УДК 517.925.41

Г.М. Булдык, профессор

ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

In the present work we study the existence of limit cycle for the equation $(1+x)yy' = -xP_3(x) - P_2(x)y + cy^2$ given by an algebraic curve of the fourth order and investigate critical points if such a limit cycle exists.

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$(1+x)yy' = -xP_3(x) - P_2(x)y + cy^2, \qquad (1)$$

где

$$P_3(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3;$$

$$P_2(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2.$$

В [2] доказано отсутствие предельных циклов и проведено качественное исследование «в целом» уравнения (1) при наличии особой точки типа «центр» в начале координат; в [3] указаны условия отсутствия предельных циклов, охватывающих одну особую точку, если

$$xP_3(x) = P_2(x)[b_0^{-2}(a_1b_0 - b_1)x^2 + b_0^{-1}x].$$

В настоящей работе изучим существование у уравнения (1) предельного цикла, заданного алгебраической кривой четвертого порядка (см.[1]) вида

$$y = W(x)\sqrt{P(x)} + Q(x), \qquad (2)$$

где

$$W(x) = \alpha_1 x + \alpha_0; \qquad (3)$$

$$P(x) = -x^2 + 2px + q^2; \qquad (4)$$

$$Q(x) = \beta_2x^2 + \beta_1x + \beta_0, \qquad (5)$$

и исследуем особые точки, если предельный цикл вида (2) существует.

Подставим (2) в уравнение (1), получим систему дифференциальных уравнений:

$$(1+x)(PQW' + WQ(p-x) + WPQ') +$$
$$+WPP_2(x) - 2cWQP = 0,$$
$$(1+x)(WPW' + W^2(p-x) + QQ') + xP_3(x) +$$
$$+P_2(x)Q - c(W^2P + Q^2) = 0 \qquad (6)$$

относительно W, P и Q.

Подставив (3), (4), (5) и значения W', Q' в систему (6) и приравняв к нулю коэффициенты при неизвестных, получим систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов α_0, α_1, β_0, β_1, β_2 p и q^2 решения (2):

$$-4\alpha_1\beta_2 + 2\alpha_1\beta_2c - \alpha_1b_2 = 0; \qquad (7)$$

$$-4\alpha_1\beta_2 + 7\alpha_1\beta_2p - 3\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_0\beta_2 + 2\alpha_0\beta_2c +$$
$$+2\alpha_1\beta_1c - 4\alpha_1\beta_2cp + 2\alpha_1b_2p - \alpha_0b_2 - \alpha_1b_1 = 0; \qquad (7.1)$$

$$5\alpha_1\beta_1p - 2\alpha_1\beta_0 + 3\alpha_1\beta_2q^2 + 5\alpha_0\beta_2p - 2\alpha_0\beta_1 +$$
$$+7\alpha_1\beta_2p - 3\alpha_1\beta_1 - 3\alpha_0\beta_2 + 2\alpha_1\beta_0c + 2\alpha_0\beta_1c -$$
$$-4\alpha_0\beta_2cp - 4\alpha_1\beta_1cp + \alpha_1b_2q^2 + 2\alpha_0b_2p +$$
$$+2\alpha_1b_1p - \alpha_0b_1 - \alpha_1b_0 - 2\alpha_1\beta_2cq^2 = 0; \qquad (7.2)$$

$$3\alpha_1\beta_0p + 2\alpha_1\beta_1q^2 - \alpha_0\beta_0 + 2\alpha_0\beta_2q^2 + 3\alpha_0\beta_1p +$$
$$+5\alpha_1\beta_1p - 2\alpha_1\beta_0 + 3\alpha_1\beta_2q^2 + 5\alpha_0\beta_2p -$$
$$-2\alpha_0\beta_1 + 2\alpha_0\beta_0c - 4\alpha_1\beta_0cp - 4\alpha_0\beta_1cp + \alpha_1b_1q^2 +$$
$$+2\alpha_0b_1p + 2\alpha_1b_0p - \alpha_0b_0 + \alpha_0b_2q^2 -$$
$$-2\alpha_0\beta_2cq^2 - 2\alpha_1\beta_1cq^2 = 0; \qquad (7.3)$$

$$3\alpha_1\beta_0p + 2\alpha_1\beta_1q^2 - \alpha_0\beta_0 + 2\alpha_0\beta_2q^2 + 3\alpha_0\beta_1p +$$
$$+\alpha_1\beta_0q^2 + \alpha_0\beta_0p + \alpha_0\beta_1q^2 - 4\alpha_0\beta_0cp -$$
$$-2\alpha_1\beta_0cq^2 - 2\alpha_0\beta_1cq^2 + \alpha_0b_1q^2 +$$
$$+\alpha_1b_0q^2 + 2\alpha_0b_0p = 0; \qquad (7.4)$$

$$\alpha_1\beta_0q^2 + \alpha_0\beta_0p + \alpha_0\beta_1q^2 - 2\alpha\beta_0cq^2 +$$
$$+\alpha_0b_0q^2 = 0; \qquad (7.5)$$

$$2\beta_2^2 - 2\alpha_1^2 + a_3 + b_2\beta_2 + \alpha_1^2c - c\beta_2^2 = 0; \qquad (7.6)$$

$$3\alpha_1^2p - 3\alpha_0\alpha_1 + 3\beta_1\beta_2 + 2\beta_2^2 - 2\alpha_1^2 + a_2 + b_2\beta_1 +$$
$$+b_1\beta_2 + 2\alpha_0\alpha_1c - 2\alpha_1^2pc - 2\beta_1\beta_2c = 0; \qquad (7.7)$$

$$\alpha_1^2q^2 + 4\alpha_0\alpha_1p + \beta_1^2 - \alpha_0^2 + 2\beta_0\beta_2 + 3\alpha_1^2p -$$
$$-3\alpha_0\alpha_1 + 3\beta_1\beta_2 + a_1 + \beta_0b_2 + b_1\beta_1 + b_0\beta_2 +$$
$$+\alpha_0^2c - 4\alpha_0\alpha_1cp - \alpha_1^2cq^2 - c\beta_1^2 -$$
$$-2\beta_0\beta_2c = 0; \qquad (7.8)$$

$$\alpha_0\alpha_1q^2 + \alpha_0^2p + \beta_0\beta_1 + \alpha_1^2q^2 + 4\alpha_0\alpha_1p -$$
$$-\alpha_0^2 + \beta_1^2 + 2\beta_0\beta_2 + 1 + \beta_0b_1 + b_0\beta_1 -$$
$$-2\alpha_0^2cp - 2\alpha_0\alpha_1cq^2 - 2\beta_1\beta_2c = 0; \qquad (7.9)$$

$$\alpha_0\alpha_1q^2 + \alpha_0^2p + \beta_0\beta_1 + b_0\beta_0 - \alpha_0cq^2 -$$
$$-c\beta_0^2 = 0. \qquad (7.10)$$

Рассмотрим уравнения (7.5) и (7.10). Очевидно, что при $\alpha_0 = \beta_0 = 0$ они обращаются в тождества. Если же $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 \neq 0$, то из (7.10) следует равенство $\beta_0(\beta_1 + b_0 - \beta_0c) = 0$. При $\alpha_0 \neq 0$, $\beta_0 = 0$ получим из (7.5) $\alpha_0q^2(\beta_1 + b_0) = 0$. Пусть $\alpha_0 \neq 0$ и $\beta_0 \neq 0$, тогда умножая (7.5) на α_0, а (7.10) на β_0 и вычитая, получим

$$(\alpha_0^2q^2 - \beta_0^2)(\beta_1 + b_0 - \beta_0c) = 0. \qquad (8)$$

Так как рассматривается решение (2) не особое, то $\alpha_0^2 q^2 - \beta_0^2 \neq 0$, и из (8) следует, что

$$\beta_1 + b_0 - \beta_0 c = 0. \qquad (8.1)$$

Итак, доказана

Лемма 1. Если на решении (2) нет особых точек уравнения (1), то выполняется (8.1).

Согласно доказанной леммы вместо (7.10) возьмем (8.1) и (7.5) примет вид

$$\alpha_1 q^2 + \alpha_0 p - \alpha_0 q^2 c = 0. \qquad (9)$$

Будем искать решение (2) с ненулевыми коэффициентами. Тогда из (7.1) находим

$$\beta_2 = \frac{b^2}{2(c-2)}, \qquad (10)$$

а из (7.6)

$$\alpha_1^2 = \frac{a_3}{2-c} - \frac{b_2^2}{4(c-2)^2}. \qquad (11)$$

Система уравнений (7)–(7.10) с учетом (8.1), (9), (10) и (11) и некоторого преобразования примет вид

$$\alpha_1(\beta_2 p + \beta_1(3-2c) + 4\beta_2 + b_1) - \alpha_0\beta_2 = 0; \quad (12)$$

$$\alpha_1(-q^2\beta_2 + p((5-4c)\beta_1 + 2b_1 + 7\beta_2) + b_0) -$$
$$-\alpha_0(3\beta_2 p + 2\beta_1(1-c) + 3\beta_2 + b_1) = 0; \quad (12.1)$$

$$\alpha_1[p(\beta_0(c+3) - 3b_0) - 2\beta_0] +$$
$$+\alpha_0(q^2(2\beta_1 c + \beta_2(2+3c) + b_2 + b_1 c) +$$
$$+p(\beta_1(1-4c) + 2\beta_2 + b_1) + b_0 - \beta_0) = 0; \quad (12.2)$$

$$3\beta_0 p\alpha_1 + \alpha_0(q^2(2\beta_2 + b_1 + \beta_1 - \beta_0 c^2) -$$
$$-p\beta_0 c - \beta_0 = 0; \quad (12.3)$$

$$\alpha_1 q^2 + \alpha_0(p - q^2 c) = 0; \quad (12.4)$$

$$(3-2c)(\alpha_1^2 p - \alpha_0\alpha_1) - \beta_1 + A = 0; \quad (12.5)$$

$$(1-c)(\alpha_1^2 q^2 + 4\alpha_0\alpha_1 p + \beta_1^2 - \alpha_0^2) +$$
$$+\left(b_1 - \frac{3b_2}{3-2c}\right)\beta_1 - \frac{b_2}{c-2}\beta_0 + B = 0; \quad (12.6)$$

$$(1-2c)(\alpha_0^2 q^2 c + \beta_0\beta_1) + D\beta_1 +$$
$$+\frac{b_2 + b_1(c-1)}{c-1}\beta_0 + \frac{B}{c-1} + 1 = 0; \quad (12.7)$$

$$\beta_1 + b_0 - c\beta_0 = 0, \quad (12.8)$$

где

$$A = \frac{1}{2(c-2)^2}(2a_2(c-2)^2 + 4a_3(c-2) +$$
$$+b_1 b_2(c-2) + 2b_2^2);$$

$$B = -\frac{3A}{3-2c} + a_1 + \frac{b_0 b_2}{2(c-2)};$$

$$D = \frac{3b_2 - (3-2c)(b_1 - b_0(1-c))}{(1-c)(3-2c)}.$$

Из (12.5) имеем

$$p = \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + \frac{\beta_2\beta_1 - A}{\alpha_1^2(3-2c)}, \qquad (13)$$

подставляя которое в (12), получим

$$\beta_1 = \frac{A\beta_2 - \alpha_1^2(b_1 + 4\beta_2)(3-2c)}{\beta_2^2 + \alpha_1^2(3-2c)^2}, \qquad (14)$$

а из (12.8) находим

$$\beta_0 = \frac{1}{c}\left(b_0 + \frac{A\beta_2 - \alpha_1^2(b_1 + 4\beta_2)(3-2c)}{\beta_2^2 + \alpha_1^2(3-2c)^2}\right), \qquad (15)$$

где β_2, α_1^2 определены выше (см. (10), (11)).

Пусть

$$F = \frac{\beta_0\beta_1}{c} + \frac{\beta_1 D}{(1-2c)c} +$$
$$+\frac{b_2 + b_1(c-1)}{c(c-1)(1-2c)}\beta_0 + \frac{B+c-1}{c(c-1)(1-2c)};$$

$$H = \beta_1^2 + \frac{b_1(3-2c) - 3b_2}{(3-2c)(1-c)}\beta_1 - \frac{b_2\beta_0}{(c-2)(1-c)} + \frac{B}{1-c};$$

$$K = 2\beta_2 + \beta_1(1-2c) + b_1 + c + (\beta_0 - b_0);$$

$$L = \frac{\beta_2\beta_1 - A}{\alpha_1^2(3-2c)};$$

$$M = \beta_2(3c-2) + 2\beta_1 c(1-c) + b_1 c;$$

$$N = 3\beta_0 + \beta_1 - 2b_0;$$

$$R = \beta_1(1-2c) + 2\beta_2 + b_1;$$

$$Q = \beta_1 + 2\beta_0 - b_0;$$

$$S = 2\beta_1(1-c) + 3\beta_2 + b_1;$$

$$T = \beta_1(5-4c) + 2b_1 + 7\beta_2,$$

тогда уравнения (12)–(12.8) с учетом (13) примут вид

$$\beta_2 q^2 + 3\beta_2 p^2 - (T + 3\beta_2 L - S)p +$$
$$+Q - LS = 0; \qquad (16)$$

$$q^2 pM - q^2 LM + p^2 R + (b_0 - \beta_0 -$$
$$-LR + N)p - 2\beta_0 - L(b_0 - \beta_0) = 0; \quad (16.1)$$

$$q^2 pK - q^2 LK - p^2\beta_0 c + \beta_0(Lc+2)p = 0; \quad (16.2)$$

$$q^2 pc - q^2(Lc+1) - p^2 + Lp = 0; \quad (16.3)$$

$$q^2 + 3p^2 - 2pL + \frac{H - L^2\alpha_1^2}{\alpha_1^2} = 0; \quad (16.4)$$

$$\alpha_0^2 q^2 + F = 0. \quad (16.5)$$

Умножим уравнение (16.4) на β_2 и вычтем из него (16). Получим

$$p = \frac{(Q - LS)\alpha_1^2 - \beta_2(H - \alpha_1^2 L^2)}{\alpha_1^2(T - S + \beta_2 L)} \equiv \Delta. \quad (17)$$

Из (16.4) найдем

$$q^2 = (L + 3\Delta)(L - \Delta) - H/\alpha_1^2, \qquad (18)$$

а из (16.5)

$$\alpha_0^2 = \frac{F\alpha_1^2}{H - \alpha_1^2(L+3\Delta)(L-\Delta)}. \qquad (19)$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. Если коэффициенты α_1, α_0, p, q^2, β_2, β_1, β_0 определяются формулами (10), (11), (14), (15), (17)–(19) и они удовлетворяют равенствам (16.1)–(16.3), то уравнение (1) имеет решение вида (2).

Отметим, что построенное таким образом решение не проходит через начало координат, и оно может не быть предельным циклом. Укажем также, что формулы (10), (11), (14), (15), (17)–(19) разрешимы относительно a_i, i = 1, 2, 3; b_j, j = 0, 1, 2 и c:

$$c = \frac{\alpha_1 q^2 + \alpha_0 p}{\alpha_0 q^2};$$

$$b_0 = c\beta_0 - \beta_1;$$

$$b_1 = \beta_2\left(\frac{\alpha_0}{\alpha_1} - p - 4\right) - \beta_1(3-2c);$$

$$b_2 = 2\beta_2(c-2);$$

$$a_1 = (1-c)(1+\beta_1\hat{D} - b_1\beta_0 + (1-2c)(\alpha_0^2 q^2 c +$$

$$+\beta_0\beta_1)) - b_2\beta_0 - b_0\beta_2 + \frac{3\hat{A}}{3-2c};$$

$$a_2 = \hat{A} + 2(\alpha_1^2 + \beta_2^2) - \beta_2(b_1 + 4\beta_2);$$

$$a_3 = (2-c)(\alpha_1^2 + \beta_2^2),$$

где

$$\hat{A} = \beta_1\beta_2 - (3-2c)(\alpha_1^2 p - \alpha_0\alpha_1);$$

$$\hat{D} = \frac{3b_2 - (3-2c)(b_1 - b_0(1-c))}{(1-c)(3-2c)} =$$

$$= c\beta_0 + \frac{2-c}{1-c}\beta_1 + \frac{\beta_2}{1-c}\left(\frac{2(c-2)}{3-2c} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} + p + 4\right).$$

Из системы

$$(1+x)y = 0,$$

$$cy^2 - P_2(x)y - xP_3(x) = 0$$

следует, что уравнение (1) может иметь до шести особых точек в конечной части плоскости: четыре на оси абсцисс и две на прямой $x=-1$, которая является интегральной прямой. На прямой $x=-1$ особые точки типа «седло» или «узел» и они не могут охватываться предельным циклом. Характер особых точек на оси Ox определяется характеристическими корнями уравнения:

$$\lambda^2 + P_2(x)\lambda + (1 + 2a_1x + 3a_2x^2 + 4a_3x^3)(1+x) = 0,$$

из которого следует, что начало координат – антиседло (λ_1 и λ_2 одного знака $|b_0| \geq 2$ или мнимые $|b_0| < 2$).

Известно, что предельный цикл может охватывать особую точку или группу особых точек с суммой индексов «+1», если в ее (их) окрестности функция $f(x) = P_2(x)(x+1)^{-c-1}$ меняет знак [4]. Так как начало координат антиседло, то две соседние особые точки, лежащие слева и справа, седла.

Не ограничивая общности, изучим существование предельного цикла вида (2) для $x > -1$, предполагая при этом, что на оси абсцисс имеются только две особые точки $O(0,0)$ и $A(x_1,0)$ (две другие – мнимые), т. е. предполагая, что

$$\sqrt{G} = a_2^2 - 4a_1a_3 - 2a_2a_3x_1 - 3a_3^2x_1^2 < 0.$$

Тогда предельный цикл, охватывающий $O(0,0)$, лежит в области:

а) $]-1,+\infty[$, если $x_1 < -1$;

б) $]x_1,+\infty[$, если $-1 < x_1 < 0$;

в) $]-1,x_1[$, если $x_1 > 0$.

Пусть $x_1 < -1$ (случай а), $b_1^2 - 4b_0b_2 > 0$ и один из корней $f(x)$ больше -1, т. е. $b_2(b_2 - b_1 + b_0) < 0$, (если $b_1^2 - 4b_0b_2 \leq 0$, то предельные циклы не существуют [4]).

Обозначим x_1^0 и x_2^0 корни многочлена $P(x) = -x^2 + 2px + q^2$. Тогда, если

$$\sigma\Delta(\Delta - L) + H/\alpha_1^2 > 0, \qquad (20)$$

то точка $\hat{x} = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1} \notin \left[x_1^0, x_2^0\right]$, т. е. $\hat{x}$ – изолированная особая точка кривой (2).

Теорема 2. Пусть теорема 1 имеет место. Тогда, если выполнено условие (20) и

$$(a_2 - a_3x_1)^2 < 4a_3(a_1 + a_3x_1^2);$$

$$x_1 < -1;\ b_2(b_2 - b_1 + b_0) < 0,$$

то при $x \in \left[x_1^0, x_2^0\right]$ решение (2) – предельный цикл уравнения (1), заданный алгебраической кривой четвертого порядка.

Действительно, в начале координат уравнение (1) имеет антиседло. В конечной части плоскости (x, y) имеются только две особые точки, лежащие на оси абцисс (две другие – мнимые). Причем особая точка $(x_1, 0)$ лежит левее интегральной прямой $x=-1$ и $\hat{x}$ – изолированная особая точка кривой (2). Таким образом, на замкнутой ветви кривой (2) нет особых точек уравнения (1).

Исследуем бесконечно удаленные особые точки уравнения (1) или, что то же, состояния равновесия на бесконечности системы:

$$\frac{dx}{dt} = (1+x)y;$$

$$\frac{dy}{dt} = -(x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^4) - \qquad (21)$$

$$-(b_0 + b_1x + b_2x^2) + cy^2,$$

предположив, что в конечной части плоскости существует предельный цикл, охватывающий начало координат.

Применив преобразование Пуанкаре

$$x=\frac{1}{z},\ y=\frac{\tau}{z},$$

получим систему:

$$\frac{d\tau}{dt}=-(z^3+a_1z^2+a_2z+a_3+$$
$$+\tau z(b_0z^2+b_1z+b_2)+\tau^2z^2(z+1-c)),$$
$$\frac{dz}{dt}=-z^3\tau(z+1),$$

правые части которой умножены на z^3. На оси z = 0 (соответствующей экватору сферы Пуанкаре) эта система не имеет особых точек.

Для изучения особых точек уравнения (1) в направлении оси Oy воспользуемся вторым преобразованием Пуанкаре:

$$x=\frac{\xi}{z}, y=\frac{1}{z},$$

которое приводит систему (21) к виду

$$\frac{d\xi}{dt}=(1-c)\xi z^2+z^3+b_0\xi z^3+b_1\xi^2z^2+\xi^2z^3+$$
$$+b_2\xi^3z+a_1\xi^3z^2+a_2\xi^4z+a_3\xi^5; \qquad (22)$$
$$\frac{dz}{dt}=-cz^3+b_0z^4+b_1\xi z^3+b_2\xi^2z^2+$$
$$+\xi z^4+a_1\xi^2z^3+a_2\xi^3z^2+a_3\xi^4z,$$

правые части которой умножены на z^3. Точка D(0,0) для этой системы – сложное состояние равновесия (Δ = 0, σ = 0). Так как $\xi Q_3(\xi,z)-zP(\xi,z)\equiv 0$, то к сложному состоянию равновесия D(0,0) полутраектории системы (22) стремятся в направлениях θ_1 = 0, θ_2 = π, θ_3 = $-\pi/4$, θ_4 = $3\pi/4$, удовлетворяющих уравнению $\sin^3\theta$ ($\cos\theta$ + $\sin$ θ) = 0 (теорема 64 [5]).

Применим к системе (22) преобразование $\xi=\xi$, $z=\xi\eta$. Получим систему

$$\frac{d\xi}{d\tau}=(1-c)\xi\eta^2+\xi\eta^3+b_0\xi^2\eta^3+b_1\xi^2\eta^2+$$
$$+b_2\xi^2\eta+\xi^3\eta^3+a_1\xi^3\eta^2+a_2\xi^3\eta+a_3\xi^3; \qquad (23)$$
$$\frac{d\eta}{d\tau}=-\eta^3-\eta^4,$$

у которой параметр заменен по формуле $d\tau$ = ξ^2dt. Эта система имеет два состояния равновесия $\tilde{O}$ (0,0) и $\tilde{M}$ (0, –1). Точка $\tilde{M}$ (0, –1) является седлом при $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\frac{p}{q^2}>0$ и узлом при $\frac{t_1}{\alpha_0}+\frac{p}{q^2}<0$ ($\lambda_1=1$, $\lambda_2=-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}-\frac{p}{q^2}$). Точка $\tilde{O}$ (0,0) – сложное состояние равновесия. Направления, в которых полутраектории системы (23) стремятся к (0,0), удовлетворяют уравнению $\cos\theta^*\sin^3\theta^*$ = 0. Таких направлений четыре:

$$\theta_1^*=0,\ \theta_2^*=\pi,\ \theta_3^*=\frac{\pi}{2},\ \theta_4^*=\frac{3}{2}\pi.$$

Для изучения характера состояния равновесия $\tilde{O}$ (0,0) применим к системе (23) преобразование

$$\xi=\xi,\ \eta=\eta_1\,\xi.$$

Делая замену параметра

$$\xi^2d\tau=d\tau_1,$$

получим систему вида:

$$\frac{d\xi}{d\tau_1}=a_3\xi+(1-c)\xi\eta_1^2+\xi^2\eta_1^3+b_0\xi^3\eta_1^3+$$
$$+b_1\xi^2\eta_1^2+b_2\xi\eta_1+\xi^4\eta_1^3+a_1\xi^3\eta_1^2+a_2\xi^2\eta_1; \qquad (24)$$
$$\frac{d\eta_1}{d\tau_1}=-(a_3\eta_1+(2-c)\eta_1^3+b_2\eta_1^2+a_2\xi\eta_1^2+$$
$$+b_1\xi\eta_1^3+2\xi\eta_1^4+a_1\xi^2\eta_1^3+b_0\xi^2\eta_1^4+\xi^3\eta_1^4),$$

для которой точка (0,0) – простое седло. Сепаратрисами седла являются полуоси ξ = 0 и η_1 = =0 или отрезки этих осей, примыкающих к (0,0).

Система (24) получается из системы (23) при помощи преобразования

$$\xi=\xi,\ \eta=\eta_1\,\xi.$$

Учитывая замену параметра $\xi^2d\tau=d\tau_1$, отметим, что движение по траекториям систем (24) и (23) осуществляется в одинаковом направлении. В силу лемм 1 и 2 § 21 [5], получаем, что состояние равновесия $\tilde{O}$ (0,0) системы (23) является седлом, сепаратрисы которого стремятся в направлениях

$$\theta_1^*=0,\ \theta_2^*=\pi,\ \theta_3^*=\frac{\pi}{2},\ \theta_4^*=\frac{3}{2}\pi.$$

Пусть $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\frac{p}{q^2}>0$. Тогда $\tilde{M}$ (0, –1) – седло.

Применив лемму 2 § 22 [5], получим, что каноническая окрестность состояния равновесия D (0,0) системы (22) состоит из шести гиперболических секторов. Если же $\frac{\alpha_1}{\alpha_0}+\frac{p}{q^2}<0$, то силу той же леммы получаем, что каноническая окрестность состояния равновесия D (0,0) системы (22) состоит из двух гиперболических секторов и двух параболических секторов.

Замечание. В заключение приведем дополнительные результаты исследования уравнения (1).

Теорема 3. Для того чтобы точка O(0,0) была центром для уравнения (1) при

$$R(b_1,b_2,c)\neq 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$g_1=g_3=g_5=g_7=0,$$

где

$$R(b_1,b_2,c)\ =\ 6b_1^2+4b_1^2c-2b_1^2c^2-35b_1b_2+35b_2^2.$$

Теорема 4. Для того чтобы точка $O(0,0)$ была центром для уравнения

$$yy'=-xP_3(x)-P_2(x)y+cy^2$$

при

$$\tilde{R}(b_1,b_2,c)\neq 0,$$

необходимо и достаточно выполнения условий

$$g_1=g_3=g_5=g_7=0,$$

где

$$\tilde{R}(b_1,b_2,c)\ =\ 2b_1^2c^2-35b_2^2.$$

Теорема 5. Если

$$xP_3(x)\ =\ (b_0+b_1x+b_2x^2)[b_0^{-2}(a_1b_0-b_1)x^2+ +b_0^{-1}x]$$

и

$$b_0b_2(b_0b_2-a_1b_0b_1+b_1^2+(a_1b_0-b_1)^2)\geq 0,$$

то дифференциальное уравнение (1) не имеет предельных циклов, охватывающих одну особую точку.

Теорема 6. Если

$$xP_3(x)=P_2(x)Q_2(x),$$

где $Q_2(x)$ – полином не выше второй степени, $\sigma\neq$ $\neq$ 0, 1, 2 и, кроме того, выполнено хотя бы одно из условий:

1) $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=0$;

2) $\beta_3=0$;

3) $\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1=\beta_3=0$,

то дифференциальное уравнение (1) не имеет предельных циклов, охватывающих одну особую точку.

Теорема 7. Если

$$xP_3(x)=P_2(x)Q_2(x),$$

где $Q_2(x)$ – полином не выше второго порядка и

$$c=0,\ (b_0-b_1+b_2)\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}b_2-2(b_1-b_2)\right)>0$$

или $c=1$, $b_1=2b_2$ или c = 2, $b_2=0$, то дифференциальное уравнение (1) не имеет предельных циклов, охватывающих одну особую точку:

$$\alpha_1=(a_1b_0-b_1)/b_0^2;$$

$$\alpha_2=b_0^{-1};$$

$$\beta_1=b_2/(2-c);$$

$$\beta_2=\frac{2b_1-2b_2-b_1c}{(1-c)(2-c)};$$

$$\beta_3=\frac{(2b_1-2b_2-b_1c)-b_0(2-3c+c^2)}{c(1-c)(2-c)}.$$

Литература

1. Яблонский А.И. Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2, № 3.

2. Булдык Г.М. Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 7.

3. Булдык Г.М. Дифференциальные уравнения. – 1978. – Т. 14, № 5.

4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гостиздат, 1949. – 458 с.

5. Андронов А.А. и др. Качественная теория динамических систем второго порядка. – М., 1966. – 568 с.