УДК 517.444

Л.Д. Яроцкая, канд. физ.-мат. наук

W-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

This article deals with an integral transform of non-convolution type involving Meijer`s G-function in the kernel, which depends on variables, one of which is a parameter. The inversion theorem and the relation with the modified Kontorovich-Lebedev transform are given.

В настоящей работе рассмотрено новое представление W-преобразования, порожденного композицией H-преобразования и преобразования Конторовича – Лебедева. Установлены теоремы об условиях существования, обратимости W-преобразования в пространстве суммируемых функций. Методы исследования основаны на использовании равенства Меллина – Парсеваля, теорий обобщённых преобразований с ядрами Фурье и преобразования Конторовича – Лебедева. Преобразования по индексу весьма эффективно находят свои приложения в математической физике, позволяя дать решения ряда задач, связанных с интегрированием уравнений Лапласа, Пуассона и Гельмгольца для областей различного вида. Так, например, преобразование Конторовича – Лебедева и его различные модификации используются в приложениях в связи с задачей интегрирования этих уравнений при граничных условиях, заданных на поверхности конуса, решении задач теории дифракции. Известно, что W-преобразование обобщает многие интегральные преобразования по индексу со специальными функциями гипергеометрического типа в ядре. Рассмотрим W-преобразование вида

$$(Wf)(x)=2\int_0^\infty \tau G^{m+2,n+1}_{2n+1,2m+2}\left(x^2\left|\begin{matrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}+(\alpha_n),-(\alpha_n)\\ i\tau,-i\tau,(\beta_m),\frac{1}{2}-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)f(\tau)d\tau,$$

$$x>0, \tag{1}$$

где $G^{m+2,n+1}_{2n+1,2m+2}(x^2)$ – G-функция [1], векторы (α_n), (β_m) определены формулами

$$(\alpha_n)=\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\quad (\beta_m)=\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_m.$$

Функция f принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}_+)$. Кроме того, предполагается, что

$$m\ge n,\alpha_j\in\mathbb{R},\alpha_j<0,\ j=1,\ldots,n,$$
$$\beta_k\in\mathbb{R},\beta_k>0,\ k=1,\ldots,m \tag{2}$$

и никакие из параметров $\beta_1,\ldots,\beta_m$ не совпадают и не отличаются на целое число.

Заметим, что преобразование (1) обобщает несверточное преобразование с ядром, заданным синус-преобразованием Фурье по u функции $e^{-x\operatorname{ch}u}$ [2], которое не сводится к индексному преобразованию с функцией Мейера в ядре, рассмотренному в работе [3].

Интеграл (1) обобщает модифицированное преобразование Конторовича – Лебедева $(Klf)(x)$ с функцией Макдональда $K_{i\tau}(x)$ [1] в ядре, имеющей представление

$$K_{i\tau}(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}u}\cos\tau u\,du.$$

В случае $m=n=0$ на основании формулы (8.4.23.5) из [4] интеграл (1) имеет вид

$$(Klf)(x)=2\sqrt{\pi}e^{x^2/2}\times$$
$$\times\int_0^\infty\frac{\tau}{ch\pi\tau}K_{i\tau}\left(\frac{x^2}{2}\right)f(\tau)d\tau,\ x>0. \tag{3}$$

Неравенство $\left|K_{i\tau}(x^2/2)\right|\le K_0(x^2/2)$, где $K_0(z)$ – функция Макдональда нулевого индекса, и неравенство Гельдера дают оценку

$$\left|(Klf)(x)\right|\le 2\sqrt{\pi}e^{x^2/2}K_0\left(\frac{x^2}{2}\right)\|f\|_2\times$$
$$\times\left(\int_0^\infty\frac{\tau^2}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}d\tau\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{3}}e^{x^2/2}K_0\left(\frac{x^2}{2}\right)\|f\|_2,\ x>0.$$

Далее, используя асимптотические свойства функции Макдональда [1] $K_0(x)=O\left(e^{-x}/\sqrt{x}\right)$, $x\to+\infty$, и $K_0(x)=O(\ln x)$, $x\to 0+$, для любой функции $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$ получим

$$\int_0^\infty\left|(Klf)(x)\right|^2dx\le\frac{1}{3}\|f\|_2^2\int_0^\infty e^{x^2}K_0^2\left(\frac{x^2}{2}\right)dx<\infty.$$

Метод исследования преобразования (1) основан на применении L_2– теории преобразования Меллина:

$$f^*(s)=\int_0^\infty f(x)x^{s-1}dx,\quad s\in\mathbb{C}. \tag{4}$$

Известно [5], что если $x^\gamma f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+,x^{-1})$, то $f^*(s)\in L_2(\gamma-i\infty,\gamma+i\infty)$, и наоборот. Более того, справедливо равенство Парсеваля:

$$\int_0^\infty|f(x)|^2x^{2\gamma-1}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\left|f^*(\gamma+it)\right|^2dt. \tag{5}$$

Сходимость интеграла (1), если $f(x)\in L_2(\mathbb{R}_+)$, следует из асимптотических свойств ядра для достаточно больших τ, которые можно получить аналогично тому, как это сделано в [6]. Тогда на основании формул (8.4.23.3) и (8.4.51.9) из [4] преобразования Меллина (4) операторов (3) и (1) связаны формулой

$$(Wf)^*(s)=K^*(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)(Klf)^*(s), \tag{6}$$

где

$$(Klf)^*(s)=\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\times \tag{7}$$

$$\times\int_0^\infty \tau\Gamma\left(\frac{s}{2}+i\tau\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}-i\tau\right)f(\tau)d\tau,$$

$$K^*(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(\frac{s}{2}+\beta_j\right)\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\alpha_j-\frac{s}{2}\right)}{\prod_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}-\alpha_j\right)\prod_{j=1}^{m}\Gamma\left(\frac{1}{2}+\beta_j-\frac{s}{2}\right)} \tag{8}$$

и $\Gamma(\cdot)-$ Г-функция Эйлера. Легко проверить, что

$$K^*(s)K^*(1-s)=1,\quad \left|K\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2=1. \tag{9}$$

Выше показано, что $(Klf)\in L_2(\mathbb{R}_+)$, если $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда на основании (5), (6), (9) и L_2 – теории обобщенных преобразований [5] можно получить равенства

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|(Wf)^*\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt= \tag{10}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|(Klf)^*\left(\frac{1}{2}+it\right)\right|^2dt=$$

$$=\int_0^\infty|(Wf)(x)|^2dx=\int_0^\infty|(Klf)(x)|^2dx.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$. Тогда преобразования (1) и (3) существуют и справедливы равенства Парсеваля (10).*

Формулу обращения преобразования (1) получим на базе теоремы типа Планшереля [7, теорема 2.4] для преобразования Конторовича – Лебедева (3).

Теорема 2. *Пусть $f\in L_2\left(\mathbb{R}_+;\frac{\tau}{sh\pi\tau ch^2\pi\tau}\right)$. Тогда $(Klf)(x)\in L_2(\mathbb{R}_+;x^{-1})$. Кроме того,*

$$\frac{1}{\pi^3}\int_0^\infty e^{-x^2}\left|(Klf)(x)\right|^2\frac{dx}{x}= \tag{11}$$

$$=\int_0^\infty\frac{\tau}{sh\pi\tau ch^2\pi\tau}|f(\tau)|^2d\tau$$

и почти для всех $\tau>0$ обратный оператор имеет вид

$$f(\tau)=\frac{sh2\pi\tau}{\tau\pi^{5/2}}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty\int_0^\tau ye^{-x^2/2}K_{iy}\left(\frac{x^2}{2}\right)\times \tag{12}$$

$$\times(Klf)(x)\frac{dy\,dx}{x}.$$

Если $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$, тогда из (11) следует, что $(Klf)(x)\in L_2(\mathbb{R}_+;x^{-1})$. В работе [2] показано, что для каждого $\tau>0$ функция

$$h(x,\tau)=e^{-x^2/2}\int_0^\tau yK_{iy}(x^2/2)dy$$

принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}_+;x^{-1})$. Тогда, применяя теорему 72 из [5], запишем правую часть (12) через преобразование Меллина:

$$\int_0^\infty\int_0^\tau e^{-x^2/2}yK_{iy}\left(\frac{x^2}{2}\right)(Klf)(x)\frac{dy\,dx}{x}= \tag{13}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^\tau y(Klf)^*(-it)\times$$

$$\times\frac{\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)}{\Gamma(1/2+it/2)}dy\,dt,$$

где

$$(Wf)^*(s)=K^*(s)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)(Klf)^*(s),$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(1/2+it/2)}\int_0^\tau y\Gamma\left(\frac{it}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{it}{2}-it\right)dy=$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^{N}e^{-x^2/2}x^{-1+it}dx\int_0^\tau yK_{iy}\left(\frac{x^2}{2}\right)dy$$

со сходимостью в среднем квадратичном. Подставляя значение $(Klf)^*(-it)$ из (6) в правую часть (13), можем записать

$$I(\tau)=\frac{1}{4\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(Wf)^*(-it)\frac{K^*(1+it)}{\Gamma(1/2+it/2)}\times \tag{14}$$

$$\times\int_0^\tau y\Gamma(it/2+iy)\Gamma(it/2-iy)dy\,dt.$$

Далее, при условиях (2) из теоремы 71 [5] и интегрального представления (8.4.51.9) из [4] следует соотношение со сходимостью в среднем квадратичном:

$$\frac{K^*(1+it)}{2\Gamma(1/2+it/2)}\int_0^\tau y\Gamma\left(\frac{it}{2}+iy\right)\Gamma\left(\frac{it}{2}-iy\right)dy = \qquad (15)$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_{1/N}^{N} x^{-1+it}dx\int_0^\tau y\times$$

$$\times G^{m+2,n}_{2n+1,2m+2}\left(x^2\left|\begin{matrix}1+(\alpha_n),\frac{1}{2},\frac{1}{2}-(\alpha_n)\\ iy,-iy,\frac{1}{2}+(\beta_m),1-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)dy,$$

где $K^*(1+it)$ задано формулой (8).

Используя теорему 1 и асимптотические свойства ядра преобразования (1) по τ [7], можно показать, что если $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$, то $(Wf)(x)\in L_2(\mathbb{R}_+;x^{-1})$. Тогда, в силу (5), $(Wf)^*(-it)\in L_2(\mathbb{R})$ и можем получить аналог левой части (12) через оператор (1). Действительно, на основании формул (5), (14), (15), (12) для $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$ из (10) следует

$$f(\tau)=\frac{sh2\pi\tau}{\tau\pi^2}\frac{d}{d\tau}\int_0^\infty (Wf)(x)\frac{dx}{x}\int_0^\tau y\times \qquad (16)$$

$$\times G^{m+2,n}_{2n+1,2m+2}\left(x^2\left|\begin{matrix}1+(\alpha_n),\frac{1}{2},\frac{1}{2}-(\alpha_n)\\ iy,-iy,\frac{1}{2}+(\beta_m),1-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)dy.$$

Теорема 3. *Если* $f\in L_2(\mathbb{R}_+)$, *тогда почти для всех* $\tau>0$ *формула обращения преобразования (1) может быть получена при помощи интеграла (16).*

Замечание. Возможность дифференцировать по τ в интеграле (16) позволяет записать формулу обращения в виде

$$f(\tau)=\frac{sh2\pi\tau}{\pi^2}\int_0^\infty g(x)\times$$

$$\times G^{m+2,n}_{2n+1,2m+2}\left(x^2\left|\begin{matrix}1+(\alpha_n),\frac{1}{2},\frac{1}{2}-(\alpha_n)\\ iy,-iy,\frac{1}{2}+(\beta_m),1-(\beta_m)\end{matrix}\right.\right)\frac{dx}{x}.$$

Если $m=n=1$, $\alpha=-1/2$, $\beta=0$, то получим следующую пару интегральных преобразований:

$$g(x)=\int_0^\infty \tau M_{i\tau}(x)f(\tau)d\tau,$$

$$f(\tau)=-\frac{2}{\pi^3}\int_0^\infty [I_{i\tau}(x)+I_{-i\tau}(x)]g(x)\frac{dx}{x},$$

где $I_{i\tau}(x)$ — модифицированная функция Бесселя и $M_{i\tau}(x)=\int_0^\infty e^{-x\operatorname{ch}u}\sin\tau u\,du$.

Литература

1. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции: В 3 т. – М.: Наука, 1965.—1967.

2. Yakubovich S. B., Gusarevich (Yarotzkaya) L. D. On the non-convolution transformation with the Macdonald type kernel function // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 1998. – Vol. 1, № 3. – P. 297–309.

3. Яроцкая Л. Д. Преобразование по индексу с G-функцией Мейера в ядре // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. – 2000. – Вып. VIII. – С. 7–12.

4. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Дополнительные главы. – М.: Наука, 1986. – 800 с.

5. Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. – М.; Л.: Гостехиздат, 1948. – 334 с.

6. Яроцкая Л. Д. Асимптотические представления по индексу функций Бесселевого типа // Труды БГТУ. Сер. физ.-мат. наук и информ. – 2004. – Вып. XII. – С. 18—21.

7. Yakubovich S. B. Index transforms. – World Scientific Publishing Company, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1996. – 252 p.