УДК 621.3

В.И. Горошко, доцент; А.А. Полищук, доцент; Д.В. Петренко, студент

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ С ВЫРОЖДЕНИЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

The electrical circuits with topological singularities as LE-loops and CJ-sections are investigated on the base of state variables.

The theorem, which determines the degeneration of the main matrix for state variables has been proved, as well as its widening for the case of several singularities.

Порядок n дифференциального уравнения, описывающего динамические процессы в линейных стационарных цепях, обычно устанавливают, как количество реактивных элементов L и C цепи, в которых можно независимо задавать произвольные начальные условия. Если цепь содержит такие топологические особенности, как индуктивные сечения и емкостные контуры, то известно [1], что порядок сложности цепи

$$n = n_{LC} - S_L - l_C, \tag{1}$$

где n_{LC} — общее число элементов L и C; S_L — количество независимых индуктивных сечений; l_C — число независимых емкостных контуров.

В работе [2] показано, что возможна редукция порядка дифференциального уравнения цепи, содержащей топологические вырождения, дуальные рассмотренным выше: а) индуктивный контур (*LE*-контур); б) емкостное сечение (*CJ*-сечение). В [2] приводятся теоремы, на основе которых разработана техника понижения степени сложности цепи, т. е. техника получения «минимального» дифференциального уравнения.

Установим особенности, привносимые такими дуальными вырождениями цепи, в описание динамических процессов в пространстве состояний.

Пусть цепь содержит особенность типа *CJ*-сечение (рисунок).

Уравнения состояния для цепи на рисунке имеют вид

$$u' = Au + Bv, \tag{2}$$

где

$u = \mathrm{col}(u_1, u_2, u_3)$ — вектор-столбец переменных состояния;

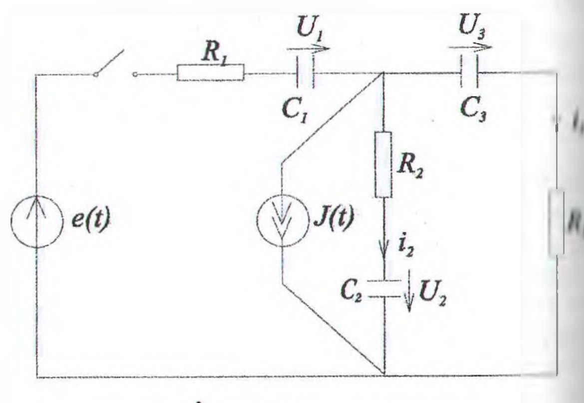
$v = \mathrm{col}(e(t), J(t))$ — вектор-столбец переменных входа

$$A = \begin{vmatrix} -\dfrac{R_2+R_3}{C_1R^2} & \dfrac{R_3}{C_1R^2} & -\dfrac{R_2}{C_1R^2}, \\ -\dfrac{R_3}{C_2R^2} & -\dfrac{R_1+R_3}{C_2R^2} & \dfrac{R_1}{C_2R^2}, \\ -\dfrac{R_2}{C_3R^2} & \dfrac{R_1}{C_3R^2} & -\dfrac{R_1+R_2}{C_3R^2}; \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} \dfrac{R_2+R_3}{C_1R^2} & \dfrac{R_2R_3}{C_1R^2}, \\ \dfrac{R_3}{C_2R^2} & -\dfrac{R_1R_3}{C_2R^2}, \\ \dfrac{R_2}{C_3R^2} & -\dfrac{R_1R_2}{C_3R^2}; \end{vmatrix}$$

A — матрица системы; B — матрица входа

$$R^2 = R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1.$$



Рисунок

Для характеристического многочлена $D(p) = \det(p1 - A)$ матрицы A известно представление [3]:

$$D(p) = p^n - D_1p^{n-1} + D_2p^{n-2} - ... + (-1)^n D_n, \tag{3}$$

где D_k — сумма всех главных миноров порядка k, $k \in [1, n]$.

Справедлива

Теорема 1. Матрица A линейной стационарной цепи, содержащей топологическое вырождение типа *CJ*-сечение или типа *LE*-контур, имеет хотя бы одно нулевое собственное значение.

Доказательство.

а) Пусть цепь содержит *CJ*-сечение, которому инцидентны n емкостных токов i_{Ck}, $k \in [1, n]$ и один эквивалентный источник тока J, равный алгебраической сумме токов всех ис зависимых источников тока, инцидентных CJ-сечению.

Направим ток i_{C1} внутрь сечения, а остальные токи i_{Ck} и ток J — наружу.

Тогда уравнение баланса токов для CJ-сечения примет вид

$$i_{C1} - \sum_{k=2}^{n} i_{Ck} - J = 0 . \qquad (4)$$

Предположим, что цепь содержит дополнительно m емкостей, не инцидентных CJ-сечению, а также l индуктивностей, в том числе и инцидентных сечению и S источников V_k, в число которых входят все ЭДС и неинцидентные сечению источники тока.

Согласно теоремам замещения, емкости C_k представим источниками напряжения с задающими напряжениями u_{Ck}, а индуктивности L_k — источниками тока с задающими токами i_{Lk}. Тогда для токов i_{Ck}, $k \in [1, n]$ получим

$$\begin{aligned} i_{C1} &= \sum_{k=1}^{n} a_{1k} u_{Ck} + \sum_{k=p+1}^{p+l} a_{1k} i_{Lk} + \sum_{k=1}^{S} b_{1k} v_k + b_{10} J; \\ i_{C2} &= \sum_{k=1}^{n} a_{2k} u_{Ck} + \sum_{k=p+1}^{p+l} a_{2k} i_{Lk} + \sum_{k=1}^{S} b_{2k} v_k + b_{20} J; \\ &\vdots \\ i_{Cn} &= \sum_{k=1}^{n} a_{nk} u_{Ck} + \sum_{k=p+1}^{p+l} a_{nk} i_{Lk} + \sum_{k=1}^{S} b_{nk} v_k + b_{n0} J, \end{aligned} \qquad (5)$$

где $p = n + m$ — общее количество емкостей цепи.

Подставив эти выражения в (4) и группируя слагаемые, найдем

$$\sum_{k=1}^{p} (a_{1k} - \sum_{i=2}^{n} a_{ik}) u_{Ck} + \sum_{k=p+1}^{p+l} (a_{1k} - \sum_{i=2}^{n} a_{ik}) i_{Lk} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p} (b_{1k} - \sum_{i=2}^{n} b_{ik}) u_{Ck} + (b_{10} - \sum_{i=2}^{n} b_{i0} - 1) J = 0.$$

Поскольку это соотношение должно удовлетворяться при любых значениях переменных

$$u_{Ck}, \quad k \in\in [1, p];$$

$$i_{Lk}, \quad k \in [p+1, p+l];$$

$$v_k, \quad k \in [1, S]; \qquad J,$$

то отсюда следуют равенства:

$$\begin{aligned} a_{1k} &= \sum_{i=2}^{n} a_{ik}, \quad k \in [1, p+1]; \\ b_{1k} &= \sum_{i=2}^{n} b_{ik}, \quad k \in [1, S]; \\ b_{10} &= \sum_{i=2}^{n} b_{io} + 1. \end{aligned} \qquad (6)$$

Равенства (6) свидетельствуют о том, что слагаемые первой строки в (5), за исключением последнего члена $b_{i0} J$, являются линейной комбинацией (суммой) соответствующих слагаемых остальных строк. Другими словами, строки в формулах (5) с исключенными членами $b_{i0} J$ линейно зависимы.

Разделим каждое из равенств (5) на соответствующую току i_{Ck} емкость C_k и учитывая динамические уравнения емкости $i_{Ck} = C_k u'_{Ck}$, придем к уравнениям

$$\begin{aligned} u'_{C1} &= \sum_{k=1}^{p} (a_{1k} / C_1) u_{ck} + \sum_{k=p+1}^{p+1} (a_{1k} / C_1) i_{ck} + \\ &+ \sum_{k=1}^{S} (b_{1k} / C_1) v_k + (b_{10} / C_1) J; \\ &\vdots \\ u'_{Cn} &= \sum_{k=1}^{p} (a_{nk} / C_1) u_{ck} + \sum_{k=p+1}^{p+1} (a_{nk} / C_1) i_{ck} + \\ &+ \sum_{k=1}^{S} (b_{nk} / C_1) v_k + (b_{n0} / C_1) J. \end{aligned} \qquad (7)$$

Поскольку переменные u_{Ck}, $k \in [1, p]$, i_{Lk}, $k \in [p+1, p+l]$ образуют полный набор переменных состояния, то уравнения (7) являются первыми n уравнениями состояния рассматриваемой цепи (общее количество уравнений состояния равно $p + l$).

Из установленной выше линейной зависимости усеченных строк в (5) непосредственно вытекает линейная зависимость первых n строк матрицы A, имеющей размер $p + l \times p + l$, т. е. установлен факт $\det A = 0$.

Если учесть, что в выражении (3) $D_n = \det A$, то заключаем, что характеристический многочлен $D(p)$ матрицы A имеет, как минимум, один нулевой корень, т. е. матрица A содержит нулевое собственное значение.

Для случая а) теорема 1 доказана.

б) Пусть цепь содержит вырождение типа LE-контур. В этом случае доказательство основывается на уравнении баланса напряжений для LE-контура:

$$u_{L1} - \sum_{k=2}^{n} u_{Lk} - E = 0,$$

где n — количество индуктивностей, инцидентных LE-контуру; E — алгебраическая сумма ЭДС всех инцидентных контуру независимых источников напряжения.

Аналогичными случаю а) рассуждениями устанавливается справедливость теоремы 1 для случая б).

Теорема 2. Если линейная стационарная цепь порядка n содержит m независимых вырождений типа LE-контур, CJ-сечение, то матрица A цепи имеет не менее m нулевых собственных значений.

Доказательство.

Из теоремы 1 следует, что матрица A будет содержать m строк, являющихся линейной комбинацией некоторых других строк.

Согласно теореме 1, $D_n = 0$.

Все главные миноры порядка $n-1$, вычисляются при вычеркивании одной строки и одного столбца, пересекающихся на главной диагонали матрицы A. Если $m>1$, то среди оставшихся строк с необходимостью найдутся линейно зависимые строки. Это означает, что все главные миноры порядка $n-1$ будут нулевыми и, таким образом, $D_{n-1} = 0$. Если понижать порядок главных миноров, то описанная ситуация сохранится для миноров вплоть до порядка $n-m+1$. Отсюда следует, что у характеристического многочлена $D(p)$ будут нулевыми все коэффициенты D_k, $k \in [n-m+1, n]$, т. е. $D(p)$ содержит, как минимум, m нулевых корней.

Теорема 2 доказана.

Цепь на рисунке содержит одно CJ-сечение. Матрица A этой цепи, согласно теореме 1, должна быть плохо обусловленной, что легко устанавливается по виду приведенной матрицы. Вырожденность матрицы A может создавать затруднения при численном решении уравнений состояния, если по алгоритму решения требуется вычисление обратной матрицы A^{-1}.

Вырожденность матрицы A можно устранить, понизив, согласно методике, изложенной в [2], порядок дифференциального уравнения, а значит и размерность матрицы A.

Пример. Пусть цепь на рис. 1 имеет параметры: $e(t) = E_0 e^{-t}$; $E_0 = 36$ В; $R_1 = 2$ Ом; $R_2 = R_3 = 1$ Ом; $C_1 = 1$ Ф; $C_2 = 2$ Ф; $C_3 = 3$ Ф; $u_1(0) = 18$ В; $u_2(0) = u_3(0) = -6$ В.

Найти методом переменных состояния напряжение $u_1(t)$.

Решение. Согласно методике [2], исключаем переменную

$$u_3 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{2}{3}u_2 - \frac{1}{3}q(0) - \int_0^t J(t)dt.$$

В результате порядок матрицы A понижается на единицу:

$$A = \begin{vmatrix} -\frac{7}{15} & -\frac{1}{15}, \\ -\frac{1}{30} & -\frac{13}{30}, \end{vmatrix}$$

а элементы переходной матрицы состояния

$$e^{At} = \begin{vmatrix} h_{11}(t) & h_{12}(t), \\ h_{21}(t) & h_{22}(t) \end{vmatrix}$$

принимают вид

$$h_{11}(t) = \frac{2}{3}e^{-0.5t} + \frac{1}{3}e^{-0.4t};$$

$$h_{12}(t) = \frac{2}{3}(e^{-0.5t} - e^{-0.4t});$$

$$h_{21}(t) = \frac{1}{3}(e^{-0.5t} - e^{-0.4t});$$

$$h_{22}(t) = \frac{1}{3}e^{-0.5t} + \frac{2}{3}e^{-0.4t}.$$

Решая аналитически матричное уравнение (2) при $J(t) = 0$ для переменной $u_1(t)$, находим

$$u_1(t) = 32e^{-0.5t} + 6e^{-0.4t} - 28e^{-t} + 8.$$

Контроль: установившаяся составляющая напряжения $u_{1\,уст} = 8$ В проверяется с помощью ЗИ-теоремы [2]:

$$u_{1\,уст} = q(0)/(C_1 + C_2 + C_3) = 48/6 = 8 \text{ В}$$

Литература

1. Чуа Л. О., Лин Пен-Мин, Машинный анализ электронных схем. — М.: Энергия, 1980.
2. Горошко В. И. Анализ динамических режимов в электрических цепях с топологическими особенностями // Труды БГТУ. сер. физ.-мат. наук и информ. — 2004. — Вып. XII.
3. Ланкастер П. Теория матриц. — М.: Наука, 1977.