatyki i Telemechaniki.-1972.-N 2.-P.119-131.
16. Марченко В.М. Об управляемости систем с запаздыванием // Изв. вузов. Математика.-1978.- N 1.-С.54-65.
17. Marchenko U.M. Controllability problems for time-lag systems.-Warszawa, 1981. (Preprint/ Institute of Mathematics. Polish Academy of Sciences, Nr 234).
18. Шкляр Б.Ш. К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения.-1974.-N 8.-С.1443-1450.
19. Шкляр Б.Ш. Построение допустимых управлений в системах с запаздывающим аргументом.-В сб.: Дифференциальные и интегральные уравнения.-Иркутск.1974.
20. Марченко В.М. О минимальном числе входов управляемой системы с запаздыванием // Докл. АН БССР.-1973.-N 7.-С.600-602.
21. Hewer G.A. A note on controllability of linear systems with time delay // IEEE Trans. Automatic Control.-1972.-

N 5.-P.733-734.
22. Астровский А.И., Мулярчик В.В., Шкляр Б.Ш. Управляемость и наблюдаемость систем с последействием в специальных классах функций.-Мн.: 1977. (Препринт/ Институт математики АН БССР, N 12(92)).
23. Марченко В.М. К задаче вычисления минимального числа входов управляемых динамических систем // Изв. вузов. Математика.-1978.-N 4.-С.42-52.
24. Габасов Р.Ф., Кириллова Ф.М., Шевняк Р.М., Копейкина Т.Б. Условная наблюдаемость линейных систем // Проблемы управления и теории информации.-1972.-Т.I(3-4).-С.217-238.
25. Zmood R.B. The euclidean space controllability of control systems with delay // SIAM J. Control.-1974.-N 4.-P.609-623.
26. Gabasov R., Karpuk V.V., Kirillova F.M. Some control problems for hereditary systems.- In: Functional-differential systems and related topics.: Prog. of the I intern. confer. held at Blazejewko,1979. Zielona Gora,1980.
27. Марченко В.М. К теории управляемости и наблюдаемости линейных систем с запаздывающим аргументом.- В кн.: Проблемы оптимального управления.-Мн.:Наука и техника,1981.
28. Култышев С.Ю. Об управляемости линейных функционально-дифференциальных систем // Дифференц. уравнения.-1975.-N8.- С.1355-1360.
29. Марченко В.М. Двойственность в задачах управления и наблюдения для линейных систем с последействием.-В кн.: Актуальные задачи теории динамических систем.-Мн.-1989.-С.5-19.
30. Минюк С.А. Две задачи управляемости для линейных систем с последействием // Вестн. Белорус. ун-та.-1972.-N 1.-С.8-11.
31. Olbrot A.W. Control of retarded systems with function space constraints. Part II.Approximate controllability // Control and Cybernetics.-1977.-N 2.-P.17-69.
32. Kirillova F.M., Kopeikina T.B., Zabello L.E., Minyuk S.A., Marchenko V.M. Controllability of linear multiconnected nonstationary hereditary systems.- Prog. of the IFAC Symposium.-Italy, udine,1976.

33. Morse A.S. Ring models for delay-differential systems // Automatica.-1976.-N 5.-P.529-531.
34. Olbrot A.W., Zak S.H. Controllability and observability problems for linear functional-differential systems // Found. of Control Eng.-1980.-N 2.-P.79-89.
35. Булатов В.И., Калюжная Т.С., Наумович Р.Ф. Управление спектром дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения.-1974.-N 11.-С.1946-1952.
36. Pandolfi L. On feedback stabilization of functional-differential systems // Boll. Univ. Math. Ital.-1975.-N 3.-P.626-635.
37. Manitius A.Z., Olbrot A.W. Finite spectrum assignment problem for systems with delays // IEEE Trans. Automatic Control.-1979.-N 4.-P.541-553.
38. Асмыкович И.К., Марченко В.М. Управление спектром систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика.-1976.-N 7.-С.5-14.
39. Marchenko V.M., Asmykovich I.K. On the problem of modal control in linear systems with delays.- Proc. of the IMACS European Simulation Meeting on Simulation of Distributed Parameter and Large-Scale Systems //Patrace, Greece.-october 2-4.-1979.-P.73-78.
40. Борковская И.М., Марченко В.М. К вопросу о модальном управлении в системах с распределённым запаздыванием // Докл. АН Беларуси.-1992.- N 2.- С.107-110.
41. Янович В.И. О реконструкции систем с последействием.- В кн.: Проблемы оптимального управления.-Мн.:Наука и техника, 1981.-С.189-198.
42. Марченко В.М. К управляемости линейных систем с последействием // Докл. АН СССР.-1977.-N 5.-С.1083-1086.
43. Olbrot A.W. Algebraic criteria of controllability to zero function for linear constant time-lag systems // Control and Cybernetics.-1973.-N 1/2.-P.59 - 77.
44. Размыслович Г.П. К конструктивной теории полной управляемости систем с отклоняющимся аргументом // Автореф. кандидат. диссерт.-Минск.-1980.
45. Минюк С.А., Ляховец С.Н. Об одной задаче управляемости для систем с многими запаздываниями // Изв. АН БССР. Сер. физ-мат. наук.-1980.-N 2.-С.12-17.

46. Thowsen A. Characterization of state controllable time-delay systems with piecewise constant inputs // Parts I, II.- Intern. J. of Control.-1980.-N 1.-P.31-42.
47. Марченко В.М. О квазиуправляемости линейных систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1979.-N 3.-С.18-22.
48. Шкляр Б.Ш. К теории управляемости систем нейтрального типа // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук.-1980.-N 6.-С.117-118.
49. Марченко В.М. К управляемости и наблюдаемости систем с последействием // Докл. АН БССР.-1978.-N 5.-С.239-242.
50. Шкляр Б.Ш. К наблюдаемости линейных стационарных систем с сосредоточенными запаздываниями // Докл. АН СССР.-1979.-N 3.-С.549-552.
51. Марченко В.М. О проблеме модального управления в линейных системах с запаздыванием // Докл. АН БССР.-1978.-N 5.-С.401-404.
52. Manitius A., Triggiani R. Function space controllability of linear retarded systems: a derivation from abstract operator conditions.- SIAM J. Control and Optimization.-1978.-Vol.16.- N 4.-P.559-643.
53. Manitius A., Necessary and sufficient conditions of approximate controllability for general linear retarded systems.- SIAM J. Control and Optimization.-1981. V.19.-N 4.-P.516-532.
54. Мордухович Б.Ш. Аппроксимативная управляемость линейных систем с запаздыванием при наличии ограничений и двойственные задачи идеальной наблюдаемости // Докл. АН БССР.-1982.- N 3.-С.201-204.
55. Забелло Л.Е. К вопросу идеальной наблюдаемости в линейных нестационарных системах с запаздыванием // Изв. АН СССР. Техн. кибернет.-1979.-N 3.-С.207-212.
56. Bhat K.P.M., Koivo H.N. Modal characterizations of controllability for time-delay systems // IEEE Trans. Automatic Control.-1976.-V.AC-21.-N 2.-P.292-293.
57. Pandolfi L. Canonical realistions of systems with delayed controls // Ricerche di Automatica.-1980.-V.10.-N 1.-P.27-37.