УДК 517.925.44

Л.И.Жилевич, доцент

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ ОДНОЙ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМЫ

Sufficient conditions for the existence of a limit cycle surrounding 2n+1 singular points are given for Lienard systems.

В работе [1] для системы

$$\dot{x} = y - F(x), \quad \dot{y} = -g(x) \tag{1}$$

в случае наличия $2n+1$ особых точек получены достаточные условия существования k предельных циклов ($k \geq 1$), окружающих все особые точки. В работе [2] получены аналогичные результаты для системы

$$\dot{x} = yh(x) - F(x), \quad \dot{y} = -g(x) \tag{2}$$

при условии, что

$$h(x) > 0. \tag{3}$$

Причем, как в [1], так и в [2], требовалось, чтобы число нулей у функции F(x) было не менее $2k+1$. Представляет интерес получить достаточные условия существования предельного цикла системы (1), когда указанное ограничение на функцию F(x) ослаблено. В случае наличия только трех особых точек у системы (2) такие условия получены в [3].

Распространим результаты работы [3] на случай $2n+1$ особых точек. (Заметим, что система (2) при условии (3) легко преобразуется в систему вида (1).)

Будем предполагать, что функции g(x), f(x), где $F(x) = \int_0^x f(x)dx$, непрерывны и гарантируют единственность решения задачи Коши.

Теорема 1. Пусть выполняются следующие условия:

1) $g(\alpha_i) = 0, \;\; i = -1, 0, 1, 2, \ldots, 2n-1;$

$$\alpha_{-1} < \alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{2n-1};$$

$g(x) > 0, \;\; \forall x \in]\alpha_{2i-3}, \alpha_{2i-2}[, \;\; i = \overline{1,n},$

$$\forall x \in]\alpha_{2n-1}, +\infty[;$$

$g(x) < 0, \;\; \forall x \in]\alpha_{2i-2}, \alpha_{2i-1}[, \;\; i = \overline{1,n},$

$$\forall x \in]-\infty, \alpha_{-1}[;$$

2) $f(x) < 0, \;\; \forall x \in]\beta_{-1}, \beta_1[,$

$$\beta_{-1} < \alpha_{-1}, \;\; \beta_1 > \alpha_{2n-1};$$

3) $\int\limits_0^{\beta_i} g(x)dx > 0, \;\; i = -1,1;$

$$\int\limits_0^{t} g(x)dx \le \min_i \int\limits_0^{\beta_i} g(x)dx, \;\; \forall t \in]\alpha_1, \alpha_{2n-2}[;$$

4) существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(x)$ такая, что:

а) $\varphi(0) = 0;$

$$\psi(x) = \varphi'(x) - f(x) < 0, \;\; \forall x \notin [\delta_{-1}, \delta_1],$$

$$\delta_{-1} < \alpha_{-1}, \;\; \delta_1 > \alpha_{2n-1};$$

$$\psi(\delta_{-1}) = \psi(\delta_1) = 0;$$

б) функция $\Phi(x)=\varphi(x)+g(x)/\psi(x)$ или ограничена сверху при $x \le -r$, или ограничена снизу при $x \ge r$, r - число, удовлетворяющее условию

$$r > \max(|\delta_{-1}|, \delta_1);$$

5) $\overline{\lim\limits_{x \to +\infty}} \varphi(x) = +\infty;$

6) $\underline{\lim\limits_{x \to -\infty}} \varphi(x) = -\infty.$

Тогда система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, окружающий все особые точки.

Теорема 2. Пусть выполняются условия 1)-4) теоремы 1 и, кроме того:

i) $|\varphi(x)| \le M, \;\; \forall x \in]-\infty, +\infty[,$

M - некоторое положительное число;

ii) существует такое число $b>0$, что

$$|g(x)| - \psi(x) \ge b,$$

если $|x| \ge \delta, \;\; \delta \ge \max(|\delta_{-1}|, \delta_1).$

Тогда система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, окружающий все особые точки.

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1)-4) теоремы 1 и хотя бы одно из условий:

A) $\varliminf\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = -\infty$,

$$|g(x)| - \psi(x) \ge b > 0, \text{ если } x \ge \delta,\ \delta \ge \delta_1,$$

b - некоторое число; функция $\varphi(x)$ ограничена при $x \ge \delta$;

B) $\varlimsup\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$;

$$|g(x)| - \psi(x) \ge b > 0, \text{ если } x \le -\delta,\ -\delta < \delta_{-1},$$

b - некоторое число; функция $\varphi(x)$ ограничена при $x \le -\delta$.

Тогда система (1) имеет по крайней мере один устойчивый предельный цикл, окружающий все особые точки.

Доказательство теорем 1-3 проводится так же, как и в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Жилевич Л.И.//Дифференциальные уравнения. 1985. Т.21, №6. С.1079-1081.
2. Lungu N.//Anal. numler. et theor approxim. 1986. T.15, №2. P.141-144.
3. Жилевич Л.И.//Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30, №3. С.377-380