

ПЛЕНОЧНОЕ ДВИЖЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПО ВНУТРЕННЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ КОНУСА

Stationary non-central moving of film of viscous fluid at the inside face, of revolving cone was investigated. On the basis of solution of the Navier-Stokes equation, the automodel solution for tangent and direct axis of speed was found.

Введение. Пленочные течения широко используются в газожидкостных реакторах, тепло-массообменных аппаратах и других технических устройствах [1–4]. Гидродинамика пленочных течений имеет важное значение при изучении ряда физико-химических процессов, для расчета оптимальных режимов работы технических устройств. Теоретические и экспериментальные исследования гидродинамики течений позволяют расширить область применения жидких пленок и интенсифицировать в них процессы тепломассопереноса.

Анализ результатов исследования пленочных течений выполнен в ряде работ [4–5]. Показано, что в достаточно широком диапазоне изменения числа Рейнольдса (до 2100) стационарное пленочное течение является автомодельным, и модели ламинарного пленочного движения достаточно точны при определении средних характеристик.

Математическая модель. Рассмотрим стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости по внутренней стенке вертикального конуса, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Ось z цилиндрической системы координат направим вверх по оси конуса (рис.). При малых углах β наклона образующей конуса к его оси элементарные участки поверхности рассматриваем как цилиндры.

Рассмотрим автомодельное решение $U = U(r)$ уравнений Навье – Стокса. В этом случае уравнения Навье – Стокса для касательной и продольной составляющих скорости принимают вид

$$\mu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r U_\varphi) \right) = 0; \quad (1)$$

$$\mu \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_l}{dr} \right) \right) - \rho(a_l - g_l) = 0. \quad (2)$$

Из внешних действующих сил рассматриваем проекции на образующую конуса центробежной силы и силы тяжести, которые обуславливаются центробежным ускорением и ускорением свободного падения:

$$a_l = a_r \sin \beta; \quad g_l = g \cos \beta.$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и отсутствуют касательные напряжения на поверхности пленки.

Тогда граничными условиями будут:

$$U_\varphi|_{r=R} = \omega R; \quad U_z|_{r=R} = 0; \quad (3)$$

$$\frac{dU_\varphi}{dr} \Big|_{r=R-\delta} = 0; \quad \frac{dU_l}{dr} \Big|_{r=R-\delta} = 0. \quad (4)$$

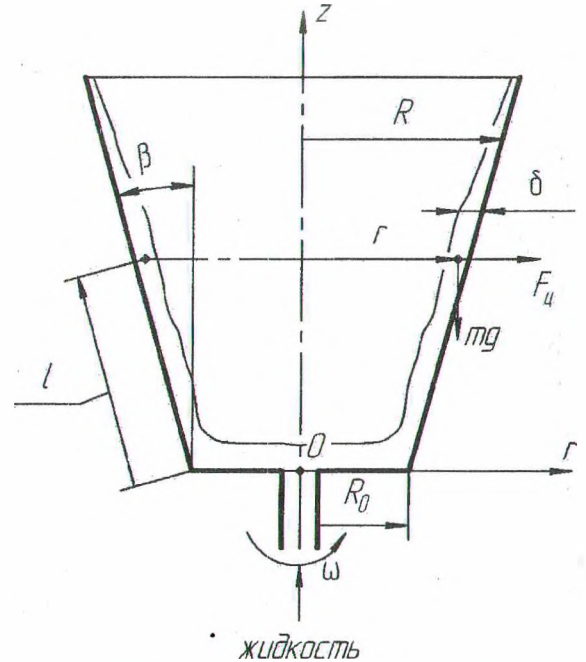


Рис. Схема течения вязкой жидкости

Находим общие решения уравнений (1) и (2):

$$U_\varphi = c_1 r + \frac{c_2}{r}; \quad (5)$$

$$U_l = c_3 \ln r + \frac{a_l - g_l}{4\nu} r^2 + c_4. \quad (6)$$

Для определения произвольных постоянных из граничных условий получим систему уравнений:

$$c_1 R + \frac{c_2}{R} = \omega R;$$

$$c_1 - \frac{c_2}{(R-\delta)^2} = 0;$$

$$c_3 \ln R + \frac{a_l - g_l}{4\nu} R^2 + c_4 = 0;$$

$$\frac{c_3}{R-\delta} + \frac{a_l - g_l}{2\nu}(R-\delta) = 0.$$

Отсюда находим

$$c_2 = c_1(R-\delta)^2;$$

$$c_1 = \frac{\omega R^2}{R^2 + (R-\delta)^2};$$

$$c_4 = -c_3 \ln R - \frac{a_l - g_l}{4\nu} R^2;$$

$$c_3 = -\frac{(a_l - g_l)(R-\delta)^2}{2\nu}.$$

Подставляя постоянные в (5)–(6) находим распределение касательной и осевой составляющих скорости:

$$U_\varphi(r) = \frac{\omega R^2}{R^2 + (R-\delta)^2} \left(r + \frac{(R-\delta)^2}{r} \right); \quad (7)$$

$$U_l(r) = \frac{a_l - g_l}{4\nu} \left[r^2 - R^2 - 2(R-\delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right]. \quad (8)$$

В зависимости от длины образующей l находим радиус в сечении конуса:

$$R = R_0 + l \sin \beta.$$

Для дальнейшего анализа перейдем к безразмерным переменным:

$$\tilde{r} = \frac{r}{R}, \quad \tilde{\delta} = \frac{\delta}{R}.$$

Тогда

$$U_\varphi(\tilde{r}) = \frac{\omega R}{1 + (1-\tilde{\delta})^2} \left(\tilde{r} + \frac{(1-\tilde{\delta})^2}{\tilde{r}} \right); \quad (9)$$

$$U_l(\tilde{r}) = \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu} \left[\tilde{r}^2 - 1 - 2(1-\tilde{\delta})^2 \ln \tilde{r} \right]. \quad (10)$$

Находим средние значения составляющих скорости:

$$\bar{U}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\varphi(\tilde{r}) d\tilde{r} =$$

$$= \frac{\omega R}{1 + (1-\tilde{\delta})^2} \frac{1}{\tilde{\delta}} \left(\frac{\tilde{r}^2}{2} + (1-\tilde{\delta})^2 \ln \tilde{r} \right) \Big|_{1-\tilde{\delta}}^1 =$$

$$= \frac{\omega R}{1 + (1-\tilde{\delta})^2} \frac{1}{\tilde{\delta}} \left(\frac{1 - (1-\tilde{\delta})^2}{2} + (1-\tilde{\delta})^2 \ln(1-\tilde{\delta}) \right). \quad (11)$$

$$\bar{U}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\delta}} \int_{1-\tilde{\delta}}^1 U_\varphi(\tilde{r}) d\tilde{r} =$$

$$= \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu\tilde{\delta}} \left(\frac{\tilde{r}^3}{3} - \tilde{r} - 2(1-\tilde{\delta})^2 (\tilde{r} \ln \tilde{r} - \tilde{r}) \right) \Big|_{1-\tilde{\delta}}^1 =$$

$$= \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu} \frac{1}{\tilde{\delta}} \times$$

$$\times \left(\frac{1 - (1-\tilde{\delta})^3}{3} - \tilde{\delta} + 2(1-\tilde{\delta})^2 \ln(1-\tilde{\delta}) + 2\tilde{\delta}(1-\tilde{\delta})^2 \right).$$

Разложим полученные зависимости в ряд по степеням $\tilde{\delta}$:

$$\bar{U}_\varphi = \frac{\omega R}{1 - \left(\tilde{\delta} - \frac{\tilde{\delta}^2}{2} \right)} \times$$

$$\times \left(1 - \tilde{\delta} + \frac{\tilde{\delta}^2}{6} + \frac{\tilde{\delta}^3}{4!} + \dots + \frac{(k-2)!\tilde{\delta}^k}{(k+1)!} \dots \right) =$$

$$= \omega R \left[1 + \left(\tilde{\delta} - \frac{\tilde{\delta}^2}{2} \right) + \left(\tilde{\delta} - \frac{\tilde{\delta}^2}{2} \right)^2 + \dots \right] \times$$

$$\times \left(1 - \tilde{\delta} + \frac{\tilde{\delta}^2}{6} + \frac{\tilde{\delta}^3}{4!} + \dots + \frac{(k-2)!\tilde{\delta}^k}{(k+1)!} \dots \right). \quad (12)$$

$$\bar{U}_l = \frac{(a_l - g_l)R^2}{4\nu} \times$$

$$\times \left(\frac{2\tilde{\delta}^2}{3} - \frac{\tilde{\delta}^3}{2} + \frac{12 \cdot 2!\tilde{\delta}^4}{5!} + \dots + \frac{12(k-2)!\tilde{\delta}^k}{(k+1)!} \dots \right).$$

Последнее выражение преобразовываем к виду

$$\bar{U}_l = \frac{(a_l - g_l)\delta^2}{6\nu} \times$$

$$\times \left(1 - \frac{3\tilde{\delta}}{4} + \frac{18 \cdot 2!\tilde{\delta}^2}{5!} + \dots + \frac{18k!\tilde{\delta}^k}{(k+3)!} \dots \right). \quad (13)$$

Относительная толщина пленки $\tilde{\delta}$ – величина достаточно малая по сравнению с 1, поэтому для дальнейшего анализа можем ограничиться первыми слагаемыми разложения (12) и (13). В данном случае получаем

$$\bar{U}_\varphi = \omega R; \quad (14)$$

$$\bar{U}_l = \frac{(a_l - g_l)\delta^2}{6\nu}. \quad (15)$$

Зависимость (14) показывает, что средняя скорость касательной составляющей скорости пленки равна соответствующей скорости конической поверхности. В данном случае центростремительное ускорение в пленке можно принять равным

$$a_r = \frac{\bar{U}_\phi^2}{r} = \omega^2 R. \quad (16)$$

Отсюда получаем зависимость для средней скорости пленки по направляющей цилиндрической поверхности:

$$\bar{U}_l = \frac{(\omega^2 R \sin \beta - g \operatorname{ctg} \beta) \delta^2}{6\nu}. \quad (17)$$

При заданном расходе Q жидкости рассчитываем ее удельный расход на единицу периметра конуса:

$$q = \frac{Q}{2\pi R}. \quad (18)$$

Тогда из соотношения

$$q = \bar{U}_l \delta = \frac{(\omega^2 R \sin \beta - g \operatorname{ctg} \beta) \delta^3}{6\nu} \quad (19)$$

получаем расчетную величину для толщины пленки жидкости:

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{6q\nu}{\omega^2 R \sin \beta - g \operatorname{ctg} \beta}}. \quad (20)$$

Полученные зависимости позволяют оценить гидродинамические характеристики пленочного течения в зависимости от исходных данных, получить режимы пленочного течения. Восходящее течение пленки по конической поверхности будет наблюдаться при выполнении условия

$$\omega^2 R \sin \beta - g \operatorname{ctg} \beta > 0. \quad (21)$$

Откуда получаем соотношение

$$\frac{\omega^2 R}{g} > \operatorname{ctg} \beta. \quad (22)$$

Данное условие соответствует физическим законам вращательного движения.

Обозначения: r, ϕ, z – цилиндрические координаты; ω – угловая скорость вращения конуса; U_z и U_ϕ – осевая и касательная составляющие скорости жидкости; \tilde{r} – безразмерная радиальная координата; $\delta, \bar{\delta}$ – толщина и безразмерная толщина пленки жидкости; R – радиус конуса; R_0 – радиус основания конуса; l – длина образующей конуса; ρ – плотность жидкости; m – масса жидкости; β – угол наклона образующей конуса к его оси; μ – коэффициент динамической вязкости жидкости; ν – коэффициент кинематической вязкости жидкости; Q – объемный расход жидкости; q – объемный расход жидкости, отнесенный к единице длины периметра конуса; g – ускорение свободного падения; c_1, c_2, c_3, c_4 – константы.

Литература

1. Капица П.Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1948. – Т. 18, № 1. – С. 3–28.
2. Капица П.Л., Капица С.П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости // Журнал экспериментальной и теоретической физики. – 1949. – Т. 19, № 2. – С. 105–120.
3. Стырькович М.А., Полонский В.С., Циклаури Г.В. Теплообмен и гидродинамика в двухфазных потоках атомных электрических станций. – М.: Наука, 1982. – 370 с.
4. Соколов В.И., Доманский И.В. Газо-жидкостные реакторы. – Л.: Машиностроение, 1976. – 216 с.
5. Уоллис Г.Б. Одномерные двухфазные течения. – М.: Мир, 1972. – 440 с.