М А Т Е М А Т И К А

УДК 517.929

В.М. Марченко, профессор; О.Н. Поддубная, ассистент

СВЯЗЬ ГДР СИСТЕМ С СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА*

The paper deals with linear differential-algebraic systems with delay. These systems are referred to a hybrid class, namely, to hybrid differential-differential systems. It is proposed several methods to reduce such systems to ordinary time-delay dynamical systems of neutral type.

Введение. В работе изучаются свойства решений линейных гибридных дифференциально-разностных (ГДР) систем. Такие системы мы классифицируем как гибридные, понимая под гибридностью неоднородность вектора фазовых координат, n первых компонент которого являются кусочно-гладкими и непрерывными функциями, а m последующих – кусочно-непрерывными функциями. Такие системы представляют значительный интерес в приложениях, поскольку математическая модель объекта исследования часто описывается взаимосвязанными дифференциальными и алгебраическими уравнениями, что обычно имеет место, например, в задачах управления полетом, в задачах теории электрических цепей [7], демографии и экономики [4], при исследовании многосвязных систем [8]. Нужно отметить, что в зарубежной литературе термином «гибридные системы» определяют дискретно-дифференциальные системы управления, содержащие непрерывную и дискретную фазовые переменные и/или логические переменные. Основное внимание в работе уделяется ГДР системам в нормальной форме. Показывается, что исследование многих вопросов качественной теории управления для ГДР систем можно свести к исследованию аналогичных вопросов для специального класса систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа [2]. Однако такое сведение возможно только при дополнительных ограничениях на входные параметры системы (матрицы системы и начальные данные) и, как правило, для случая инерционных управляющих воздействий. В зависимости от ограничивающих факторов предложены три различных перехода от ГДР систем к системам нейтрального типа. Это позволяет развить классические подходы к представлению решений линейных динамических систем на ГДР системы в нормальной форме.

1. Начальная задача. Рассмотрим ГДР систему в нормальной форме:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{11}(t)x(t) + A_{12}(t)y(t) + B_1(t)u(t), \\ y(t) &= A_{21}(t)x(t) + A_{22}(t)y(t-h) + B_2(t)u(t),\ t \ge t_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^r$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$, $t \in \mathbb{R}$;

$$A_{11} \in \mathbb{R}^{n\times n}, A_{12} \in \mathbb{R}^{n\times m}, A_{21} \in \mathbb{R}^{m\times n},$$

$$A_{22} \in \mathbb{R}^{m\times m},\ B_1 \in \mathbb{R}^{r\times n},\ B_2 \in \mathbb{R}^{r\times m}$$

Начальные условия для системы (1) зададим в виде

$$x(t_0+0) = x(t_0) = x_0,\ y(\tau) = \psi(\tau),\ \tau \in (-\infty, t_0);$$

$$\psi(\tau) = 0,\ \tau \in (-\infty, t_0 - h), \tag{2}$$

где $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\psi(\cdot) \in PC([t_0 - h, t_0], \mathbb{R}^m)$.

Определение 1. *Под решением $x(t) = x(t;\ t_0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ \xi,\ u)$, $y(t) = y(t;\ t_0,\ x_0,\ \varphi,\ \psi,\ \xi,\ u)$, $t \ge t_0$, системы (1), соответствующим начальным условиям (2) и допустимому управлению $u = u(t)$, $t \ge t_0$, будем понимать произвольные векторные функции $x(t)$ и $y(t)$, $t \ge t_0$, удовлетворя-ющие первому уравнению системы при $t \ge t_0$, $t - t_0 \ne kh$, $k = 0,1,\ldots$, и второму уравнению системы при $t \ge t_0$, причем вектор-функция $x(\cdot)$ предполагается непрерывной кусочно-гладкой, а $y(\cdot)$ – кусочно-непрерывной на промежутке $[t_0, +\infty)$.*

Ввиду линейности изучаемой системы ее решение может быть представлено в виде суперпозиции векторных функций, одна из которых зависит только от управляющего воздействия, а другая – от начальных данных, а именно:

$$\begin{bmatrix} x(t;t_0,x_0,\varphi,\psi,\xi,u) \\ y(t;t_0,x_0,\varphi,\psi,\xi,u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(t;t_0,0,0,0,0,u) \\ y(t;t_0,0,0,0,0,u) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} x(t;t_0,x_0,\varphi,\psi,\xi,0) \\ y(t;t_0,x_0,\varphi,\psi,\xi,0) \end{bmatrix}.$$

2. Сведение ГДР систем в нормальной форме к системам нейтрального типа в случае инерционного управляющего воздействия и гладких начальных данных. Рассмотрим ГДР систему в нормальной форме (1) при воздействии инерционного управления, т. е.

* Работа выполнена в рамках сотрудничества с Белостокским техническим университетом.

$$\dot{u}(t)=v(t),\ t\ge t_0, u(t_0)=u_0,\ v(\cdot)\in PC([t_0,+\infty),\mathbb{R}^r) \quad (3)$$

и при условии, что матрицы-функции $A_{21}(t)$, $A_{22}(t)$, $B_2(t)$ являются дифференцируемыми при $t>t_0$.

На начальные данные (2) наложим ограничения:

1) гладкость начальных данных:

$$\dot{\psi}(\cdot)\in PC([t_0-h,t_0],\mathbb{R}^m),\ \psi(\cdot)\in C([t_0-h,t_0],\mathbb{R}^m);$$

2) условие согласования начальных данных:

$$y(t_0)=y_0=A_{21}(t_0)x_0+A_{22}(t_0)\psi(t_0-h)+ +B_2(t_0)u_0=\psi(t_0).$$

Вышеперечисленных ограничений (гладкость и согласованность начальных данных, инерционность управления, дифференцируемость некоторых матриц системы) достаточно, чтобы преобразовать ГДР систему к системе нейтрального типа. Действительно, дифференцируя второе уравнение системы (1) в силу первого, имеем

$$\dot{x}(t)=A_{11}(t)x(t)+A_{12}(t)y(t)+B_1(t)u(t),$$

$$\dot{y}(t)=\left(\dot{A}_{21}(t)+A_{21}(t)A_{11}(t)\right)x(t)+ +A_{21}(t)A_{12}(t)y(t)+\dot{A}_{22}(t)y(t-h)+ +A_{22}(t)\dot{y}(t-h)+\left(\dot{B}_2(t)+A_{21}(t)B_1(t)\right)u(t)+B_2(t)v(t),$$

$$\dot{u}(t)=v(t),\ t\ge t_0,$$

что равносильно одному уравнению нейтрального типа:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{y}(t)\\ \dot{u}(t)\end{bmatrix}= \begin{bmatrix} A_{11}(t) & A_{12}(t) & B_1(t)\\ \dot{A}_{21}(t)+A_{21}(t)A_{11}(t) & A_{21}(t)A_{12}(t) & A_{21}(t)B_1(t)+\dot{B}_2(t)\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\\ u(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\dot{A}_{22}(t)&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x(t-h)\\ y(t-h)\\ u(t-h)\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}(t)&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}(t-h)\\ \dot{y}(t-h)\\ \dot{u}(t-h)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ B_2(t)\\ I_r\end{bmatrix}v(t),\ t\ge t_0. \quad (4)$$

Для получения решения в виде формулы Коши введем матрицу [1]:

$$F(t,\tau)=\begin{bmatrix}F_{11}(t,\tau)&F_{12}(t,\tau)&F_{13}(t,\tau)\\ F_{21}(t,\tau)&F_{22}(t,\tau)&F_{23}(t,\tau)\\ F_{31}(t,\tau)&F_{32}(t,\tau)&F_{33}(t,\tau)\end{bmatrix},$$

$$\tau\in(t_0,t),\ t>t_0,\ \tau\ne t-ih,\ i=1,2,\dots,$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F(t,\tau)=-F(t,\tau)\times$$

$$\times\begin{bmatrix} A_{11}(\tau) & A_{12}(\tau) & B_1(\tau)\\ \dot{A}_{21}(\tau)+A_{21}(\tau)A_{11}(\tau) & A_{21}(\tau)A_{12}(\tau) & A_{21}(\tau)B_1(\tau)+\dot{B}_2(\tau)\\ 0&0&0\end{bmatrix}-$$

$$-F(t,\tau+h)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&\dot{A}_{22}(\tau+h)&0\\0&0&0\end{bmatrix}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F(t,\tau+h)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}(\tau+h)&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right) \quad (5)$$

с начальными условиями

$$F(t,t-0)=\begin{bmatrix}I_n&0&0\\0&I_m&0\\0&0&I_r\end{bmatrix},\ F(t,\tau)=0,\ \tau>t,$$

и дополнительному требованию непрерывности функции

$F(t,\tau)-F(t,\tau+h)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}(\tau+h)&0\\0&0&0\end{bmatrix}$ по τ на отрезке $[t_0,t]$.

В развернутой форме записи уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{11}(t,\tau)=-F_{11}(t,\tau)A_{11}(\tau)- -F_{12}(t,\tau)\left(\dot{A}_{21}(\tau)+A_{21}(\tau)A_{11}(\tau)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{12}(t,\tau)=-F_{11}(t,\tau)A_{12}(\tau)- -F_{12}(t,\tau)A_{21}(\tau)A_{12}(\tau)-F_{12}(t,\tau+h)\dot{A}_{22}(\tau+h)+ +\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F_{12}(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{13}(t,\tau)=-F_{11}(t,\tau)B_1(\tau)- -F_{12}(t,\tau)\left(A_{21}(\tau)B_1(\tau)+\dot{B}_2(\tau)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{21}(t,\tau)=-F_{21}(t,\tau)A_{11}(\tau)- -F_{22}(t,\tau)\left(\dot{A}_{21}(\tau)+A_{21}(\tau)A_{11}(\tau)\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{22}(t,\tau)=-F_{21}(t,\tau)A_{12}(\tau)-$$

$$-F_{22}(t,\tau)A_{21}(\tau)A_{12}(\tau)-F_{22}(t,\tau+h)\dot{A}_{22}(\tau+h)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F_{22}(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{23}(t,\tau)=-F_{21}(t,\tau)B_1(\tau)-$$
$$-F_{22}(t,\tau)\left(A_{21}(\tau)B_1(\tau)+\dot{B}_2(\tau)\right),$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{31}(t,\tau)=-F_{31}(t,\tau)A_{11}(\tau)-$$
$$-F_{32}(t,\tau)\left(\dot{A}_{21}(\tau)+A_{21}(\tau)A_{11}(\tau)\right), \qquad (6)$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{32}(t,\tau)=-F_{31}(t,\tau)A_{12}(\tau)-$$
$$-F_{32}(t,\tau)A_{21}(\tau)A_{12}(\tau)-F_{32}(t,\tau+h)\dot{A}_{22}(\tau+h)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\tau}\left(F_{32}(t,\tau+h)A_{22}(\tau+h)\right), \qquad (7)$$
$$\frac{\partial}{\partial\tau}F_{33}(t,\tau)=-F_{31}(t,\tau)B_1(\tau)-$$
$$-F_{32}(t,\tau)\left(A_{21}(\tau)B_1(\tau)+\dot{B}_2(\tau)\right) \qquad (8)$$

с начальными условиями:

$$F_{11}(t,t-0)=I_n,\ F_{12}(t,t-0)=0,\ F_{13}(t,t-0)=0,$$
$$F_{21}(t,t-0)=0,\ F_{22}(t,t-0)=I_m,\ F_{23}(t,t-0)=0,$$
$$F_{31}(t,t-0)=0,\ F_{32}(t,t-0)=0,\ F_{33}(t,t-0)=I_r,$$
$$F_{11}(t,\tau)=0,\ F_{12}(t,\tau)=0,\ F_{13}(t,\tau)=0, \tau>t,$$
$$F_{21}(t,\tau)=0,\ F_{22}(t,\tau)=0,\ F_{23}(t,\tau)=0, \tau>t,$$
$$F_{31}(t,\tau)=0,\ F_{32}(t,\tau)=0,\ F_{33}(t,\tau)=0, \tau>t. \qquad (9)$$

Комбинируя (6)–(8) и соответствующие начальные условия (9), получаем

$$F_{31}(t,\tau)\equiv 0,\ F_{32}(t,\tau)\equiv 0,\ F_{33}(t,\tau)\equiv I_r,\ \tau\in(t_0,t). \qquad (10)$$

Тогда формула Коши для системы (4) примет вид

$$\begin{bmatrix} x(t)\\ y(t)\\ u(t)\end{bmatrix}=\left(F(t,t_0)-F(t,t_0+h)\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}(t_0+h)&0\\0&0&0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_0\\y_0\\u_0\end{bmatrix}+$$
$$+\int_{t_0-h}^{t_0}F(t,\tau+h)\frac{d}{d\tau}\left(\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}(\tau+h)&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ \psi(\tau)\\0\end{bmatrix}\right)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)\begin{bmatrix}0\\B_2(\tau)\\I_r\end{bmatrix}v(\tau)d\tau,\ t\ge t_0$$

или, учитывая (10), в развернутой форме записи последнее уравнение может быть записано как

$$x(t)=F_{11}(t,t_0)x_0+F_{12}(t,t_0)y_0+F_{13}(t,t_0)u_0+$$
$$+\int_{t_0-h}^{t_0}F_{12}(t,\tau+h)\frac{d}{d\tau}\left(A_{22}(\tau+h)\psi(\tau)\right)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left(F_{12}(t,\tau)B_2(\tau)+F_{13}(t,\tau)\right)v(\tau)d\tau,$$
$$y(t)=F_{21}(t,t_0)x_0+\left(F_{22}(t,t_0)+\right.$$
$$\left.+F_{22}(t,t_0+h)A_{22}(t_0+h)\right)y_0+F_{23}(t,t_0)u_0+$$
$$+\int_{t_0-h}^{t_0}F_{22}(t,\tau+h)\frac{d}{d\tau}\left(A_{22}(\tau+h)\psi(\tau)\right)d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}\left(F_{22}(t,\tau)B_2(\tau)+F_{23}(t,\tau)\right)v(\tau)d\tau,$$
$$u(t)=u_0+\int_{t_0}^{t}v(\tau)d\tau,\ t\ge t_0.$$

В случае невырожденности матриц $A_{12}(t)$ и $A_{21}(t)$ для $t\ge t_0$ можно получить и другие представления решений системы. Ограничимся для простоты стационарным случаем.

Рассмотрим стационарную систему (4):

$$\dot{z}(t)=\tilde{A}z(t)+\tilde{B}z(t-h)+\tilde{C}\dot{z}(t-h)+\tilde{D}v(t),$$
$$t\ge t_0=0, \qquad (11)$$

где $A_{11}(t)=A_{11},\ A_{12}(t)=A_{12},\ A_{21}(t)=A_{21},$

$$A_{22}(t)=A_{22},\ B_1(t)=B_1,\ B_2(t)=B_2,$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&B_1\\A_{21}A_{11}&A_{21}A_{12}&A_{21}B_1\\0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\tilde{B}=0,\ \tilde{C}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&A_{22}&0\\0&0&0\end{bmatrix},\ \tilde{D}=\begin{bmatrix}0\\B_2\\I_r\end{bmatrix},\ z(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\y(t)\\u(t)\end{bmatrix}. \qquad (12)$$

По аналогии [3] запишем определяющее уравнение системы (11) в виде

$$Q_{k+1}(t)=\tilde{A}Q_k(t)+\tilde{B}Q_k(t-h)+\tilde{C}Q_{k+1}(t-h)+\tilde{D}V_k(t),$$
$$t\ge 0,\ k=-1,0,1,\dots. \qquad (13)$$

Положим

$$Q_k(t)=\begin{bmatrix}X_k(t)\\Y_k(t)\\U_k(t)\end{bmatrix}, \qquad (14)$$

где $X_k(t)\in\mathbb{R}^{n\times r}, Y_k(t)\in\mathbb{R}^{m\times r}, U_k(t)\in\mathbb{R}^{r\times r}$, для $t\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{Z}$.

Задавая начальные условия $V_0(0)=I_r,\ V_k(t)=0,\ k^2+t^2\ne 0,\ Q_k(t)=0,\ k<0$ или $t<0$, и расписывая (13) поэлементно с учетом (12) и (14), получаем

$$X_{k+1}(t)=A_{11}X_k(t)+A_{12}Y_k(t)+B_1U_k(t), \qquad (15)$$

$$Y_{k+1}(t) = A_{21}\left(A_{11}X_k(t) + A_{12}Y_k(t) + B_1U_k(t)\right) +$$
$$+ A_{22}Y_{k+1}(t-h) + B_2V_k(t) =$$
$$= A_{21}X_{k+1}(t) + A_{22}Y_{k+1}(t-h) + B_2V_k(t), \quad (16)$$
$$U_{k+1}(t) = V_k(t). \quad (17)$$

Откуда

$U_{k+1}(t) = \begin{cases} I_r, (k+1)^2 + t^2 = 0 \\ 0, (k+1)^2 + t^2 \neq 0 \end{cases}$ и, таким образом, равенства (15)–(17) запишем в виде

$$X_k(t) = A_{11}X_{k-1}(t) + A_{12}Y_{k-1}(t) + B_1U_{k-1}(t),$$
$$Y_k(t) = A_{21}X_k(t) + A_{22}Y_k(t-h) + B_2U_k(t),$$
$$t \geq 0, \ k = 0,1,...$$

с начальными условиями

$$U_0(0) = I_r, \ U_k(t) = 0, \text{ если } k^2 + t^2 \neq 0$$
$$Y_k(t) = 0, \ X_k(t) = 0, \text{ если } t < 0 \text{ или } k < 0.$$

В стационарном случае фундаментальную матрицу решений можно взять в виде

$$F'(t,\tau) = F(t-\tau), \ \tau \in (0, t), \ t > 0,$$

где

$$\dot{F}(t) = \tilde{A}'F(t) + \tilde{C}'\dot{F}(t-h), \ t > 0;$$
$$F(0) = I_{(n+m+r)}, \ F(t) \equiv 0, \ t < 0;$$

$F(t) - \tilde{C}'F(t)$ является непрерывной при $t \geq 0$. В определяющем уравнении (13) положим

$$Q_k(t) = \begin{bmatrix} Q_{11k}(t) & Q_{21k}(t) & Q_{31k}(t) \\ Q_{12k}(t) & Q_{22k}(t) & Q_{32k}(t) \\ Q_{13k}(t) & Q_{23k}(t) & Q_{33k}(t) \end{bmatrix},$$

где $Q_k(\cdot) \in \mathbb{R}^{(n+m+r)\times(n+m+r)}$, $k \in \mathbb{Z}$, а начальные условия зададим в виде

$$V_k(t) \equiv 0, \ k = 0,1,..., t > 0, \ Q_0(0) = \begin{bmatrix} I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 \\ 0 & 0 & I_r \end{bmatrix},$$
$$Q_k(t) = 0, \ k < 0 \text{ или } t < 0.$$

Тогда имеет место следующее представление фундаментальной матрицы $F(t)$ в виде ряда по решениям $Q_k(t)$, $k = 0,1,..., t > 0$, определяющего уравнения [6]:

$$F(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{i} Q_k(jh)\frac{(t-jh)^k}{k!},$$
$$t \in [ih, (i+1)h), \ i = 0,1,.... \quad (18)$$

Таким образом, в стационарном случае формула Коши [5] упрощается:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i \\ (t-ih>0)}} \left(Q_{21k}(ih)B_2 + Q_{31k}(ih)\right) \times$$
$$\times \int_0^{t-ih} \frac{(t-\tau-ih)^k}{k!} v(\tau)d\tau + x(t, y_0, \psi, 0),$$
$$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i \\ (t-ih>0)}} \left(Q_{22k}(ih)B_2 + Q_{32k}(ih)\right) \times$$
$$\times \int_0^{t-ih} \frac{(t-\tau-ih)^k}{k!} v(\tau)d\tau + + y(t, y_0, \psi, 0), t > 0. \quad (19)$$

В заключение отметим, что при дополнительном предположении о невырожденности матрицы A_{21} можно получить сведение системы (1) к системе нейтрального типа относительно векторной функции $(y(t), u(t))$, $t \geq 0$. Действительно, выражая из второго уравнения переменную $x(t)$:

$$x(t) = A_{21}^{-1}y(t) - A_{21}^{-1}A_{22}y(t-h) - A_{21}^{-1}B_2u(t), \ t \geq 0,$$

и подставляя в первое уравнение системы, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(y(t) - A_{22}y(t-h)\right) = \left(A_{21}A_{11}A_{21}^{-1} + A_{21}A_{12}\right)y(t) -$$
$$- A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}A_{22}y(t-h) +$$
$$+ \left(A_{21}B_1 - A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}B_2\right)u(t) + B_2\dot{u}(t), \ t \geq 0. \quad (20)$$

Комбинируя (5) с (20), получаем уравнение нейтрального типа:

$$\frac{d}{dt}\left(\begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t-h) \\ u(t-h) \end{bmatrix}\right) =$$
$$= \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}A_{21}^{-1} + A_{21}A_{12} & A_{21}B_1 - A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \times$$
$$\times \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}A_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y(t-h) \\ u(t-h) \end{bmatrix} +$$
$$+ \begin{bmatrix} B_2 \\ I_r \end{bmatrix} v(t), \ t \geq 0, \quad (21)$$

которое в свою очередь приводится к виду (11) с помощью замен:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A_{21}A_{11}A_{21}^{-1} + A_{21}A_{12} & A_{21}B_1 - A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}B_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} -A_{21}A_{11}A_{21}^{-1}A_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$
$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} A_{22} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ \tilde{D} = \begin{bmatrix} B_2 \\ I_r \end{bmatrix}, \ z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ u(t) \end{bmatrix}. \quad (22)$$

В определяющем уравнении (13) положим

$$Q_k(t) = \begin{bmatrix} Q_{11k}(t) & Q_{12k}(t) \\ Q_{21k}(t) & Q_{22k}(t) \end{bmatrix}.$$

где $Q_k(\cdot)\in\mathbb{R}^{(m+r)\times(m+r)}, k=0,1,\ldots$, а начальные условия зададим в виде

$$V_k(t)\equiv 0,\ k=0,1,\ldots,t>0,\ Q_0(0)=\begin{bmatrix} I_m & 0\\ 0 & I_r\end{bmatrix},$$

$$\dot{Q}_k(t)=0,\ k<0 \text{ или } t<0.$$

В силу специального вида матриц $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}, \tilde{D}$ решение определяющего уравнения имеет следующую структуру:

$$Q_k(t)=\begin{bmatrix} Q_{11k}(t) & Q_{12k}(t)\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad k>0, t>0.$$

Таким образом, представление решения системы (21) в виде формулы Коши [5] упрощается:

$$y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{\substack{i\\(t-ih>0)}}\left(Q_{11k}(ih)B_2+Q_{12k}(ih)\right)\times$$

$$\times\int_0^{t-ih}\frac{(t-\tau-ih)^k}{k!}v(\tau)d\tau++y(t,y_0,\psi,0),t>0. \quad (23)$$

Замечание 1. *Согласно уравнению (21) предположение на начальную функцию можно ослабить, потребовав дифференцируемость только функции $y(t)-A_{22}y(t-h)$ при $t\geq 0$.*

Замечание 2. *Следует отметить, что в случае, когда матрица A_{21} является особой, получение формулы Коши вида (23) возможно не для всего вектора $y(t)$, а только для некоторых его компонент, остальные же компоненты будут входить в так называемые уравнения связи.*

3. Сведение стационарных ГДР систем в нормальной форме к системам нейтрального типа в случае неинерционного управляющего воздействия. В данном разделе будем исследовать стационарную систему (1) при кусочно-непрерывных воздействиях A_{12} и начальной функции $\psi(\cdot)$ из класса $PC([-h,0],\mathbb{R}^m)$.

Полагая, что матрица A_{12} является неособой, выразим из первого уравнения (1) переменную $t\geq t_0$:

$$y(t)=A_{12}^{-1}\dot{x}(t)-A_{12}^{-1}A_{11}x(t)-A_{12}^{-1}B_1u(t),\ t\geq 0,$$

подставляя которую во второе уравнение системы, получаем уравнение нейтрального типа для переменной $x(t)$ вида

$$\dot{x}(t)=\left(A_{11}+A_{12}A_{21}\right)x(t)-A_{12}A_{22}A_{12}^{-1}A_{11}x(t-h)+$$

$$+A_{12}A_{22}A_{12}^{-1}\dot{x}(t-h)+\left(B_1+A_{12}B_2\right)u(t)-$$

$$-A_{12}A_{22}A_{12}^{-1}B_1u(t-h),\ t\geq h. \quad (24)$$

Из системы (1) следует, что в случае, когда матрица A_{12} не является особой, начальное условие для уравнения (24) может быть найдено по формуле

$$x(\tau)=e^{(A_{11}+A_{12}A_{21})\tau}x_0+$$

$$+\int_0^{\tau}e^{(A_{11}+A_{12}A_{21})(\tau-s)}A_{12}A_{22}\psi(s-h)ds+$$

$$+\int_0^{\tau}e^{(A_{11}+A_{12}A_{21})(\tau-s)}\left(A_{12}B_2+B_1\right)u(s)ds,\tau\in[0,h).$$

Замечание 3. *Предложенная методика сведения ГДР систем к системам нейтрального типа (при определенных предположениях) позволяет изучить ряд вопросов качественной теории управления для изучаемых систем, используя развитую технику исследования аналогичных вопросов для систем с запаздывающим аргументом нейтрального типа. Однако в этих случаях метод получения представления решений опирается на специфику рассматриваемых гибридных систем. Поэтому актуальной остается проблема представления решений в общем случае для дифференциально-алгебраических систем, которые с математической точки зрения являются обобщением систем нейтрального типа, – во-первых, а во-вторых, результаты получаются более естественными и непосредственно отражающими динамику исследуемых систем.*

Литература

1. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. – Минск: БГУ, 1973. – 246 с.

2. Габасов Р., Крахотко В.В. Относительная управляемость линейных стационарных систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1970. – Т. 6, № 8. – С. 1359 – 1365.

3. Кириллова Ф.М., Чуракова С.В. К проблеме управляемости линейных систем с последействием // Диференц. уравнения. – 1967. – Т. 3, № 3. – С. 436–445.

4. Леонтьев В. Межотраслевая экономика. – М.: Экономика, 1997. – 480 с.

5. Марченко В.М. Об управляемости систем с запаздыванием // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 1. – С. 54–65.

6. Шкляр Б.Ш. К проблеме относительной управляемости систем с отклоняющимся аргументом нейтрального типа // Дифференц. уравнения. – 1974. – Т. 10, № 8. – С. 1443–1450.

7. Dai L. Singular Control Systems // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Berlin: Springer-Verlag, 1989. – Vol. 118. – 332 p.

8. März R. Solvability of linear differential algebraic equations with properly stated leading terms // Results in Mathematics 45(2004) – Basel: Birkhauser Verlag, 2004. – P. 88–95.