ВВЕДЕНИЕ

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов заочной формы обучения специальностей экономика и управление на предприятии, бухгалтерский учет, анализ и аудит, менеджмент и маркетинг и составлено согласно программе курса «Экономико-математические методы и модели».

В пособии приведена программа курса «Экономико-математические методы и модели», в которой указаны темы лекций, практических и лабораторных занятий, а также перечислены темы для самостоятельного изучения и указана литература, необходимая для освоения данного курса.

В настоящем методическом пособии рассматриваются следующие темы: множественная корреляция и регрессия, модели межотраслевого баланса, модели управления запасами, динамическое программирование. По данным темам приводятся основные теоретические сведения и решения задач. После рассмотрения всех тем студентам предлагаются условия задач контрольной работы по курсу «Экономико-математические методы и модели».

Данное пособие позволит студентам заочной формы обучения познакомиться с построением математических моделей, поможет изучить основные теоретические сведения и самостоятельно выполнить контрольную работу по курсу «Экономико-математические методы и модели».

В пособии имеются три приложения. Приложения 1, 2 — таблицы используемых в математической статистике функций, данные которых необходимы при выполнении контрольной работы, Приложение 3 содержит описание алгоритма вычисления обратной матрицы способом наиболее удобным при проведении экономических расчетов.

Для более глубокого изучения соответствующих разделов в пособии приведен список литературы.

Программа курса «Экономико-математические методы и модели»

1. Введение. Предмет и содержание курса. Связь с другими дисциплинами.

2. Системы и модели.

2.1. Производственно-экономическая система.

а) Система. Структура системы.

б) Организационно-производственная система.

в) Большая система.

2.2. Моделирование систем.

а) Понятие модели. Экономические модели.

б) Декомпозиция систем и структуризация моделей.

в) Классификация моделей.

2.3. Математические модели и их классификация.

2.4. Экономико-математические методы.

3. Модели отраслевого планирования хозяйственной деятельности.

3.1. Экономические задачи, приводимые к транспортной модели.

3.2. Задачи и модели оптимального размещения и концентрации производства.

а) Постановка задачи.

б) Одноэтапная однопродуктовая модель с ограничениями оптимизирующих мощностей сверху.

в) Одноэтапная однопродуктовая модель с двухсторонними ограничениями (сверху и снизу).

г) Одноэтапная однопродуктовая модель с ограниченными пропускными способностями коммуникаций.

д) Многоэтапная однопродуктовая модель с односторонними ограничениями оптимизируемых мощностей.

е) Одноэтапная многопродуктовая модель с односторонними ограничениями оптимизируемых мощностей.

4. Методы макроэкономического моделирования.

4.1. Метод межотраслевого баланса.

а) Натуральный межотраслевой баланс.

б) Стоимостной межотраслевой баланс.

в) Межотраслевой баланс затрат труда.

г) Динамические межотраслевые балансы.

4.2. Производственные функции.

4.3. Экономическая динамика и ее моделирование.

5. Задачи и модели оперативного планирования, организации и управления производством.

5.1. Модели массового обслуживания.

а) Время обслуживания.

б) Моделирование одноканальной системы массового обслуживания.

в) Моделирование многоканальной системы массового обслуживания.

5.2. Задачи и модели управления производственными запасами.

5.3. Сетевое планирование и управление.

а) Содержание сетевого планирования и управления.

б) Численные характеристики сетевых моделей.

в) Расчет детерминированных сетевых моделей.

г) Оптимизация сетевых моделей.

6. Имитационное моделирование производственных систем

а) Метод имитационного моделирования.

б) Основные подходы к построению имитационных моделей.

в) Имитация процессов управления.

6. Модели макроэкономического моделирования:

а) Балансовые модели.

б) Производственные функции.

в) Модели спроса и предложения.

На изучение дисциплины учебным планом специальностей экономика и управление на предприятии, бухгалтерский учет, анализ и аудит, менеджмент, маркетинг, для студентов заочной формы обучения предусмотрено:

экономика на предприятии, бухгалтерский учет, анализ и аудит — 102 ч.;

маркетинг, менеджмент — 112 ч.

В том числе:

Лекции – 8 ч.

Лабораторные занятия – 6 ч.

Практические занятия – 4 ч. (бухгалтерский учет, анализ и аудит).

Курсовая работа (бухгалтерский учет, анализ и аудит).

Самостоятельная работа: экономика на предприятии – 84 ч; бухгалтерский учет, анализ и аудит – 84 ч; маркетинг, менеджмент – 93 ч.

В качестве контроля предусмотрен зачет.

Программа обзорного курса «Экономико-математические методы и модели»

Лекции

№ пп	Темы и план лекций	Кол-во часов	Цель и задачи темы	Форма контроля
1.	Предмет и содержание курса. Понятие системы. Модели. Математические модели. Модели межотраслевого баланса.	2	Ознакомить студентов с построением экономико-математических моделей. Ознакомить с моделями межотраслевого баланса.	Зачет
2.	Модели отраслевого планирования. Задачи и модели оптимального размещения и концентрации производства. Однопродуктовая многоэтапная задача размещения и концентрации производства.	2	Ознакомить с моделями размещения и концентрации производства	Зачет
3.	Производственная функция. Производственные функции. Эластичность. Эконометрический анализ производственной функции.	2	Ознакомить с понятием ПФ, научить эконометрическому анализу	Зачет
4.	Модели управления запасами. Модель Уилсона. Точка размещения заказа.	2	Познакомить с методами и моделями управления товарными запасами	Зачет

Практические занятия

№ пп	Темы и план практических занятий	Кол-во Часов	Цель и задачи Темы	Форма контроля
1.	Модели динамического программирования. Задача распределения ресурсов.	2	Научить решать задачи распределения ресурсов в дискретном случае с помощью метода динамического программирования.	Отчет по решению задач, зачет.
2.	Моделирование конфликтных ситуаций с помощью теории игр. Сведение матричной игры к задаче линейного программирования.	2	Ознакомить студентов с постановкой задач в конфликтной ситуации, решением таких задач и принятием решения на основании решения задачи.	Отчет по решению задач, зачет.

Лабораторные занятия

№ пп	Темы лабораторных работ	Кол-во часов	Цель и задачи темы	Форма контроля
1.	Оптимизация размещения лесозаготовительного производства между лесопунктами леспромхоза.	2	Приобрести навыки в построении математической модели задачи и ее решении.	Отчет по ЛР, зачет.
2.	Модели системы массового обслуживания.	2	Познакомить с основными понятиями систем массового обслуживания.	Отчет по ЛР, зачет.
3.	Модели сетевого планирования.	2	Ознакомить с методами построения сетевых графиков и методами решения задач.	Отчет по ЛР, зачет.

Самостоятельная работа

№ пп	Темы, вопросы темы	Рекомендуемая литература
1.	Регрессионные модели и их анализ. Значимость уравнения регрессии. Доверительные интервалы для коэффициентов регрессии.	[18], [19].
2.	Балансовые модели. Модели межотраслевого баланса.	[16], [19].
3.	Производственная функция Кобба-Дугласа. Эконометрический анализ производственной функции.	[4], [17],
4.	Задачи и модели оптимального размещения и концентрации производства.	[12], [19].
5.	Модели управления запасами. Модель Уилсона.	[17], [16].
6.	Модели массового обслуживания. Уравнения Колмогорова. Основные характеристики систем массового обслуживания.	[17], [16], [19].
7.	Сетевое планирование и управление. Правила построения сетевых графиков. Расчет временных параметров сетевого графика.	[17], [19].

<u>Контрольная работа № 1</u>

1. Построение экономических моделей и их анализ (многофакторная регрессионная модель).
2. Модель межотраслевого баланса.
3. Задача управления запасами.
4. Задача динамического программирования.

Курсовая работа для специальности бухгалтерский учет, анализ и аудит.

Методические указания к выполнению и оформлению контрольной работы

Контрольная работа может оформляться либо в студенческой тетради либо на листах формата А4. Каждая новая задача начинается с нового листа. В обязательном порядке приводится условие задачи. По ходу решения следует приводить используемые формулы и пояснять полученные числовые значения. Вычисления можно проводить как с помощью калькулятора, так и на компьютере.

Решение должно сопровождаться необходимыми пояснениями и выводами.

Оформленная контрольная работа должна содержать список используемой литературы с указанием авторов, названия, места и даты издания.

Тема 1. МНОЖЕСТВЕННАЯ КОРРЕЛЯЦИЯ И РЕГРЕССИЯ

Любая экономическая политика заключается в регулировании определенных экономических параметров и поэтому должна основываться на знании того, как эти параметры влияют друг на друга и на составляющие экономической среды. Исследование экономических явлений и процессов содержит следующие этапы: экономическая постановка задачи, построение математической модели, решение модели и оценку результатов решения. Наибольшую сложность в решении поставленной задачи представляет отбор факторов, которые оказывают влияние на изучаемое явление и выбор формы связи.

Между экономическими явлениями и процессами могут существовать два типа зависимостей: а) функциональная, б) статистическая. В случае функциональной связи результативный показатель однозначно зависит от независимых переменных. В экономических исследованиях, как правило, встречаются стохастические зависимости, которые отличаются приблизительностью, неопределенностью. Они проявляются только в среднем по значительному количеству объектов (наблюдений).

Стохастическая связь — это неполная, вероятностная зависимость между показателями, которая проявляется только в массе наблюдений, иначе говоря, каждому фиксированному значению переменной соответствует статистическое распределение значений другой переменной. Это обусловлено тем, что зависимая переменная, кроме выделенной переменной, находится под влиянием ряда неконтролируемых и неучтенных факторов, а также тем, что наблюдения изучаемых величин неизбежно сопровождаются некоторыми случайными ошибками.

В экономических исследованиях часто приходится встречаться с математическими моделями, которые устанавливают связь между случайными и неслучайными величинами. Применение корреляционного и регрессионного анализа позволяет решить одну из важнейших экономических проблем — комплексное, всестороннее изучение факторов.

Корреляционный анализ

Корреляционной зависимостью называется зависимость, при которой каждому значению одной случайной величины X соответствует среднее значение другой случайной величины Y.

Задачи корреляционного анализа:

1) Определение степени связи (тесноты, силы, интенсивности) двух и более переменных.

2) Отбор факторов, которые оказывают наиболее существенное влияние на результативный признак, на основе измерения степени связи между факторами. Существенные факторы используются далее в регрессионном анализе.

3) Определение неизвестных причинных связей.

Исследование корреляционных зависимостей имеет огромное значение. Это проявляется в том, что устанавливаются место и роль каждого фактора в формировании уровня исследуемых показателей, углубляются знания об изучаемых явлениях, определяются закономерности их развития и как итог — точнее обосновываются планы и управленческие решения, более объективно оцениваются итоги деятельности предприятий и более полно определяются внутрихозяйственные резервы.

Корреляционные взаимосвязи экономических переменных можно описать с помощью так называемых корреляционных характеристик. Они позволяют математически обосновать предположения о характере связи между исследуемыми переменными. Рассмотрим парную и множественную корреляцию. ***Парная корреляция*** — это связь между двумя показателями, один из которых является факторным (независимым x), а другой — результативным (зависимым y). ***Множественная корреляция*** возникает от взаимодействия нескольких факторов с результативным показателем.

Необходимые условия применения корреляционного анализа.

1. Наличие достаточно большого количества наблюдений о величине исследуемых факторных и результативных показателей (в динамике или за текущий год по совокупности однородных объектов).

2. Исследуемые факторы должны иметь количественное измерение и отражение в тех или иных источниках информации.

Коэффициент парной корреляции используется в качестве меры, характеризующей степень линейной связи двух переменных. Он представляет собой ковариацию двух наборов данных (например, x_{i1} и y_m или x_{i1} и x_{i2}, $i = \overline{1,n}$, $m = \overline{1,n}$), деленную на произведение их стандартных отклонений:

$$r_{yx_j} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot \sum_{m=1}^{n} y_m}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{m=1}^{n} y_m^2 - \left(\sum_{m=1}^{n} y_m\right)^2}}, \tag{1.1}$$

$$r_{x_j x_l} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij} x_{il} - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \cdot \sum_{m=1}^{n} x_{ml}}{\sqrt{n\sum_{i=1}^{n} x_{ij}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij}\right)^2} \cdot \sqrt{n\sum_{m=1}^{n} x_{ml}^2 - \left(\sum_{m=1}^{n} x_{ml}\right)^2}}, \tag{1.2}$$

Коэффициент парной корреляции является безразмерной величиной и не зависит от выбора единиц обеих переменных. Значение коэффициента корреляции лежит в интервале от -1 (в случае строгой линейной отрицательной связи) до +1 (в случае строгой линейной положительной связи). Соответственно, положительное значение коэффициента корреляции свидетельствует о прямой связи между исследуемым и факторным показателем, а отрицательное — об обратной. Чем ближе значение коэффициента корреляции к ± 1, тем теснее связь.

Близкий к нулю коэффициент корреляции говорит об отсутствии линейной связи переменных, но не свидетельствует об отсутствии их связи вообще. В случае равенства нулю показателя корреляции нельзя однозначно утверждать о том, что исследуемые показатели независимы. В данном случае можно попытаться найти более сложную модель их связи.

Значительный интерес представляют коэффициенты корреляции, характеризующие взаимосвязь факторов между собой: $r_{x_j x_l}$. В корреляционную модель надо подбирать независимые между собой факторы. Если коэффициент корреляции двух факторов выше 0,85, то один из них необходимо исключить из модели.

Коэффициент r_{yx_j} показывает тесноту связи между результативным показателем y и одним из факторных показателей x_j.

Матрица коэффициентов парной корреляции имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & r_{yx_1} & \dots & r_{yx_k} \\ r_{x_1y} & 1 & \cdots & r_{x_1x_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{x_ky} & r_{x_kx_1} & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Коэффициент множественной корреляции принимает значения от 0 до 1, но несет в себе более универсальный смысл: чем ближе его значение к 1, тем в большей степени учтены факторы, влияющие на зависимую переменную, тем более точной выглядит построенная на основе отобранных факторов модель. Расчет коэффициента множественной корреляции производится на основе значений коэффициентов парной корреляции и технически является довольно сложной процедурой, трудоемкость которой возрастает по мере увеличения количества факторов, включенных в модель. Например, для двухфакторной модели значение коэффициента множественной корреляции R можно найти по следующей формуле:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}. \tag{1.4}$$

Коэффициент множественной корреляции можно также найти по формуле:

$$R = \sqrt{1 - \frac{\det K}{K_{11}}}, \tag{1.5}$$

где $\det K$ — определитель корреляционной матрицы (1.3), а K_{11} — алгебраическое дополнение элемента первой строки и первого столбца матрицы K.

Квадрат коэффициента корреляции называют **коэффициентом детерминации** и обозначают: $D = R^2$. Коэффициент D показывает процент разброса значений случайной величины y. Чем меньше отличается коэффициент корреляции от 1, тем связь между результативным признаком и факторными признаками ближе к линейной. Если $D < 0{,}7$, то считают, что линейной связи нет.

Регрессионный анализ

Регрессионный анализ является эффективным статистическим методом изучения взаимосвязей переменных, из которых одна рассматривается как зависимая, а другие как независимые. В основе лю бой регрессионной модели лежит уравнение регрессии, которое показывает, каким будет в среднем изменение зависимой переменной y, если независимые переменные x_i примут конкретные значения, т.е. регрессией y на x_i называется функция вида $M(y|x_1, x_2, \ldots, x_k) = f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, где $M(y|x)$ — математическое ожидание. Оценкой этой функции является выборочное уравнение регрессии $\overline{y}_x = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Задачи регрессионного анализа:

1. Установление формы зависимости, т. е. определение влияния факторов на величину результативного показателя (в абсолютном измерении). Для решения этой задачи подбирается соответствующий тип математического уравнения, которое наилучшим образом отражает характер изучаемой связи (прямолинейной, криволинейной и т.д.). Выбор уравнения связи играет важную роль в корреляционном анализе, потому что от правильного выбора уравнения регрессии зависит ход решения задачи и результаты расчетов.
2. Определение уравнения регрессии. Процесс нахождения функции регрессии называют выравниванием значений зависимой переменной.
3. Оценка неизвестных значений зависимой переменной.

Различают **уравнения** (модели) **парной** и **множественной регрессии**. Если уравнение регрессии математически описывает поведение множества данных исследуемого показателя y во взаимосвязи с массивом данных одной независимой переменной x, то говорят о модели парной регрессии. Модели множественной регрессии отражают вклад нескольких независимых переменных x_j в результат исследуемого показателя y.

Для отображения и оценки регрессионной взаимосвязи переменных могут использоваться различные функции: линейные, экспоненциальные, логарифмические, полиномиальные и др.

Обоснование уравнения связи делается с помощью сопоставления параллельных рядов, группировки данных и линейных графиков. Если форму зависимости обосновать трудно, то поиск модели связи можно провести с помощью разных уравнений и затем сравнить полученные результаты.

Математически обосновать предположения о характере связи между исследуемыми переменными позволяет аппарат корреляцион ного анализа, по результатам которого судят о характере и тесноте связи между переменными.

Многофакторная регрессионная модель

Пусть y — зависимая переменная, а x_j — независимые переменные, оказывающие существенное влияние на зависимую переменную. Таким образом, y является функцией переменных x_j, $j = \overline{1,k}$. С помощью функции $y = f(x_1, x_2, \ldots x_k)$ количественно оценивается усредненная зависимость между переменными, которые исследуются.

Мы будем рассматривать линейную зависимость между переменными:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + \ldots + b_k x_k, \tag{1.6}$$

где b_0, $b_1, \ldots, b_k$ — коэффициенты регрессии.

Такая модель описывает явления, в которых изменение всех независимых переменных пропорционально связаны с изменением зависимой переменной.

Задача заключается в оценке параметров регрессии. Для оценки параметров регрессии используют метод наименьших квадратов.

Поскольку статистическая зависимость может быть выявлена только при многоразовом повторении, то далее будем считать, что для $k+1$ переменной мы имеем n совместных наблюдений, например n предприятий, или n отраслей народного хозяйства. Результаты наблюдений представим в виде табл. 1.

Таблица 1

Номер наблюдения	Переменные					
	y	x_1	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_k
1	y_1	x_{11}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1k}
2	y_2	x_{21}	$\ldots$	x_{2j}	$\ldots$	x_{2k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
i	y_i	x_{i1}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{ik}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
n	y_n	x_{n1}	$\ldots$	x_{nj}	$\ldots$	x_{nk}

Индекс столбца j показывает соответствующую наблюдаемую переменную, а индекс строки i — номер совместных наблюдений над

$(k+1)$ переменной. Таким образом, x_{ij} — результат i-го наблюдения над j-й переменной.

Неизвестные коэффициенты b_0, $b_1,\ldots,b_k$ найдем из условия минимизации суммы квадратов отклонений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\hat{y}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-(b_0+b_1x_{i1}+\ldots+b_kx_{ik}))^2\to\min. \tag{1.7}$$

Из необходимого условия экстремума получим систему нормальных уравнений для определения неизвестных коэффициентов $b_0,b_1,b_2,\ldots b_k$:

$$\begin{cases} nb_0+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}+\cdots+b_k\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ik}=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \\ b_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}^2+\cdots+b_k\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}x_{ik}=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}y_i, \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_0\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ik}+b_1\sum\limits_{i=1}^{n}x_{i1}x_{ik}+\cdots+b_k\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ik}^2=\sum\limits_{i=1}^{n}x_{ik}y_i. \end{cases}, \tag{1.8}$$

Решая эту систему любым из известных методов (метод Гаусса, матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений), найдем неизвестные $b_0,b_1,b_2,\ldots b_k$.

Рассмотрим решение системы (1.8) в матричном виде. Обозначим

$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Тогда функцию регрессии (1.6) можно записать в матричном виде:

$$\hat{Y}=XB, \tag{1.9}$$

Тогда система (1.8) запишется в виде:

$$X'XB=X'Y, \tag{1.10}$$

где X' — транспонированная матрица. При $\det(X'X)\neq 0$, имеем:

$$B=\left(X'X\right)^{-1}X'Y, \tag{1.11}$$

где $\left(X'X\right)^{-1}$ — матрица, обратная матрице $\left(X'X\right)$.

Коэффициент b_0 — постоянная величина результативного показателя, которая не связана с изменением факторов $x_1, x_2, \ldots x_k$. Коэффициенты $b_1, b_2, \ldots b_k$ уравнения показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности других.

Таким образом, используя тот или иной тип математического уравнения, можно определить степень зависимости между изучаемыми явлениями, т.е. узнать, на сколько единиц в абсолютном измерении изменяется величина результативного показателя с изменением факторного на единицу. Однако регрессионный анализ не дает ответа на вопрос: тесная это связь или нет, решающее воздействие оказывает данный фактор на величину результативного показателя или второстепенное?

Коэффициенты регрессии в уравнении связи имеют разные единицы измерения, что делает их несопоставимыми, если возникает вопрос о сравнительной силе воздействия факторов на результативный показатель. Чтобы привести их в сопоставимый вид, все переменные уравнения регрессии выражают в долях среднеквадратического отклонения, другими словами, рассчитывают *стандартизированные коэффициенты регрессии.* Их еще называют бета-коэффициентами по символу, который принят для их обозначения.

Бета-коэффициенты и коэффициенты регрессии, связаны следующим отношением:

$$\beta_i = b_i \frac{\sigma_{x_i}}{\sigma_y},$$

где $\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum \left(x - \overline{x}\right)^2}{n}}$ — среднеквадратическое отклонение, которое служит критерием однородности информации, $\overline{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$.

Бета-коэффициенты показывают, что если величина фактора увеличится на одно среднеквадратическое отклонение, то соответствующая зависимая переменная увеличится или уменьшится на долю своего среднеквадратического отклонения. Сопоставление бета-коэффициентов позволяет сделать вывод о сравнительной степени воздействия каждого фактора на величину результативного показателя.

По аналогии можно сопоставить и коэффициенты эластичности, которые рассчитываются по формуле:

$$Э_i = b_i \frac{\overline{x}_i}{\overline{y}}.$$

Коэффициенты эластичности показывают, на сколько процентов в среднем изменяется функция с изменением аргумента на 1%.

Статистическая оценка модели и коэффициентов регрессии

Адекватность полученных моделей в целом определяется по критерию Фишера. Для того чтобы убедиться в надежности уравнения связи и правомерности его использования для практической цели, необходимо дать статистическую оценку надежности показателей связи. Для этого используются критерий Фишера, коэффициенты множественной корреляции и детерминации.

Критерий Фишера рассчитывается следующим образом:

$$F_{\text{набл.}} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{ост}} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2 \Big/ (n-1)}{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \Big/ (n-k-1)}, \qquad (1.12)$$

где y_i — фактические индивидуальные значения результативного показателя; $\hat{y}_i$ — индивидуальные значения результативного показателя, рассчитанные по уравнению регрессии; $\overline{y}$ — среднее значение результативного показателя; k — количество независимых переменных в уравнении связи; n — количество наблюдений (объем выборки).

Фактическая величина $F_{\text{набл.}}$ сопоставляется с табличной (по таблицам F-распределения, см. Приложение 1) и делается заключение о надежности связи. Если $F_{\text{набл.}} \geq F_{табл.}$, тогда линейную модель можно считать адекватной с выбранной степенью точности.

Важной задачей является оценка надежности факторов, т. е. проверка существенности коэффициентов регрессии. ***Значимость коэффициентов регрессии*** проверяется по критерию Стьюдента. Для их проверки вычисляют

$$t_{b_j} = \frac{b_j}{\sigma_{b_j}}, \ \sigma_{b_j} = \sigma_{ост}\sqrt{c_{jj}}, \qquad (1.13)$$

где c_{jj} — диагональные элементы матрицы $\left(X^{'}X\right)^{-1}$.

Вычисленные значения сравнивают с табличным значением $t_{\alpha,n-k-1}$. Если расчетное значение t_{b_j} выше табличного, то можно сделать заключение о том, что величина коэффициента регрессии является значимой, т. е. x_j существенно влияет на y. Табличные значения $t_{\alpha,n-k-1}$ находят по таблице значений распределения Стьюдента. При этом учитываются количество степеней свободы ($n - k - 1$) и уровень доверительной вероятности (в экономических расчетах обычно 0,05 или 0,1).

Если $t_{b_j} \le t_{\alpha,n-k-1}$, для некоторого j, тогда соответствующие коэффициенты b_j статистически ненадежны. В таком случае вместо этих переменных следует в уравнение регрессии ввести другие экономически обусловленные переменные. Перед тем, как принять решение об исключении переменных в силу их несущественного влияния на зависимую переменную, проводят исследование с помощью коэффициента детерминации. Если коэффициент детерминации регрессии со всеми переменными несущественно изменяется по сравнению с коэффициентом детерминации уравнения регрессии с исключенными переменными, то это свидетельствует о том, что включение этих переменных в уравнение регрессии не улучшает его.

Для того, чтобы получить интервальные оценки следует найти доверительные интервалы по формулам:

$$[b_j - t_{\alpha,n-k-1}\sigma_{b_j}; b_j + t_{\alpha,n-k-1}\sigma_{b_j}], \qquad (1.14)$$

Исследуя таким образом все коэффициенты регрессии, получаем модель содержащую существенные факторы.

О полноте связи между исследуемыми величинами, как уже упоминалось, можно также судить также по величине *множественных коэффициентов корреляции и детерминации.* Например, если коэффициент корреляции R=0,92, а коэффициент детерминации D=0,85, то это значит, что вариация результативного признака на 85% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 15% вариации результативного показателя. Значит, в корреляционную модель удалось включить наиболее существенные факторы. Следовательно, данное уравнение можно использовать для практических целей:

а) оценки результатов хозяйственной деятельности;

б) расчета влияния факторов на прирост результативного показателя;

в) подсчета резервов повышения уровня исследуемого показателя;

г) планирования и прогнозирования его величины.

Решение задачи многофакторного корреляционного и регрессионного анализа удобно проводить на ПЭВМ по типовым программам. Сначала формируется матрица исходных данных в первой колонке которой записывается порядковый номер наблюдения, во второй — результативный показатель (y), а в следующих — факторные показатели (x_j). Эти сведения вводятся в ПЭВМ и рассчитываются матрицы парных и частных коэффициентов корреляции, уравнение множественной регрессии, а также показатели, с помощью которых оценивается надежность коэффициентов корреляции и уравнения связи: критерий Стьюдента, критерий Фишера, множественные коэффициенты корреляции и детерминации.

Пример. Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. руб. и продолжительности оборота оборотных средств предприятия x_2, дни приведена в табл.2.

Таблица 2

№ п.п.	y	x_1	x_2
1	21	8	18
2	23	10	19
3	20	7,9	17
4	21	8,5	18
5	23	9	21
6	21	7,2	17
7	22	7,6	20
8	20	8	17
9	22	8,3	18
10	21	7	17

1) Проверить однородность приведенных данных;

2) Найти парные коэффициенты корреляции и составить корреляционную матрицу. По полученным данным сделать вывод о тесноте связи между рассматриваемыми переменными. Вычислить коэффициент множественной корреляции и коэффициент детерминации;

3) Считая, что между результативным и факторными признаками имеет место линейная связь, найти линейное уравнение связи (регрессии). Для полученной линейной модели определить коэффициенты эластичности. Сделать выводы.

4) Проверить адекватность полученной модели по критерию Фишера, значимость коэффициентов регрессии, указать интервальные оценки коэффициентов регрессии и проанализировать полученные данные. Уровень значимости $\alpha = 0,1$.

Решение. Для решения задачи нам понадобится следующая расчетная таблица:

Таблица 3

№ п/п	y	x_1	x_2	x_1^2	x_2^2	$y \times x_1$	$y \times x_2$	$x_1 \times x_2$
1	21	8	18	64	324	168	378	144
2	23	10	19	100	361	230	437	190
3	20	7,9	17	62,41	289	158	340	134,3
4	21	8,5	18	72,25	324	178,5	378	153
5	23	9	21	81	441	207	483	189
6	21	7,2	17	51,84	289	151,2	357	122,4
7	22	7,6	20	57,76	400	167,2	440	152
8	20	8	17	64	289	160	340	136
9	22	8,3	18	68,89	324	182,6	396	149,4
10	21	7	17	49	289	147	357	119
Сумма:	214	81,5	182	671,15	3330	1749,5	3906	1489,1

1) Для того чтобы определить однородность данных найдем их средние значения (пользуемся данными, полученными в расчетной таблице):

$$\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 21,4, \; \overline{x_1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i1} = 8,15, \; \overline{x_2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{i2} = 18,2, \; n = 10.$$

Среднеквадратические отклонения:

$\sigma_y = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}\right)^2}{n}} = 1{,}019$, $\sigma_{x_1} = 0{,}832$, $\sigma_{x_2} = 1{,}327$. Так как значения среднеквадратических отклонений достаточно малы, то можно считать имеющиеся данные однородными.

2) Найдем коэффициенты корреляции по формулам (1.1) и (1.2) и составим корреляционную матрицу.

$r_{yx_1} = 0{,}636$, $r_{yx_2} = 0{,}828$ — эти коэффициенты показывают связь между результативным признаком y и x_1, x_2, соответственно.

$r_{x_1x_2} = 0{,}525$ — показывает связь между факторными признаками x_1, x_2. Так как 0,525<0,85, то связь между ними достаточно слабая и оба этих фактора можно включить в модель.

Корреляционная матрица имеет вид:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}636 & 0{,}828 \\ 0{,}636 & 1 & 0{,}525 \\ 0{,}828 & 0{,}525 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем коэффициент множественной корреляции по формуле:

$$R = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} r_{yx_2} r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}} = 0{,}86.$$

Коэффициент детерминации равен $D = R^2 = 0{,}74$. Это значит, что изменение рентабельности на 74% зависит от изменения исследуемых факторов, а на долю других факторов приходится 16% изменения результативного показателя.

3) Найдем уравнение регрессии. Используя метод наименьших квадратов, получим систему уравнений (1.8), которая в матричном виде имеет следующий вид: $\left(X'X\right)b = X'Y$, где

$$X'X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2}x_{i1} & \sum x_{i2}^2 \end{pmatrix},\ X'Y = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Нам нужно составить следующие матрицы: $X'X$, $X'Y$. Все данные возьмем из расчетной таблицы:

$$X'X=\begin{pmatrix}10 & 81,5 & 182\\ 81,5 & 671,15 & 1489,1\\ 182 & 1489,1 & 3330\end{pmatrix},\ X'Y=\begin{pmatrix}214\\ 1749,5\\ 3906\end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле $b=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)$ найдем вектор коэффициентов регрессии. Сначала найдем обратную матрицу (см. Приложение 3). $\left(X'X\right)^{-1}=\begin{pmatrix}19,84 & -0,43 & -0,89\\ -0,43 & 0,2 & -0,07\\ -0,89 & -0,07 & 0,08\end{pmatrix}$, а затем вектор

$$b=\left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)=\begin{pmatrix}19,84 & -0,43 & -0,89\\ -0,43 & 0,2 & -0,07\\ -0,89 & -0,07 & 0,08\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}214\\ 1749,5\\ 3906\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9,085\\ 0,341\\ 0,524\end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение регрессии:

$$\hat{y}=9,085+0,341x_1+0,524x_2.$$

Это уравнение выражает зависимость уровня рентабельности от производительности труда и продолжительности оборота оборотных средств. Коэффициенты уравнения показывают количественное воздействие каждого фактора на результативный показатель при неизменности других. В нашем примере: рентабельность повышается на 0,341% при увеличении производительности труда на 1 тыс. руб. и рентабельность повышается на 0,524% при увеличении продолжительности оборота оборотных средств на 1 день.

Коэффициенты эластичности найдем по формуле $Э_i=b_i\dfrac{\overline{x_i}}{\overline{y}}$.

Таблица 4

Переменная	x_1	x_2
Коэф. эластичности	0,13	0,45

Согласно полученным данным, рентабельность возрастает на 0,13% при увеличении производительности труда на 1%; на 0,45% при увеличении продолжительности оборота оборотных средств на 1%.

4) Для того, чтобы убедиться в надежности уравнения связи и правомерности его использования для практической цели, необходимо дать статистическую оценку надежности показателей связи.

Критерий Фишера. Найдем фактическое значение критерия по формуле (1.11). Для этого вычислим данные:

Таблица 5

$\hat{y}_i$	$y_i - \hat{y}_i$	$y_i - \bar{y}$
21,24406	-0,24406	-0,15594
22,44986	0,550136	1,049864
20,68595	-0,68595	-0,71405
21,41451	-0,41451	0,014506
23,15703	-0,15703	1,757026
20,44733	0,552675	-0,95267
22,15576	-0,15576	0,755757
20,72004	-0,72004	-0,67996
21,34633	0,653672	-0,05367
20,37915	0,620852	-1,02085

Тогда

$$F_{набл.} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2_{ост}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \Big/ (n-1)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \hat{y}_i\right)^2 \Big/ (n-k-1)} = \frac{1{,}156}{0{,}384} = 3{,}0069.$$

Найдем табличное значение критерия: при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ и учитывая, что в нашем примере количество степеней свободы равно $n - 1 = 10 - 1 = 9$ и $n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$, получим табличное значение критерия: $t_{0,1;\,9;\,7} = 2{,}72$. Так как $F_{набл.} \ge F_{табл.}$, то можно считать построенную модель адекватной при данном уровне значимости.

Проверим значимость коэффициентов регрессии по критерию Стьюдента (см. Приложение 2). При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ и учитывая, что в нашем примере количество степеней свободы равно $n - k - 1 = 10 - 2 - 1 = 7$, получим табличное значение критерия: $t_{0,1;\,9} = 1{,}89$. Теперь вычислим фактические значения t_{b_j} (формулы (1.13)): $t_{b_j} = \dfrac{b_j}{\sigma_{b_j}}$, где $\sigma_{b_j} = \sigma_{ост}\sqrt{c_{jj}}$. Для b_1 имеем:

$\sigma_{b_1} = \sigma_{ост}\sqrt{c_{22}} = \sqrt{0{,}384 \times 0{,}2} = 0{,}277$, $t_{b_1} = \dfrac{b_1}{\sigma_{b_1}} = \dfrac{0{,}341}{0{,}277} = 1{,}23$. Для b_2 имеем: $\sigma_{b_2} = \sigma_{ост}\sqrt{c_{33}} = \sqrt{0{,}384 \times 0{,}08} = 0{,}175$, $t_{b_2} = \dfrac{b_2}{\sigma_{b_{21}}} = \dfrac{0{,}524}{0{,}175} = 2{,}99$.

Поскольку t_{b_2} фактическое во втором случае выше табличного, то связь между результативным и факторными показателем x_2 является надежной, а величина коэффициента регрессии — значимой. Про коэффициент уравнения регрессии b_1 нельзя сказать, что он является значимым, но поскольку по критерию Фишера модель в целом является адекватной, то фактор x_1 можно оставить в модели.

Следовательно, данное уравнение можно использовать для практических целей:

а) оценки результатов хозяйственной деятельности;

б) расчета влияния факторов на прирост результативного показателя;

в) подсчета резервов повышения уровня исследуемого показателя;

г) планирования и прогнозирования его величины.

Тема 2. БАЛАНСОВЫЕ МОДЕЛИ

Под балансовой моделью понимается система уравнений, каждое из которых выражает требование баланса между производимым количеством продукции и совокупной потребностью в этой продукции.

Важнейшими видами балансовых моделей являются: частные материальные, трудовые и финансовые балансы для народного хозяйства и отдельных отраслей; межотраслевые балансы; матричные техпромфинпланы предприятий и фирм.

Балансовые модели относятся к типу матричных экономико-математических моделей. В матричных моделях балансовый метод получает строгое математическое выражение.

В модели межотраслевого баланса все народное хозяйство представляется в виде совокупности n отраслей (промышленность, сельское хозяйство и т.д.), каждая из которых рассматривается как производящая и как потребляющая. При построении балансовых моделей используется понятие **чистой** (или технологической) отрасли, то есть условной отрасли, объединяющей все производство данного продукта, независимо от ведомственной (административной) подчиненности и форм собственности предприятий и фирм.

Обозначения: x_{ij} — межотраслевые потоки продукции, где i и j — соответственно номера отраслей производящих и потребляющих; X_i — валовой выпуск продукции i-й отрасли; Y_i — конечная продукция i-й отрасли, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$.

Основу **экономико-математической модели межотраслевого баланса (МОБ)** составляет технологическая матрица, содержащая коэффициенты прямых затрат на производство единицы продукции

$$A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}, \tag{2.1}$$

где

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, \ i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,n}. \tag{2.2}$$

Коэффициент прямых затрат a_{ij} показывает, какое количество продукции i-й отрасли необходимо, учитывая только прямые затраты, для производства единицы продукции j-ой отрасли. Коэффициент прямых затрат является довольно стабильной величиной во времени.

Из формулы (2.2) следует, что межотраслевые потоки продукции можно определить по формуле:

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j, \; i = \overline{1,n}, \; j = \overline{1,n}. \tag{2.3}$$

Систему уравнений баланса можно записать в виде

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i, \; i = \overline{1,n}, \tag{2.4}$$

или в матричной форме

$$X = AX + Y, \tag{2.5}$$

где X — вектор-столбец валовой продукции и Y — вектор-столбец конечной продукции.

Система уравнений (2.4) или (2.5) называется **экономико-математической моделью межотраслевого баланса** (моделью «затраты—выпуск», моделью Леонтьева).

С помощью балансовой модели можно выполнять три варианта расчетов:

• задавая в модели величины валовой продукции каждой отрасли (X_i), можно определить объем конечной продукции каждой отрасли (Y_i)

$$Y = (E - A)X; \tag{2.6}$$

• задавая величины конечной продукции всех отраслей (Y_i), можно определить величины валовой продукции каждой отрасли (X_i)

$$X = (E - A)^{-1} Y; \tag{2.7}$$

• для ряда отраслей — задавая величины валовой продукции, а для всех остальных отраслей — объемы конечной продукции, можно найти величины конечной продукции первых отраслей и объемы валовой продукции вторых, в этом случае удобнее пользоваться системой уравнений (2.4).

В формулах (2.6) и (2.7) E — единичная матрица, а $(E - A)^{-1}$ — матрица, обратная матрице $(E - A)$. Обозначив обратную матрицу через B, модель (2.7) можно записать в виде

$$X = BY. \tag{2.8}$$

Матрица $B = (b_{ij})_{n \times n}$ есть матрица коэффициентов полных затрат.

Коэффициенты полных затрат b_{ij} показывают, сколько всего нужно произвести продукции i-й отрасли для выпуска в сферу конечного использования единицы продукции j-й отрасли.

Коэффициенты полных затрат можно применять тогда, когда необходимо определить, как скажется на валовом выпуске некоторой отрасли предполагаемое изменение объемов конечной продукции всех отраслей:

$$\Delta X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \Delta Y_j, \; i = \overline{1,n}, \tag{2.9}$$

где ΔX_i, и ΔY_j, — изменения (приросты) величин валовой и конечной продукции соответственно.

Полученные результаты можно представить в виде балансовой таблицы:

Таблица 6

Потребляющие отрасли	1	...	n	Продукция	
Производящие отрасли				Конечная, Y	Валовая, X
1	Плановые объёмы межотраслевых поставок: x_{ij}			Y_1	X_1
...				...	...
n				Y_n	X_n
Z	Z_1	...	Z_n	$\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$	
X	X_1	...	X_n		$\sum_i X_i$

Здесь

$$Z_j = X_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij}, \; j = \overline{1,n} \tag{2.10}$$

условно чистая продукция, а $\sum_{j=1}^{n} Z_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ — балансовое соотношение данной модели.

На практике обычно известен вектор спроса Y. Задача межотраслевого баланса заключается в определении вектора выпуска X так, чтобы удовлетворить спрос. По смыслу задачи все $X_i \geq 0$.

Модель (2.4) является **продуктивной**, если положительное решение системы (2.4) существует для любого неотрицательного вектора Y**.** По физическому смыслу задачи все $a_{ij} \geq 0$, причем все $a_{ii} < 1$.

Для того, чтобы матрица коэффициентов прямых материальных затрат была продуктивной, необходимо о достаточно, чтобы выполнялось одно из перечисленных условий:

1) матрица $(E - A)^{-1}$ неотрицательна, т.е. имеет все неотрицательные коэффициенты;

2) матричный ряд $E + A + A^2 + \ldots$ сходится, причем его сумма равна обратной матрице $(E - A)^{-1}$.

Если матрица коэффициентов прямых материальных затрат A является продуктивной, то из условия 2) продуктивности следует, что существует матрица $B = (E - A)^{-1}$, которая является суммой сходящегося матричного ряда:

$$B = (E - A)^{-1} = E + A + A^2 + \ldots. \tag{2.11}$$

Косвенные затраты. Затраты $A^1 = A \cdot A$ называются косвенными затратами первого порядка, второго – $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Тогда можно вычислить полные материальные затраты по приближенной формуле:

$$\widetilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left(\widetilde{b}_{ij}\right)_{n \times n}. \tag{2.12}$$

Относительные погрешности вычислений составят (в процентах): $\dfrac{b_{ij} - \widetilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \times 100\%$.

Пример. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжёлая промышленность; 2) лёгкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчётный год получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и векторе объёмов конечного потребления Y_0.

Необходимо рассчитать:

1) матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A = (a_{ij})$, матрицу «затрат-выпуска» $(E - A)$ и вектор конечного по

требления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

2) матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B=(b_{ij})$ и валовые объёмы выпуска $X_{пл}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{пл}$. Определить плановые объёмы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{пл}$ и пояснить, как валовые объёмы выпуска продукции $(X_{пл})_i, i=\overline{1,n}$ распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3) приросты валовых объёмов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i процентов по сравнению с $Y_{пл}$;

4) матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего порядка A^3, сравнить сумму затрат $(E+A+A^1+A^2+A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности.

Данные приведены в табл.7

Таблица 7

№ отрасли	Межотраслевые потоки X			Y_0	X	$Y_{пл}$	ΔY_0, %
	1	2	3				
1	80	15	25	80	300	150	+10
2	10	60	5	225	400	300	-10
3	10	30	30	30	400	50	+50

Решение.

1. По данным задачи находим вектор объёмов валовых выпусков $X_0=\begin{pmatrix}80+15+25+80\\10+60+5+225\\10+30+30+30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}200\\300\\100\end{pmatrix}$.

Находим матрицу коэффициентов прямых затрат по формуле (2.1):

$$A=\begin{pmatrix} \frac{80}{200} & \frac{15}{300} & \frac{25}{100} \\ \frac{10}{200} & \frac{60}{300} & \frac{5}{100} \\ \frac{10}{200} & \frac{30}{300} & \frac{30}{100} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,25 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}.$$

Матрица «затраты-выпуск» примет вид:

$$(E-A)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0,4 & 0,05 & 0,25 \\ 0,05 & 0,2 & 0,05 \\ 0,05 & 0,1 & 0,3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,25 \\ -0,05 & 0,8 & -0,05 \\ -0,05 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Новый вектор конечного потребления найдем по данному вектору валовых выпусков X (формула (2.6)):

$$Y=(E-A)X=\begin{pmatrix} 0,6 & -0,05 & -0,25 \\ -0,05 & 0,8 & -0,05 \\ -0,05 & -0,1 & 0,7 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 300 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 60 \\ 285 \\ 225 \end{pmatrix}.$$

Чтобы построить таблицу МОБ на расчетный период нужно определить межотраслевые потоки. Для этого воспользуемся формулой (2.3):

$x_{11}=0,4\times 300=120$; $x_{12}=0,05\times 400=20$; $x_{13}=0,25\times 400=100$;
$x_{21}=0,05\times 300=15$; $x_{22}=0,2\times 400=80$; $x_{23}=0,05\times 400=20$;
$x_{31}=0,05\times 300=15$; $x_{32}=0,1\times 400=40$; $x_{33}=0,3\times 400=120$.

Валовая добавленная стоимость (условно чистая продукция) находится по формуле (2.10).

Межотраслевой баланс на расчетный период представлен в таблице:

Таблица 8

Потребляющие отрасли	1	2	3	Продукция	
Производящие отрасли				Конечная, Y	Валовая, X
1	120	20	100	60	300
2	15	80	20	285	400
3	15	40	120	225	400

Z	150	260	160	**570**	
X	300	400	400		**1100**

2. Найдем матрицу коэффициентов полных материальных затрат B путем обращения матрицы $(E-A)$ (см. Приложение 3):

$$B=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}735 & 0{,}187 & 0{,}633\\ 0{,}118 & 1{,}273 & 0{,}133\\ 0{,}14 & 0{,}196 & 1{,}492\end{pmatrix}.$$

Объем производства валовой продукции $X_{пл}$ при заданном объеме конечной продукции $Y_{пл}$ в плановом периоде можно определить двумя путями: 1) используя модель (2.4), и тогда для данной задачи появится система уравнений:

$$\begin{cases}X_1=0{,}4X_1+0{,}05X_2+0{,}25X_3+150,\\ X_2=0{,}05X_1+0{,}2X_2+0{,}05X_3+300,\\ X_3=0{,}05X_1+0{,}1X_2+0{,}3X_3+50,\end{cases}$$

Решив данную систему уравнений, получим объемы валовой продукции в плановом периоде X_1, X_2, X_3:

$$X_{пл}=\begin{pmatrix}348{,}183\\ 406{,}409\\ 154{,}357\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}348\\ 406\\ 154\end{pmatrix}.$$

2) используя модель (2.8), имеем

$$X_{пл}=(E-A)^{-1}Y_{пл}=BY_{пл}=\begin{pmatrix}348{,}183\\ 406{,}409\\ 154{,}357\end{pmatrix}\approx\begin{pmatrix}348\\ 406\\ 154\end{pmatrix}.$$

Результаты, полученные в обоих случаях, должны совпадать, если вычисления проведены верно (небольшое отклонение возможно за счет округления).

При выполнении контрольной работы достаточно выполнить вычисления одним из указанных способов.

Чтобы построить таблицу МОБ на планируемый период нужно определить межотраслевые потоки. Плановые объёмы межотраслевых потоков найдем из уравнения (2.3):

$x_{11}=0{,}4\times 348=139$; $x_{12}=0{,}05\times 406=20$; $x_{13}=0{,}25\times 154=39$;

$x_{21}=0{,}05\times 348=17$; $x_{22}=0{,}2\times 406=81$; $x_{23}=0{,}05\times 154=8$;

$x_{31} = 0{,}05 \times 348 = 17$; $x_{32} = 0{,}1 \times 406 = 41$; $x_{33} = 0{,}3 \times 154 = 46$.

Валовая добавленная стоимость (условно чистая продукция) находится по формуле (2.10).

Межотраслевой баланс на плановый период представлен в табл. 9.

Таблица 9

Потребляющие отрасли / Производящие отрасли	1	2	3	Продукция	
				Конечная, Y	Валовая, X
1	139	20	39	150	348
2	17	81	8	300	406
3	17	41	46	50	154
Z	174	264	62	**500**	
X	348	406	154		**909**

3. Так как по условию задачи Y_1 должно увеличиться на 10%, Y_2 — уменьшиться на 10%, а Y_3 — увеличиться на 50%, то компоненты нового вектора конечного потребления будут равны:

$$Y_1 + \Delta Y_1 = 150 + 0{,}1 \times 150 = 165,$$

$$Y_2 + \Delta Y_2 = 300 - 0{,}1 \times 300 = 270, \qquad \text{где } \Delta Y = \begin{pmatrix} 15 \\ -30 \\ 25 \end{pmatrix},$$

$$Y_3 + \Delta Y_3 = 50 + 0{,}5 \times 50 = 75,$$

Прирост валовых объёмов выпуска, соответствующий новому вектору конечного потребления найдем по формуле:

$$\Delta X = (E - A)^{-1} \Delta Y = B \Delta Y = \begin{pmatrix} 36{,}23 \\ -33{,}137 \\ 33{,}57 \end{pmatrix}.$$

4. Косвенные затраты первого порядка равны $A^1 = A \cdot A$, второго — $A^2 = A \cdot A^1$, третьего – $A^3 = A \cdot A^2$. Найдём сумму затрат $\widetilde{B} = (E + A) + (A^1 + A^2 + A^3) = \left(\widetilde{b}_{ij}\right)_{n \times n}$ и сравним с полными затратами:

$$A^1 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0{,}175 & 0{,}056 & 0{,}178 \\ 0{,}033 & 0{,}048 & 0{,}038 \\ 0{,}04 & 0{,}053 & 0{,}108 \end{pmatrix},$$

$$A^2 = A \cdot A^1 = \begin{pmatrix} 0{,}082 & 0{,}038 & 0{,}01 \\ 0{,}017 & 0{,}015 & 0{,}022 \\ 0{,}024 & 0{,}023 & 0{,}045 \end{pmatrix},$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0{,}04 & 0{,}022 & 0{,}052 \\ 0{,}009 & 0{,}006 & 0{,}012 \\ 0{,}013 & 0{,}01 & 0{,}021 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица полных материальных затрат по формуле (2.11) равна $\widetilde{B} = E + A + A^1 + A^2 + A^3 = \begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}16 & 0{,}58 \\ 0{,}11 & 1{,}27 & 0{,}12 \\ 0{,}13 & 0{,}19 & 1{,}47 \end{pmatrix}$.

Относительные погрешности составят (в процентах):

$$\frac{b_{ij} - \widetilde{b}_{ij}}{b_{ij}} \times 100\% = \begin{pmatrix} 2{,}24 & 12{,}53 & 8{,}47 \\ 7{,}46 & 0{,}44 & 9{,}06 \\ 9{,}72 & 4{,}76 & 1{,}32 \end{pmatrix} [\%].$$

Тема 3. МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

3.1. Общая постановка задачи

Задачи управления запасами составляют один из наиболее многочисленных классов экономических задач, решение которых имеет важное народнохозяйственное значение. Правильное и своевременное определение оптимальной стратегии управления запасами, а также нормативного уровня запасов позволяет высвободить значительные оборотные средства, замороженные в виде запасов, что в конечном счете повышает эффективность используемых ресурсов.

Под запасом понимается все то, на что имеется спрос и что исключено временно из потребления. Запасы подразделяются на запасы средств производства, предназначенные для производственного потребления (сбытовые, производственные, государственные резервы и незавершенное производство), и запасы предметов потребления, предназначенные для использования в непроизводственной социально-экономической сфере и для удовлетворения потребностей людей (товарные, запасы предметов коллективного и индивидуального потребления и государственные резервы).

Рассмотрим простейшие математические модели управления запасами. На рис. 1 представлены возможные графики изменения запаса Q, имеющегося на складе, во времени t, для которого рассматривается этот запас.

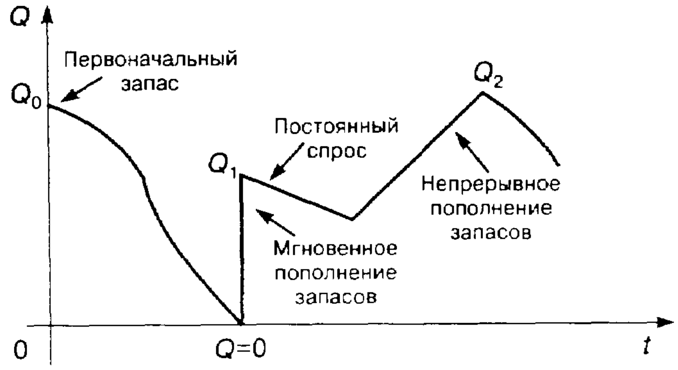

Рис.1

Под Q будем понимать изделия или материалы (товары) только одного вида. Если на изделие поступает заявка, то спрос удовлетворяется и значение Q падает. Если Q=0, то имеет место дефицит.

Любая математическая модель, которая применяется для изучения определенной ситуации в управлении запасами, должна учитывать факторы, связанные с издержками.

Различают **организационные издержки** — расходы, связанные с оформлением и доставкой товаров, **издержки содержания запасов** — затраты, связанные с хранением. Они возникают из-за амортизации в процессе хранения (изделия могут портиться, устаревать, их количество может уменьшаться и т.д.). Существуют издержки, связанные с **дефицитом**: если поставка со склада не может быть выполнена, то возникают дополнительные издержки, связанные с отказом. Это может быть денежный штраф или ущерб, не осязаемый непосредственно (например, ухудшение бизнеса в будущем и потеря потребителей). Рассматривают также **издержки, связанные с приобретением запасов**. Их учитывают, если цена единицы продукции зависит от величины партии. Количество товара, поставляемое на склад, называют **размером партии.**

Задача управления запасами состоит в определении объемов поставок и периодичности заказов, при которых издержки (функция затрат) принимают минимальное значение.

3.2. Основная модель управления запасами

Эта модель позволяет определить такой размер заказываемой партии, который минимизирует расходы на организацию заказа и содержание его на складе. Экономичная партия поставки вычисляется при следующих допущениях. Уровень запасов снижается равномерно с интенсивностью v (спрос). В момент, когда все запасы исчерпаны, подается заказ на поставку новой партии размером q ед. Заказ выполняется мгновенно, то есть время доставки заказа пренебрежимо мало и уровень запасов восстанавливается до максимального значения, равного q. Накладные расходы, связанные с размещением заказа и поставкой партии, не зависят от объема партии и равны постоянной величине k. Издержки содержания единицы товара на складе в единицу времени равны h. Стоимость товара s. Срыв поставок недопустим. Представим приведенные предположения о работе склада в виде таблицы.

Таблица 10

Величина	Обозначение	Единица измерения	Предположения
Интенсивность спроса	v	Единиц товара в год	Спрос постоянен и непрерывен; весь спрос удовлетворяется
Организационные издержки	k	Ден. ед. за партию товара	Издержки постоянны, не зависят от размера партии
Стоимость товара	s	Ден. ед. за год	Цена единицы товара постоянна; рассматривается один вид товара
Издержки содержания запасов	h	Ден. ед. за единицу товара в год	Стоимость хранения единицы товара в течение года постоянна
Размер партии	q	Единиц товара в одной партии	Размер партии постоянен; поступление товара происходит мгновенно, как только уровень запаса равен нулю

График изменения запасов данной модели представлен на рис. 2.

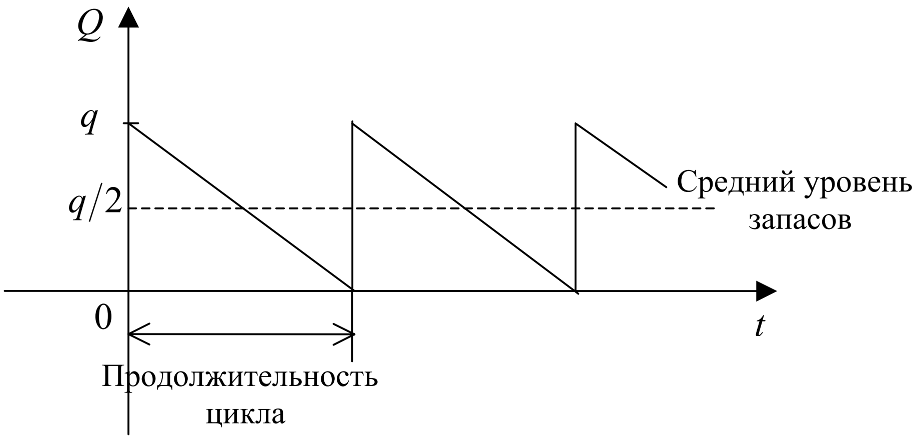

Рис. 2

Чтобы полностью удовлетворить годовой спрос ν при размере поставки q, необходимо обеспечить $\frac{\nu}{q}$ поставок или партий за год. Средний уровень запасов составляет $\frac{q}{2}$.

Уравнение издержек будет иметь вид

$$L = L_1 + L_2 + L_3 = {k\nu}/{q} + s\nu + {hq}/{2},$$

где L_1 — общие организационные издержки; L_2 — стоимость товаров; L_3 — общие издержки содержания запасов.

За исключением q все величины в правой части уравнения постоянны и известны, т.е. $L = f(q)$. Для нахождения минимума L найдем производную $\frac{dL}{dq}$ и приравняем ее к нулю:

$$\frac{dL}{dq} = -\frac{k\nu}{q^2} + \frac{h}{2} = 0.$$

Откуда

$$q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2k\nu}{h}}, \tag{3.1}$$

тогда

$$\tau_{\text{опт}} = \frac{q_{\text{опт}}}{\nu} = \sqrt{\frac{2k}{h\nu}}$$

где $q_{\text{опт}}$ — оптимальный размер партии, τ_{onm} — оптимальный интервал между поставками.

Формулу (3.1) называют **формулой Уилсона.**

При этом:

минимальные суммарные затраты

$L_{onm} = \sqrt{2kh\nu}$;

оптимальный средний уровень текущего запаса

$I_{onm} = \frac{q_{onm}}{2}$;

оптимальное число поставок за период T

$n_{onm} = \frac{\nu T}{q_{onm}} = \frac{Q}{q_{onm}}$, где Q — потребление за плановый период T ($Q = \nu T$).

Относительное изменение суммарных затрат по сравнению с оптимальным при относительном изменении объема партии определяется по формуле:

$$\frac{\Delta L}{L} \approx \frac{1}{2}\left(\frac{\Delta q}{q_{\text{опт}}}\right)^2.$$

3.3. Точка заказа

В реальных задачах следует учитывать время выполнения заказа θ. Для бесперебойного снабжения заказ должен подаваться в момент, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на время выполнения заказа. Этот уровень называется **точкой возобновления заказа (точка заказа)** и обозначается r, т.е. это нижний уровень, по которому мы должны заказывать новую партию. Для систем, в которых дефицит не допускается, заказ должен размещаться в момент, когда величина наличного запаса равна

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau_{\text{опт}}}\right] q_{\text{опт}}, \tag{3.2}$$

где $[\cdot]$ — целая часть $(\cdot)$; $\tau_{\text{опт}}$ — оптимальный интервал между поставками.

Для бездефицитной работы системы нужно иметь начальный запас $I_0 \geq \theta\nu$. Если I — фактический запас, то для непрерывной работы необходимо, чтобы $I \geq I_0$. Время потребления начального запаса $\frac{I_0}{\nu}$. Чтобы заказанная партия прибыла ко времени полного исчерпания ее нужно размещать в момент $t_0 = \frac{I_0}{\nu} - \theta$, а все остальные заказы нужно размещать в моменты

$$t_k = \left(\frac{I}{\nu} - \theta\right) + k\tau_{\text{опт}},\ k = 1,2,....$$

Пример. Потребность сборочного предприятия в деталях некоторого типа составляет 120 000 деталей в год, причем эти детали расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно. Детали заказываются раз в год и поставляются партиями одинакового объема, указанного в заказе. Хранение детали на складе стоит 0,35 ден. ед. в сутки, а поставка партии — 10 000 ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия деталей недопустима.

1. Определить

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы.

2. Определить, на сколько процентов увеличатся затраты на создание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий 5 000 деталей.

3. В условиях задачи предположим, что заказываются не все партии сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен 16 дней. Определить точки заказа, т. е. при каком уровне запаса следует заказывать следующую партию.

4. Нарисовать график изменения запасов, отметить точки заказа.

Решение. Согласно условию задачи мы имеем простейшую модель управления запасами. По условию затраты на одну партию составляют $k = 10000$ ден. ед., затраты хранения единицы запаса в сутки $h = 0{,}35$ ден. ед. Общий промежуток времени $T = 1$ год = 365 дней, а интенсивность спроса за этот период $Q = 120000$ деталей. Следовательно, в сутки потребность в деталях равна $\nu = \dfrac{120000}{365} = 329$ ед. (Отметим, что все параметры должны быть приведены к одной единице измерения!)

1. а) По формуле (3.1) $q_{\text{опт}} = \sqrt{\dfrac{2 \cdot 10000 \cdot 120000}{0{,}35 \cdot 365}} \approx 4334$ деталей — оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками: $\tau_{\text{опт}} = \dfrac{4334 \cdot 365}{120000} = 13{,}18 \approx 13$ дней;

в) средний уровень текущего запаса определим по формуле: $I_{\text{опт}} = \dfrac{q_{\text{опт}}}{2} = \dfrac{4334}{2} = 2167$;

г) число поставок равно $n_{\text{опт}} = \dfrac{120000}{4334} \approx 28$ поставок в год;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы:

$L_{опт} = \sqrt{2 \times 10000 \times 0.35 \times 329} \approx 1517$ ден. ед.

2. Относительное изменение объема партии по сравнению с оптимальным составляет $\dfrac{\Delta q}{q_{\text{опт}}} = \dfrac{5000 - 4334}{4334} = 0{,}154$. В соответствии с формулой $\dfrac{\Delta L}{L} \approx \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\Delta q}{q_{\text{опт}}}\right)^2$ относительное изменение суммарных затрат составит $\dfrac{\Delta L}{L} = \dfrac{0{,}153^2}{2} \approx 0{,}0117$, или лишь 1,2%.

3. Так как по результатам решения задачи длина интервала между поставками равна 13,2 дня, то заказ в условиях налаженного производства следует возобновить, когда уровень запаса достаточен для удовлетворения потребности на $16 - 13{,}2 = 2{,}8$ дня и равен

$$r = \theta\nu - \left[\frac{\theta}{\tau_{опт}}\right] q_{опт} = 16 \times 329 - \left[\frac{16}{13{,}2}\right] \times 4334 = 930.$$

4. Построим график изменения запасов:

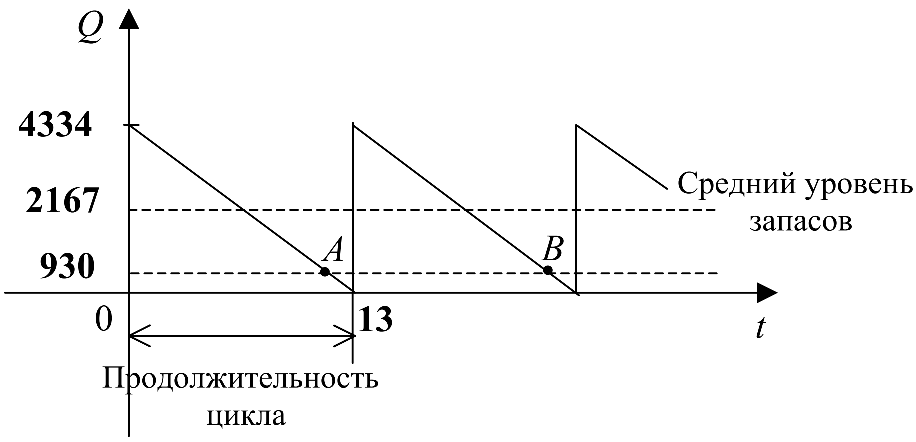

Рис. 3

Точки A и B — точки заказа.

Тема 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование *(планирование)* представляет собой математический метод для нахождения оптимальных решений многошаговых (многоэтапных) задач. Некоторые из таких задач естественным образом распадаются на отдельные шаги (этапы), но имеются задачи, в которых разбиение приходится вводить искусственно, для того чтобы их можно было решить методом динамического программирования.

4.1. Принцип оптимальности и рекуррентные соотношения

Решение задач динамического программирования основано на двух принципах: принципе погружения и принципе оптимальности Беллмана. Метод погружения позволяет одну задачу со многими переменными заменить рядом последовательно решаемых задач с меньшим числом переменных. Процесс решения задачи разбивается на шаги. При этом нумерация шагов, как правило, осуществляется от конца к началу. Принцип погружения утверждает, что природа динамического программирования не меняется при изменении количества шагов решения задачи. Иначе говоря, конкретный процесс с заданным количеством шагов оказывается как бы погруженным в семейство подобных ему задач.

Основным же принципом, на котором базируются оптимизация многошагового процесса, а также особенности вычислительного метода динамического программирования, является принцип оптимальности Р. Беллмана.

Принцип оптимальности. Оптимальное поведение обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующие решения должны быть оптимальными относительно состояния, полученного в результате первоначального решения. Иначе говоря, каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, нужно выбрать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальный.

Принцип оптимальности имеет конструктивный характер и непосредственно указывает процедуру нахождения оптимального решения. Математически он записывается выражением вида

$$B_{n-l}(S_l) = \underset{U_{l+1}}{optimum}\left(f_{l+1}(S_l, U_{l+1}) + B_{n-(l+1)}(S_{l+1})\right),\ l = \overline{0, n-1} \qquad (4.1)$$

где B_{n-1} — оптимальное значение эффекта, достигаемого за $n-l$ шагов; n — количество шагов (этапов); $S_l = \left(s_l^{(1)}; \ldots; s_l^{(m)}\right)$ — состояние системы на l-м шаге; $U_l = \left(u_l^{(1)}; \ldots; u_l^{(m)}\right)$ — решение (управление), выбранное на l-м шаге; f_l — непосредственный эффект, достигаемый на l-м шаге.

"Optimum" в выражении (4.1) означает максимум или минимум в зависимости от условия задачи.

Все вычисления, дающие возможность найти оптимальное значение эффекта, достигаемого за n шагов, $B_n(S_0)$ проводятся по формуле (4.1), которая носит название ***основного функционального уравнения Беллмана*** или ***рекуррентного соотношения***. Действительно, при вычислении очередного значения функции B_{n-l} используются значение функции $B_{n-(l+1)}$, полученное на предыдущем шаге, и непосредственное значение эффекта $f_{l+1}(S_l, U_{l+1})$, достигаемого в результате выбора решения U_{l+1} при заданном состоянии системы S_l. Процесс вычисления значений функции B_{n-l} ($l = \overline{0, n-1}$) осуществляется при естественном начальном условии $B_0(S_n) = 0$, которое означает, что за пределами конечного состояния системы эффект равен нулю.

4.2. Вычислительная схема

Оптимальное решение задачи методом динамического программирования находится на основе функционального уравнения (4.1). Чтобы определить его, необходимо:

1. Записать функциональное уравнение для последнего состояния процесса (ему соответствует $l = n-1$):

$$B_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{optimum}\left(f_n(S_{n-1}, U_n) + B_0(S_n)\right);$$

2. Найти $f_n(S_{n-1}, U_n)$ из дискретного набора его значений при некоторых фиксированных S_{n-1} и U_n из соответствующих допустимых областей (так как $B_0(S_n) = 0$, то

$$B_1(S_{n-1}) = \underset{U_n}{optimum}\left(f_n(S_{n-1}, U_n)\right).$$

В результате после первого шага известно решение U_n и соот ветствующее значение функции $B_1(S_{n-1})$. Отметим, что если функции дифференцируемы, то оптимум находится по известным правилам;

3. Уменьшить значение l на единицу и записать соответствующее функциональное уравнение. При $l = n - k$ оно имеет вид

$$B_k(S_{n-k}) = \underset{U_{n-k+1}}{optimum}\big(f_{n-k+1}(S_{n-k}, U_{n-k+1}) + B_{k-1}(S_{n-k+1})\big); \tag{4.2}$$

4. Найти условно-оптимальное решение на основе выражения (4.2);

5. Проверить, чему равно значение l. Если $l = 0$, расчет условно-оптимальных решений закончен, при этом найдено оптимальное решение задачи для первого состояния процесса. Если $l \neq 0$, перейти к выполнению п. 3;

6. Вычислить оптимальное решение задачи для каждого последующего шага процесса, двигаясь от конца расчетов к началу.

4.3. Оптимальное распределение средств на расширение производства

Рассмотрим задачи динамического программирования, в которых речь идет о наиболее целесообразном распределении во времени тех или иных ресурсов (денежных средств, рабочей силы, сырья и т. п.).

Группе предприятий выделяются дополнительные средства на реконструкцию и модернизацию производства. По каждому из n предприятий известен возможный прирост $f_i(x_i)$ $(i = \overline{1, n})$ выпуска продукции в зависимости от выделенной ему суммы x_i, $0 \le x_i \le c$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = c$. Требуется так распределить между предприятиями средства c, чтобы общий прирост $B_n(c)$ выпуска продукции был максимальным.

В соответствии с вычислительной схемой динамического программирования рассмотрим сначала случай $n = 1$, т.е. предположим, что все имеющиеся средства выделяются на реконструкцию и модернизацию одного предприятия. Обозначим через $B_1(y)$, $0 \le y \le c$ максимально возможный прирост выпуска продукции на этом предприятии, соответствующий выделенной сумме y. Каждому значению $y = x_1$ отвечает вполне определенное (единственное) значение $f_1(x_1)$ выпуска, поэтому можно записать, что

$$B_1(y) = \max_{0 \le x_1 \le y}\left(f_1(x_1)\right),\ 0 \le y \le c,$$
$$B_1(y) = f_1(x_1),\ y = x_1 \tag{4.3}$$

Пусть теперь $n = 2$, т.е. средства распределяются между двумя предприятиями. Если второму предприятию выделена сумма $x_2 = z$, то прирост продукции на нем составит $f_2(z)$. Оставшиеся другому предприятию средства $(y - z)$ в зависимости от величины z позволят увеличить прирост выпуска продукции до максимально возможного значения $B_1(y - z)$. При этом условии общий прирост выпуска продукции на двух предприятиях

$$f_2(z) + B_1(y - z). \tag{4.4}$$

Оптимальному значению $B_2(y)$ прироста продукции при распределении суммы y между двумя предприятиями соответствует такое z, при котором сумма (4.4) максимальна

$$B_2(y) = \max_{0 \le z \le y}\left(f_2(z) + B_1(y - z)\right),\ 0 \le y \le c. \tag{4.5}$$

Из (4.5) найдем $x_2(y)$ при котором $B_2(y)$ достигает максимума.

Общее функциональное уравнение Беллмана для рассматриваемой задачи запишется в следующем виде:

$$B_k(y) = \max_{0 \le z \le y}\left(f_k(z) + B_{k-1}(y - z)\right),\ 1 \le k \le n,\ 0 \le y \le c. \tag{4.6}$$

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на n предприятиях определяется как максимум суммы прироста выпуска на n-м предприятии и прироста выпуска на остальных $n - 1$ предприятиях при условии, что оставшиеся после n-го предприятия средства распределяются между остальными предприятиями оптимально.

Имея функциональные уравнения (4.3) и (4.6), мы можем последовательно найти сначала B_1, затем B_2, $B_3, \ldots$ и, наконец, B_n для различных значений распределяемой суммы средств.

Для отыскания оптимального распределения средств прежде всего находим величину $x_n^*(c)$ ассигнований n-му предприятию, которая позволяет достичь полученного нами максимального значения B_n прироста продукции. По величине оставшихся средств $c - x_n^*(c)$ и уже известному нам значению B_{n-1} устанавливаем $x_{n-1}^*(c)$ — величину ассигнований $(n - 1)$-му предприятию и т.д. и, наконец, находим $x_2^*(c)$ и $x_1^*(c)$.

Пример. Пусть имеются три предприятия, между которыми распределяется 6 млн. ден. ед. Значения $f_i(x)$ прироста выпуска продукции на предприятиях в зависимости от выделенной суммы x приведены в табл. 11. Составить план распределения средств, максимизирующий общий прирост выпуска продукции.

Таблица 11

Средства x, тыс. ден, ед.	Предприятие		
	№ 1	№ 2	№ 3
	Прирост выпуска продукции на предприятиях, $f_i(x)$, млн. ден. Ед.		
	$f_1(x_i)$	$f_2(x_i)$	$f_3(x_i)$
0	0	0	0
10	4	6	4
20	8	9	7
30	12	12	10
40	16	15	13
50	19	18	15
60	21	20	17

Решение. Пусть $n=1$. В соответствии с формулой (4.3) $B_1(y) = f_1(x_1)$. В зависимости от начальной суммы $c = 60$ получаем с учетом табл. 11 значения $B_1(y)$, $0 \le y \le 60$ (табл. 12).

Таблица 12

y	0	10	20	30	40	50	60
$B_1(y)$	0	4	8	12	16	19	21

Предположим теперь, что средства вкладываются в два предприятия. Тогда в соответствии с формулой (4.6)

$$B_2(y) = \max_{0 \le z \le y}\bigl(f_2(z) + B_1(y-z)\bigr),\ 0 \le y \le 60$$

найдем значения функции $B_2(y)$ для всех допустимых комбинаций z и y. Значения z будем принимать изменяющимися от 0 до 60 млн. ден. ед. и для большей наглядности записи оформлять в виде таблиц. Каждому шагу будет соответствовать своя таблица. Рассматриваемому шагу соответствует табл. 13. Для каждого значения (0, 10, 20, 30, 40, 50, 60) начальной суммы распределяемых средств y в табл. 13 предусмотрена отдельная строка, а для каждого возможного значе ния z распределяемой суммы — столбец. Некоторые клетки таблицы останутся незаполненными, так как соответствуют недопустимым сочетаниям y и z. Такой, например, будет клетка, отвечающая строке $y = 20$ и столбцу $z = 40$, ибо при наличии 20 млн. ден. ед. естественно отпадает вариант, при котором одному из предприятий выделяется 40 млн. ден. ед.

Таблица 13

z / y	0	10	20	30	40	50	60	$B_2(y)$	$x_2(y)$
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
10	0+4	6+0	-	-	-	-	-	6	10
20	0+8	6+4	9+0	-	-	-	-	10	10
30	0+12	6+8	9+4	12+0	-	-	-	14	10
40	0+16	6+12	9+8	12+4	15+0	-	-	18	10
50	0+19	6+16	9+12	12+8	15+4	18+0	-	22	10, 30
60	0+21	6+19	9+16	12+12	15+8	18+4	20+0	25	10, 20

В каждую клетку таблицы будем вписывать значение суммы $f_2(z) + B_1(y - z)$. Первое слагаемое берем из условий задачи (см. табл. 11), второе — из табл. 12.

В двух последних столбцах таблицы проставлены максимальный по строке прирост продукции (в столбце $B_2(y)$) и соответствующая ему оптимальная сумма средств, выделенная второму предприятию (в столбце $x_2(y)$).

Расчет значений $B_3(y)$ приведен в табл. 14. Здесь использована формула., получающаяся из (4.6) при $n = 3$:

$$B_3(y) = \max_{0 \le z \le y}\big(f_3(z) + B_2(y - z)\big),\ 0 \le y \le 60\,.$$

Первое слагаемое в табл. 14 из табл. 11, второе — из табл. 13.

Таблица 14

x / y	0	10	20	30	40	50	60	$B_3(y)$	$x_3(y)$
0	0	-	-	-	-	-	-	0	0
10	0+6	4+0	-	-	-	-	-	6	0
20	0+10	4+6	7+0	-	-	-	-	10	0, 10
30	0+14	4+10	7+6	10+0	-	-	-	14	0, 10
40	0+18	4+14	7+10	10+6	13+0	-	-	18	0, 10

50	0+22	4+18	7+14	10+10	13+6	15+0	-	22	0, 10
60	0+25	4+22	7+18	10+14	13+10	15+6	17+0	26	10

Данные полученные в ходе решения задачи (табл. 12–14) запишем в последнюю, результирующую таблицу:

Таблица 15

y	0	10	20	30	40	50	60
$B_1(y)$	0	4	8	12	16	19	21
$x_1(y)$	0	10	20	30	40	50	60
$B_2(y)$	0	6	10	14	18	22	25
$x_2(y)$	0	10	10	10	10	10, 30	10, 20
$B_3(y)$	0	6	10	14	18	22	26
$x_3(y)$	0	0	0, 10	0, 10	0, 10	0, 10	10

Табл. 15 содержит много ценной информации и позволяет единообразно решать целый ряд задач. Например, из табл. 15 видно, что наибольший прирост выпуска продукции, который могут дать три предприятия при распределении между ними 60 млн. ден. ед. ($c = 60$), составляет 26 млн. ден. ед. ($B_3(60) = 26$). При этом третьему предприятию должно быть выделено 10 млн. ден. ед. ($x_3^*(60) = 10$), а остальным двум — $60 - 10 = 50$ млн. ден. ед. Из той же таблицы видно, что оптимальное распределение оставшихся 50 млн. ден. ед. ($c = 50$) между двумя предприятиями обеспечит общий прирост продукции на них на сумму 22 млн. ден. ед. ($B_2(50) = 22$) при условии, что второму предприятию будет выделено либо 10 млн. ден.ед. ($x_2^*(50) = 10$), а первому — $50 - 10 = 40$ млн. ден. ед., что даст прирост продукции на сумму в 16 млн. ден. ед., либо 30 млн. ден.ед. ($x_2^*(50) = 30$), а первому — $50 - 30 = 20$ млн. ден. ед., что даст прирост продукции на сумму в 8 млн. ден. ед.

Итак, максимальный прирост выпуска продукции на трех предприятиях при распределении между ними 60 млн. ден. ед. составляет 26 млн. ден. ед. ед. и будет получен, если а) первому предприятию выделить 20 млн. ден. ед., второму выделить 30 млн. ден. ед., а третьему — 10 млн. ден. ед.; б) первому предприятию выделить 40 млн. ден. ед., второму выделить 10 млн. ден. ед., а третьему — 10 млн. ден. ед.

В табл. 15 также содержатся решения задач при различных комбинациях c, $0 \le c \le 60$ и n, $1 \le n \le 3$.

Так если $c = 40$, $n = 2$, то решение будет следующим: максимальная прибыль — $B_2(40) = 18$ млн. ден. ед., при $x_2^*(40) = 10$, тогда $x_1^* = 40 - 10 = 30$ млн. ден. ед.

ЗАДАЧИ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задачи 1.1.-1.10. Требуется:

1) Проверить однородность приведенных данных;
2) Найти парные коэффициенты корреляции и составить корреляционную матрицу. По полученным данным сделать вывод о тесноте связи между рассматриваемыми переменными. Вычислить коэффициент множественной корреляции и коэффициент детерминации;
3) Считая, что между результативным и факторными признаками имеет место линейная связь, найти линейное уравнение связи (регрессии). Для полученной линейной модели определить коэффициенты эластичности. Сделать выводы.
4) Проверить адекватность полученной модели по критерию Фишера, значимость коэффициентов регрессии и проанализировать полученные данные. Уровень значимости считать равным $\alpha = 0{,}1$.

1.1.

Зависимость уровня рентабельности y от материалоотдачи x_1, тыс. ден. ед. и фондоотдачи x_2, ден. ед. приведена в табл. 16.

Таблица 16

y	90	55	30	75	42	20	71	38	63	34	16	17
x_1	6	18	30	6	18	30	12	24	12	24	23	24
x_2	40	50	80	80	80	80	50	60	70	75	80	70

1.2.

Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. ден. ед. и продолжительности оборота оборотных средств x_2, дни приведена в табл.17.

Таблица 17

y	45	27	15	34	21	10	35	18	32	17
x_1	10	18	30	6	18	30	12	24	18	24

x_2	40	40	45	40	70	80	50	80	40	80

1.3.

Зависимость уровня рентабельности y от удельного веса продукции высшей категории качества x_1, % и производительности труда x_2, тыс. ден. ед. приведена в табл. 18.

Таблица 18

y	90	55	30	75	42	20	45	38	70	38
x_1	18	36	60	25	36	60	55	48	38	50
x_2	33	40	40	50	60	68	75	75	75	80

1.4.

Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. ден. ед. и фондоотдачи x_2, ден. ед. приведена в табл.19.

Таблица 19

y	28	28	30	31	30	30	31	31	31	32	31	31
x_1	43,5	43	43	43,5	43	42,5	43	41	42	41	42	41
x_2	5	4,6	4,5	4,5	4,4	4,4	4,3	4,2	4	4	4,2	4,5

1.5.

Зависимость уровня рентабельности y от материалоотдачи x_1, тыс. ден. ед. и производительности труда x_2, тыс. ден. ед. приведена в табл. 20.

Таблица 20

y	28	28	30	31	30	30	31	31	31	32
x_1	43,5	43	43	43,5	43	42,5	43	41	42	41
x_2	44	44	44	48	48	48	49	49	50	50

1.6.

Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. ден. ед. и продолжительности оборота оборотных средств x_2, дни приведена в табл. 21.

Таблица 21

y	28	28	30	31	30	30	31	31	31	32	31	32

x_1	67	68	70	70	68	68	70	70	70	70	68	70
x_2	44	44	44	48	48	48	49	49	50	50	49	50

1.7.

Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. ден. ед. и удельного веса продукции высшей категории качества x_2% приведена в табл. 22.

Таблица 22

y	28	28	30	31	30	30	31	31	31	32
x_1	18	19	20	20	21	21	22	23	24	25
x_2	40	41	43	43,5	43	42,5	43	41	45	44

1.8.

Зависимость уровня рентабельности y от фондоотдачи x_1, ден. ед. и производительности труда x_2, тыс. ден. ед. приведена в табл. 23.

Таблица 23

y	36	35	33	34	33	32	32	31	31	30	31	32
x_1	68	70	70	68	70	70	71	71	70	71	68	70
x_2	39	40	40	40	40	45	47	47	49	49	49	50

1.9.

Зависимость уровня рентабельности y от материалоотдачи x_1, тыс. ден. ед. и удельного веса продукции высшей категории качества x_2% приведена в табл. 24.

Таблица 24

y	36	35	33	34	33	32	32	31	31	30
x_1	6	18	30	6	18	30	12	24	12	24
x_2	39	39	41	40	39	42	42	41	42	43

1.10.

Зависимость уровня рентабельности y от производительности труда x_1, тыс. ден. ед. и продолжительности оборота оборотных средств x_2, дни приведена в табл. 25.

Таблица 25

y	36	35	33	34	33	32	32	31	31	30	31	32

x_1	26	24	21	21	24	23	20	19	22	19	22	24
x_2	43	42	42	41	41	40	40	40	39	37	39	41

Задачи 2.1-2.10. Народное хозяйство представлено тремя отраслями: 1) тяжёлая промышленность; 2) лёгкая промышленность; 3) сельское хозяйство. За отчётный год получены данные о межотраслевых поставках x_{ij} и векторе объёмов конечного потребления Y_0.

Необходимо рассчитать:

1. матрицу коэффициентов прямых материальных затрат $A=(a_{ij})$, матрицу «затрат-выпуска» $(E-A)$ и вектор конечного потребления Y для заданного вектора валовых выпусков X. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

2. матрицу коэффициентов полных материальных затрат $B=(b_{ij})$ и валовые объёмы выпуска $X_{пл}$ для заданного вектора конечного потребления $Y_{пл}$. Определить плановые объёмы межотраслевых поставок $(x_{ij})_{пл}$ и пояснить, как валовые объёмы выпуска продукции $(X_{пл})_i, i=\overline{1,n}$ распределились между отраслями. Результаты представить в виде балансовой таблицы;

3. приросты валовых объёмов выпуска, если конечное потребление изменится на ΔY_i процентов по сравнению с $Y_{пл}$;

4. матрицы коэффициентов косвенных затрат первого A^1, второго A^2 и третьего порядка A^3, сравнить сумму затрат $(E+A+A^1+A^2+A^3)$ с полными затратами B, найти относительные погрешности. Данные приведены в табл. 26.

Таблица 26

Номера задач	№ отрасли	Межотраслевые потоки X			Y_0	X	$Y_{пл}$	ΔY, %
2.1	1	60	30	15	85	200	200	+20
	2	10	60	5	220	350	250	-10
	3	10	30	40	40	400	70	+50
2.2	1	70	20	30	85	200	220	+20
	2	20	50	10	150	400	180	-40
	3	25	25	80	50	300	120	+30
2.3	1	0	40	26	35	180	48	-10
	2	30	65	10	150	250	180	+60

	3	50	30	44	60	280	150	+30
2.4	1	44	40	26	35	230	48	-10
	2	30	0	10	150	250	320	+70
	3	50	30	95	210	280	145	+30
2.5	1	55	80	26	125	230	500	+20
	2	30	90	10	200	350	320	+30
	3	45	30	95	210	280	145	+30
2.6	1	130	20	40	80	200	300	+40
	2	30	60	10	170	300	320	-50
	3	60	30	95	80	260	280	+30
2.7	1	24	124	0	100	250	120	+30
	2	0	33	32	300	450	320	+50
	3	98	0	93	120	350	140	+30
2.8	1	120	124	0	80	270	100	+30
	2	0	33	32	300	450	320	+50
	3	98	0	93	120	350	140	+30
2.9	1	455	20	68	800	950	900	-30
	2	304	100	0	600	840	890	+50
	3	98	0	256	200	700	260	+30
2.10	1	345	80	35	100	500	134	+40
	2	0	33	32	300	348	345	-30
	3	98	0	93	120	298	140	+10

Задачи 3.1-3.10. Годовая потребность фирмы в деревоматериалах составляет A м^3, причем материалы расходуются в процессе производства равномерно и непрерывно, затраты на хранение 1 м^3 — B ден. ед. Затраты на подготовительно-заключительные операции, не зависящие от величины поставляемой партии и связанные с каждой поставкой, равны C ден. ед. Задержка производства из-за отсутствия материалов недопустима.

Требуется:

1. Определить

а) оптимальный размер партии поставки;

б) оптимальный интервал между поставками;

в) средний уровень текущего запаса;

г) число поставок;

д) годовые затраты, связанные с работой данной системы.

2. Определить, на сколько процентов увеличатся затраты на соз

дание и хранение запаса по сравнению с минимальными затратами при объеме заказываемых партий D деталей.

3. В условиях задачи предположим, что заказываются не все партии сразу, а каждая отдельно, причем срок выполнения заказа равен E дней. Определить точки заказа, т. е. при каком уровне запаса следует заказывать следующую партию.

4. Нарисовать график изменения запасов, отметить точки заказа.

Читсловые данные для каждого варианта приведены в табл. 27.

Таблица 27

Задачи	A	B	C	D	E
3.1	140000	0,4 д. ед. в сутки	20000	6500	20
3.2	4000	4 д. ед. в год	80	500	40
3.3	110000	0,2 д. ед. в сутки	15000	7000	25
3.4	6000	5 д. ед. в год	80	500	30
3.5	105000	0,3 д. ед. в сутки	8000	4500	15
3.6	5000	6 д. ед. в год	90	400	30
3.7	8000	0,45 д. ед. в сутки	5000	800	40
3.8	7000	5 д. ед. в год	85	500	30
3.9	118000	0,5 д. ед. в сутки	11000	4000	15
3.10	4500	4 д. ед. в год	70	400	45

Задачи 4.1.-4.10. Производственному объединению из $n=3$ предприятий выделяется банковский кредит в сумме $c=120$ млн. ден. ед. для реконструкции и модернизации производства с целью увеличения выпуска продукции. Значения $f_i(x)$ $(i=\overline{1,3})$ дополнительного дохода, получаемого на предприятиях объединения в зависимости от выделенной суммы x известны. Требуется:

1) распределить средства c между предприятиями так, чтобы суммарный прирост выпуска продукции на всех 3-х предприятиях достиг максимальной величины (этот основной результат задачи получить для $c=120$ млн. ден. ед. и $n=3$);

2) используя выполненное решение основной задачи, найти: а) оптимальное распределение 100 млн. ден. ед. между тремя предприятиями; б) оптимальное распределение 80 млн. ден. ед. между двумя предприятиями.

Все необходимые числовые данные приведены в табл. 28.

Таблица 28

№ задачи	Предприятие	Прирост выпуска продукции, $f_i(x)$ млн. ден. ед.	Часть средств, выделяемых предприятиям, млн. ден. ед.				
			40	60	80	100	120
4.1	№ 1	$f_1(x)$	9	18	24	38	58
	№ 2	$f_2(x)$	11	19	30	44	63
	№ 3	$f_3(x)$	16	32	40	57	75
	№ 4	$f_4(x)$	13	27	44	69	81
4.2	№ 1	$f_1(x)$	9	17	29	38	47
	№ 2	$f_2(x)$	11	34	46	59	78
	№ 3	$f_3(x)$	13	28	37	49	75
	№ 4	$f_4(x)$	12	35	40	54	79
4.3	№ 1	$f_1(x)$	7	29	37	41	59
	№ 2	$f_2(x)$	9	19	28	37	46
	№ 3	$f_3(x)$	17	27	37	48	66
	№ 4	$f_4(x)$	16	30	42	65	89
4.4	№ 1	$f_1(x)$	9	20	35	44	57
	№ 2	$f_2(x)$	12	25	34	46	57
	№ 3	$f_3(x)$	11	20	32	48	61
	№ 4	$f_4(x)$	14	23	40	50	58
4.5	№ 1	$f_1(x)$	9	18	29	41	60
	№ 2	$f_2(x)$	8	19	30	47	58
	№ 3	$f_3(x)$	12	25	51	58	69
	№ 4	$f_4(x)$	7	15	52	59	60
4.6	№ 1	$f_1(x)$	11	21	40	54	62
	№ 2	$f_2(x)$	13	20	42	45	61
	№ 3	$f_3(x)$	10	22	34	55	60
	№ 4	$f_4(x)$	10	27	33	57	69
4.7	№ 1	$f_1(x)$	12	26	40	60	72
	№ 2	$f_2(x)$	16	21	36	49	63

	№ 3	$f_3(x)$	9	17	35	51	65
	№ 4	$f_4(x)$	15	25	51	62	76
№ задачи	Предприятие	Прирост выпуска продукции, $f_i(x)$ млн. ден. ед.	Часть средств, выделяемых предприятием, млн. ден. ед.				
4.8	№ 1	$f_1(x)$	14	24	37	45	58
	№ 2	$f_2(x)$	12	30	42	58	71
	№ 3	$f_3(x)$	13	25	45	62	76
	№ 4	$f_4(x)$	7	33	46	60	68
4.9	№ 1	$f_1(x)$	16	28	36	49	60
	№ 2	$f_2(x)$	10	29	42	50	78
	№ 3	$f_3(x)$	15	27	46	58	65
	№ 4	$f_4(x)$	17	23	38	53	67
4.10	№ 1	$f_1(x)$	12	28	39	47	69
	№ 2	$f_2(x)$	14	26	40	50	68
	№ 3	$f_3(x)$	11	24	43	51	68
	№ 4	$f_4(x)$	16	21	36	54	72

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1.

Таблица. F – распределение (распределение Фишера-Снедекора, $F(\nu_1; \nu_2; 0{,}1)$).

ν_2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	39,86	49,50	53,59	55,83	57,24	58,20	58,91	59,44	59,86	60,19	60,71	61.22	61,74	62	62,26	62,53	62,79	63,06	63,1
2	8,51	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9.35	9,37	9,38	9,39	9,41	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,48	9.49
3	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5.20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,14	5,13
4	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,9	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,79	3,78	3,76
5	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,4	3,37	3,14	3,32	3,30	3,27	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,14	3,12	3,10
6	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,76	2,74	2,72
7	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	3,75	2,72	2,70	2,67	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,51	2,49	2,47
8	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,50	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,34	2,12	2,29
9	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,38	2,34	2,10	2,28	2,25	2,23	2,21	2,18	2,16
10	3,29	2,92	2,71	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,28	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,11	2,08	2,06
11	3,23	2,86	2,66	2,54	2,45	2,39	2,34	2,30	2,27	2,25	2,21	2,17	2,12	2,10	2,08	2,050	2,03	2,00	1,97
12	3,18	2,81	2,61	2,48	2,39	2,33	2,28	2,24	2,21	2,19	2,15	2,10	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,91	1,90
13	3,14	2,76	2,56	2,43	2,35	2,28	2,23	2,2	2,16	2,14	2,10	2,05	2,01	1,98	1,96	1,91	1,90	1,88	1,85
14	3,10	2,73	2,52	2,39	2,31	2,24	2,19	2,15	2,12	2,11	2,05	2,01	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80
15	3,07	2,70	2,49	2,36	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09	2,06	2,02	1,97	1,92	1,90	1,87	1,85	1,82	1,79	1,76
16	3,05	2,67	2,46	2,33	2,24	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	1,99	1,94	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72

Окончание таблицы

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	
17	3,03	2,64	2,44	2,31	2,22	2,15	2,10	2,06	2,03	2,00	1,96	1,91	1,86	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69
18	3,01	2,62	2,42	2,29	2,20	2,13	2,08	2,04	2,00	1,98	1,91	1,89	1,84	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66
19	2,99	2,61	2,40	2,27	2,17	2,11	2,06	2,02	1,98	1,96	1,91	1,86	1,81	1,79	1,76	1,73	1,70	1,67	1,63
20	2,97	2,59	2,38	2,25	2,16	2,09	2,04	2,00	1,96	1,94	1,89	1,84	1,79	1,77	1,74	1,71	1,68	1,64	1,61
21	2,96	2,57	2,36	2,23	2,14	2,08	2,02	1,98	1,95	1,92	1,87	1,81	1,78	1,75	1,72	1,69	1,66	1,62	1,59
22	2,95	2,56	2,35	2,22	2,13	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,86	1,81	1,76	1,73	1,70	1,67	1,64	1,60	1,59
23	2,94	2,55	2,34	2,21	2,11	2,05	1,99	1,95	1,92	1,89	1,84	1,80	1,74	2,72	1,69	1,66	1,62	1,59	1,57
24	2,93	2,54	2,33	2,19	2,10	2,04	1,98	1,94	1,91	1,88	1,83	1,78	1,73	1,70	1,67	1,64	1,61	1,57	1,53
25	2,92	2,53	2,32	2,18	2,09	2,02	1,97	1,93	1,89	1,87	1,82	1,77	1,72	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52
26	2,91	2,52	2,31	2,17	2,08	2,01	1,96	1,92	1,88	1,86	1,81	1,76	1,71	1,68	1,65	1,61	1,58	1,54	1,50
27	2,90	2,51	2,30	2,17	2,07	2,00	1,95	1,91	1,87	1,85	1,80	1,75	1,70	1,67	1,64	1,60	1,57	1,53	1,49
28	2,89	2,50	2,29	2,16	2,06	2,00	1,94	1,90	1,87	1,84	1,79	1,74	1,69	1,66	1,63	1,59	1,56	1,52	1,48
29	2,89	2,50	2,28	2,15	2,06	1,99	1,93	1,89	1,86	1,83	1,78	1,73	1,68	1,65	1,62	1,58	1,55		1,51
30	2,88	2,49	2,28	2,14	2,05	1,98	1,93	1,88	1,85	1,82	1,77	1,72	1,67	1,64	1,61	1,57	1,54	1,50	1,46
40	2,84	2,44	2,23	3,09	2,00	1,93	1,87	1,83	1,79	1,76	1,71	1,66	1,61	1,57	1,54	1,51	1,47	1,42	1,38
60	2,79	2,39	2,18	2,04	1,95	1,87	1,82	1,77	1,74	1,71	1,66	1,60	1,54	1,51	1,48	1,44	1,40	1,35	1,29
120	2,75	2,35	2,13	1,99	190	1,82	1,77	1,72	1,68	1,65	1,60	1,55	1,48	1,45	1,41	1,37	1,32	1,26	1,19
∞	2,71	2,30	2,08	1,94	1,85	1,77	1,72	1,67	1,63	1,60	1,55	1,49	1,42	1,38	1,34	1,30	1,24	1,17	1,00

Перепечатано из книги: Persoп E. S., Hartley H. O. Biometrika Tables for Statisticians,— New York: Cambridge University Press, 1954, vol. 1.

Приложение 2.

Таблица. Распределение Стъюдента (t-распределение)

	Уровень значимости										
	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
ν											
1	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657	636,619
2	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	31,598
3	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	12,941,
4	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,563	2,132	2,776	3,747	4,604	8,610
5	0,406	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,043	6,859
6	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,959
7	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	5,405
8	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	5,041
9	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,781
10	0,397	0,543	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,583
11	0,396	0,542	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,437
12	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,68L	3,05&	4,318
13	0,394	0,539	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	4,221
14	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	4,140
15	0,393	0,536	6,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	4,073
19	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	4,015
17	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,965
18	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,922
19	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,325	1,729	2,093	2,539	2,861	3,883

Окончание таблицы

	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
20	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086 ,	2,528	2,845	3,850
21	0,391	0,532	0,686	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,819
22	0,390	0,532	0,686	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,792
23	0,390	0,532	0,685	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,767
24	0,390	0,531	0,685	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,745
25	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,725
26	0,390	0,531	0,684	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,707
27	0,389	0,531	0,684	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,690
28	0,389	0,530	0,683	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,674
29	0,389	0,530	0,683	0,854	1,056	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,659
30	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,646
40	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,551
60	0,387	0,527	0,679	0,848	1,046	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	3,460
120	0,386	0,526	0,677	0,845	1,041	1,289	1,658	1,980	2,358	2,617	3,373
∞	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,291

Приложение 3.
Обращение матрицы способом исключений.

Пусть A — квадратная невырожденная матрица n-го порядка. Требуется найти обратную матрицу к матрице A.

С этой целью рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными $x_1,\ldots,\ x_n$, коэффициентами при которых являются элементы рассматриваемой матрицы A, а свободными членами — пока не определенные числа $y_1,\ldots,\ y_n$, т. е. систему вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_{1,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots a_{nn}x_n = y_{n,} \end{cases} \qquad (1)$$

или в матричной форме

$$AX = Y \qquad (2)$$

где X — матрица-столбец $(x_1, \ldots, x_n)^T$ неизвестных; Y — матрица – столбец $(y_1, \ldots, y_n)^T$ свободных членов.

Так как матрица A невырожденная, то ее определитель отличен от нуля и следовательно система (1) (или (2)) имеет единственное решение. Получим его в матричной форме. Для этого умножим обе части равенства (2) на обратную матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}Y.$$

С учетом равенства $A^{-1}A = E$ получим

$$X = A^{-1}Y. \qquad (3)$$

Обозначим элементы искомой матрицы A^{-1} через b_{ij}. Тогда

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Нам нужно найти элементы b_{ij} обратной матрицы A^{-1}. Для этого запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right). \qquad (4)$$

Затем выполняем последовательно исключения с разрешающими элементами a_{11}, a'_{22}, a'_{33}, … В результате будет получена матрица вида

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right), \qquad (5)$$

в которой справа от вертикальной черты будет находиться искомая обратная матрица

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все вышесказанное на примере.

Пример. Найти обратную матрицу для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем расширенную матрицу

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее преобразуем матрицу следующим образом: умножаем первую строку на -2 и складываем ее со второй строкой (первую переписываем без изменения). Затем умножаем первую строку на -4 и складываем ее с третьей строкой. Результат выглядит следующим образом:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Далее вычтем из третьей строки вторую и разделим вторую строку на -3:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из первой строки вторую и разделим третью строку на -2:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 4/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Продолжая преобразования указанным способом получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right).$$

Из последней матрицы и выпишем искомую обратную матрицу

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1/3 & 2/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \\ 1 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Абчук В. А. Экономико-математические методы. С.-Петербург: «Союз», 1999.
2. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 1986.
3. Альсевич В. В. Математическая экономика. Мн., 1998.
4. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. — М.: ДИС, 2001.
5. Исследование операций в экономике/ Под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997.
6. Колемаев В. А. Математическая экономика. — М.: ЮНИТИ, 1988.
7. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. пособие. — М.: Дело, 2000.
8. Кузнецов А.В., Холод Н.И., Костевич Л.С. Руководство к решению задач по математическому программированию: Учеб. пособие. — Мн.: Выш. шк., 2001.
9. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование. Мн.: Выш. шк., 1994.
10. Курицкий Б. Я. Поиск оптимальных решений средствами Excel 7.0. — Спб.:BHV — Санкт-Петербург, 1997.
11. Математические методы в планировании отраслей и предприятий / Под ред. И. Г. Попова. — М.: Экономика, 1981.
12. Перепелицкий С. Н. Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении на предприятиях лесной промышленности. — М.: Лесная промышленность, 1989.
13. Сакович В.А. Исследование операций: Справочное пособие. Мн.: Выш. шк., 1985.
14. Тарасевич В. М. Экономико-математические методы и модели в ценообразовании. Ч 1, Ч 2. — Л.: ЛФЭИ, 1991.
15. Шевченко С. В. Экономико-математические методы и модели. Ч 1. — Мн.: БГТУ, 1997.
16. Федосеев В. Ф. Экономико-математические методы и модели в маркетинге. — М.: Финстатинформ, 1996.
17. Экономико-математические методы и модели / Под ред. А. В. Кузнецова. — Мн.: БГЭУ, 2000.

18. Яновіч У. І. Матэматычнае праграмаванне. Мн.: БДТУ, 1998.
19. Янович В. И., Балашевич Н. В. Экономико-математические методы и модели. Мн.: БГТУ, 2002.
20. Янович В. И., Шинкевич Е. А. Экономико-математические методы и модели. Мн.: БГТУ, 2003.

СОДЕРЖАНИЕ