

Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. М. Олехнович,
К. И. Рудик**

ФИЗИКА

В 5-ти частях

Часть 4
ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Учебное электронное издание

Минск 2011

УДК [53+537.8](075.8)
ББК [22.3+22.313]я73
О-53

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:

профессор кафедры физики БГПУ им. Максима Танка

В. А. Яковенко;

кандидат физико-математических наук,

заведующий кафедрой физики БГАТУ *В. А. Чернявский*

Олехнович, А. М.

О-53 Физика. В 5 ч. Ч. 4. Электромагнетизм : учеб. электронное издание / А. М. Олехнович, К. И. Рудик. – Минск : БГТУ, 2011. – 126 с.

Предлагаемое издание написано на основе учебной программы по физике для студентов инженерно-технических специальностей. В нем описаны свойства и источники магнитного поля как на макро-, так и на микроуровне. Последовательно введены характеристики магнитного поля и изложены методы их расчета и измерения. Рассмотрены различные проявления силового действия изучаемого поля и его практическое применение. Достаточно полно и с использованием новейших данных изложена тема «Магнитное поле в веществе». Должное внимание уделено описанию явления электромагнитной индукции и его практическому использованию. В соответствии с программой изложен учебный материал, касающийся электромагнитных колебаний и волн.

УДК [53+537.8](075.8)
ББК [22.3+22.313]я73

© УО «Белорусский государственный
технологический университет», 2011
© Олехнович А. М., Рудик К. И., 2011

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ

1.1. Индукция магнитного поля. Силовые линии магнитного поля

Изучение электропроводности тел любой природы (твердых, жидких, газообразных) привело к установлению основных законов проводников с током (закон Ома, закон Джоуля – Ленца). Дальнейшие исследования показали, что в пространстве вокруг проводника с током или постоянных магнитов существует *магнитное поле*. Это поле оказывает ориентирующее действие на контур с током или магнитную стрелку, которая может свободно вращаться вокруг своего центра тяжести.

Известно, что все постоянные магниты или соленоид с током обладают разноименными полюсами – северным и южным. Одноименные полюсы взаимно отталкиваются, а разноименные – взаимно притягиваются.

Основной характеристикой магнитного поля является *вектор магнитной индукции* \vec{B} .

Физический смысл вектора магнитной индукции и точное его определение будут рассмотрены ниже. В первую очередь укажем способ определения вектора \vec{B} в различных точках магнитного поля. Принято, что вектор магнитной индукции \vec{B} в произвольной точке поля совпадает по направлению с силой, действующей на северный полюс бесконечно малой магнитной стрелки, помещенной в эту точку. Сила, действующая на южный полюс магнитной стрелки со стороны магнитного поля, направлена в противоположную сторону. Следовательно, на магнитную стрелку в магнитном поле действует пара сил (вращающий момент сил), поворачивающая ее таким образом, чтобы ось стрелки, соединяющая южный и северный полюсы, совпадала с направлением вектора \vec{B} магнитного поля.

Для графического изображения магнитных полей удобно пользоваться силовыми линиями (линиями магнитной индукции). **Силовой линией** любого поля (в том числе и магнитного) является линия, в каждой точке которой вектор, характеризующий это поле, направлен по касательной. Исследования магнитного поля при помощи магнитной стрелки или контура с током показали, что силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Принято считать, что линии индукции магнитного поля начинаются на северном полюсе. На рис. 1.1 приведены плоские сечения простейших магнитных полей.

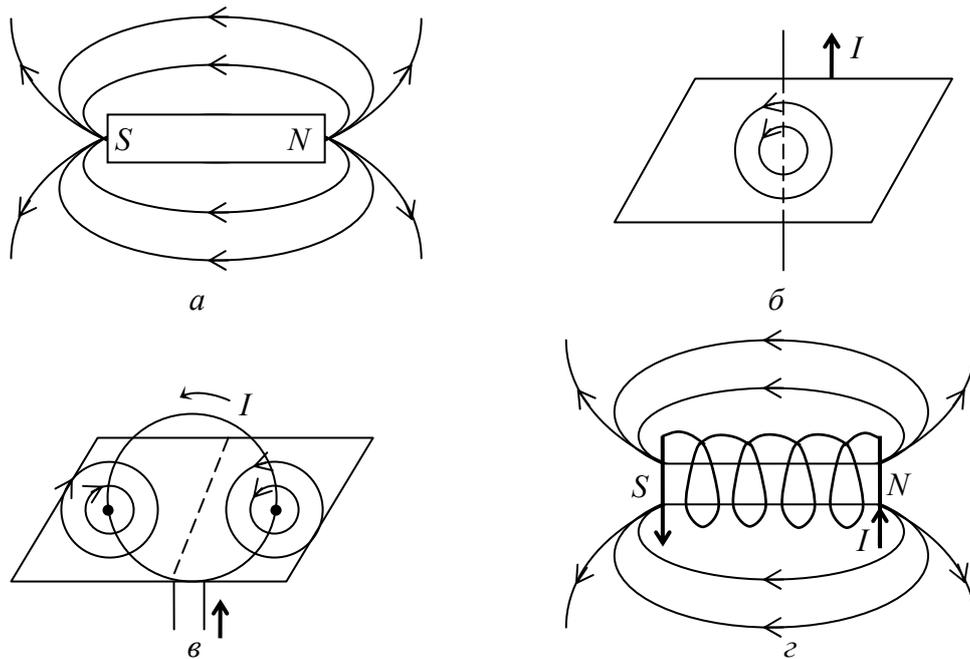


Рис. 1.1

Из приведенного рисунка видно, что силовые линии магнитного поля охватывают проводники с током. Вблизи проводника линии магнитной индукции лежат в плоскостях, перпендикулярных к проводнику. Направление линий индукции магнитного поля тока определяют по **правилу правого винта**: *если правый винт вращать так, чтобы его поступательное движение совпадало с направлением тока, то направление вращательного движения укажет направление линий магнитной индукции*. На рис. 1.2 приведен пример использования правила правого винта для определения направления вектора \vec{B} магнитного поля, создаваемого токами I_1 и I_2 . Принято обозначать: $I_1 (\odot)$ – ток «к нам», $I_2 (\oplus)$ – ток «от нас».



Рис. 1.2

Полная аналогия между магнитными полями полосовых магнитов (рис. 1.1, а) и соленоидов (рис. 1.1, г) позволила французскому физику А. Амперу высказать гипотезу о том, что магнитные свойства постоянных магнитов обусловлены существующими в них микротоками. К настоящему времени эта гипотеза полностью обоснована и лежит в основе современных представлений о магнитных свойствах вещества.

1.2. Сила Ампера

Ранее было показано, что проводники с током создают вокруг себя магнитное поле и действуют на находящиеся около них постоянные магниты. Поэтому естественно, что магнитное поле действует на проводник с током.

Действие магнитного поля на проводник с током опытным путем было установлено Г. Эрстером и А. Ампером. В результате детального исследования этого явления А. Ампер пришел к выводу, что сила F , которая действует на прямолинейный проводник с током, находящийся в однородном магнитном поле, прямо пропорциональна силе тока I в проводнике, его длине l , магнитной индукции B и синусу угла α между направлением тока в проводнике и вектором \vec{B} :

$$F = IBl \sin \alpha. \quad (1.1)$$

В случае неоднородного магнитного поля ($\vec{B} \neq \text{const}$) и проводника произвольной формы для определения действующей силы необходимо разбить проводник на элементарные участки так, чтобы каждый из них можно было считать прямолинейным, а вектор \vec{B} в окружающем его пространстве – постоянным. В этом случае

$$dF = IBdl \sin(\widehat{dl \vec{B}}). \quad (1.2)$$

Вектор \vec{dl} проводника совпадает с направлением тока.

Закон Ампера позволяет определить численное значение B и выяснить физический смысл этой величины. Для упрощения будем считать, что элемент проводника dl с током I перпендикулярен к направлению вектора \vec{B} магнитного поля ($\sin(\widehat{dl \vec{B}}) = 1$). Тогда из закона Ампера (1.2)

$$B = \frac{1}{I} \frac{dF}{dl}. \quad (1.3)$$

Из выражения (1.3) следует, что магнитная индукция B численно равна силе, действующей со стороны поля на единицу длины проводника, по которому течет ток единичной величины в 1 А. Единицей магнитной индукции является тесла (Тл). Из формулы (1.3) следует, что $1 \text{ Тл} = 1 \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 1 \frac{\text{Дж}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2}$.

Таким образом, магнитная индукция является *силовой характеристикой* магнитного поля.

Закон Ампера (1.2) не позволяет определить направление силы \vec{dF} . Анализ опытов показал, что направление силы \vec{dF} можно определить по **правилу левой руки**, которое заключается в следующем: если ладонь левой руки расположить так, чтобы в нее входили линии магнитной индукции, а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отставленный большой палец укажет направление силы, действующей со стороны поля. Рис. 1.3 иллюстрирует вышесказанное.

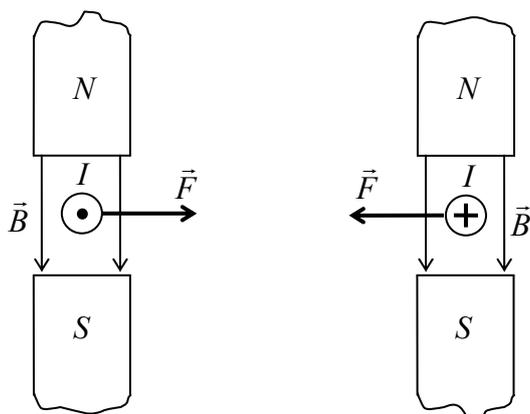


Рис. 1.3

Если между полюсами магнита поместить рамку с током, которая может вращаться вокруг оси O (см. рис. 1.4), то на рамку будет действовать пара сил, приводящая рамку во вращательное движение.

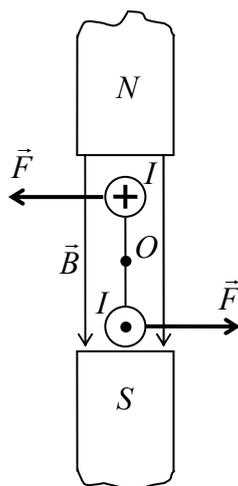


Рис. 1.4

На рис. 1.4 приведено сечение рамки и магнита плоскостью, перпендикулярной к плоскости рамки.

Указанное положение лежит в основе работы электродвигателей постоянного тока.

Для определения направления силы \vec{dF} удобно пользоваться более универсальным правилом. Вектор \vec{dF} направлен по правилу векторного произведения $\vec{dl} \times \vec{B}$ (т. к. $|\vec{dl} \times \vec{B}| = Bdl \sin(\widehat{dl B})$). В конечном итоге закон Ампера в векторной форме можно записать:

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \times \vec{B}. \quad (1.4)$$

Соотношение (1.4) иллюстрирует рис. 1.5, из которого следует, что сила Ампера не является центральной, она всегда направлена перпендикулярно к линиям магнитной индукции.

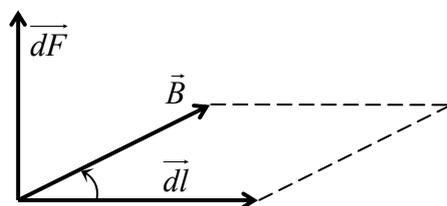


Рис. 1.5

1.3. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях

На проводник с током действует сила Ампера (см. формулу (1.4)). Ток представляет собой упорядоченное движение заряженных частиц. По этой причине на отдельно движущийся заряд в магнитном поле действует сила. На положительные и отрицательные заряды (ионы) действуют силы, направленные перпендикулярно к векторам \vec{B} и \vec{v} (\vec{v} – скорость частицы). На опытах было установлено, что для положительно заряженных частиц направление силы совпадает с направлением вектора $\vec{v} \times \vec{B}$, а для отрицательно заряженных частиц – с направлением вектора $\vec{B} \times \vec{v}$.

Для определения силы, действующей на движущийся заряд в магнитном поле, воспользуемся законом Ампера, согласно которому на элемент dl проводника с током I , находящийся в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила \vec{dF} , равная:

$$\overline{dF} = I \overline{dl} \times \vec{B}.$$

Если ток I в проводнике обусловлен движением частиц с зарядом q , движущимся со скоростью \vec{v} , то

$$I \overline{dl} = q \vec{v} dn, \quad (1.5)$$

где dn – число частиц в объеме проводника длиной dl . Естественно, что в формуле (1.5) заряд $q > 0$. В конечном итоге имеем:

$$\overline{dF} = q dn \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.6)$$

Из выражения (1.6) следует, что сила, действующая на отдельно движущийся заряд, будет равна:

$$\vec{F}_L = \frac{d\overline{F}}{dn} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.7)$$

Выражение (1.7) впервые было получено Г. Лоренцом, и поэтому указанная сила \vec{F}_L называется **силой Лоренца**.

В соотношении (1.7) множитель q – алгебраическая величина заряда, т. е. $q > 0$ для положительных зарядов и $q < 0$ – для отрицательных.

Численное значение силы Лоренца равно:

$$F_L = qvB \sin(\widehat{\vec{v} \vec{B}}). \quad (1.8)$$

Из соотношения (1.7) следует, что сила Лоренца всегда направлена *перпендикулярно* к скорости заряда и поэтому играет роль *центростремительной силы*, которая *не совершает работы*. Эта сила изменяет только направление скорости движения заряда в магнитном поле. Абсолютная величина скорости заряда и его кинетическая энергия при движении в магнитном поле *не изменяются*.

В общем случае на движущийся заряд действуют электрическое поле напряженностью \vec{E} и магнитное поле индукцией \vec{B} . Результирующая сила \vec{F} , приложенная к заряду, равна векторной сумме силы $\vec{F}_e = q\vec{E}$ и силы Лоренца \vec{F}_L :

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим частные случаи движения заряженных частиц в однородном магнитном поле ($\vec{B} = \text{const}$).

1. Заряженная частица движется вдоль силовых линий магнитного поля (см. рис. 1.6).

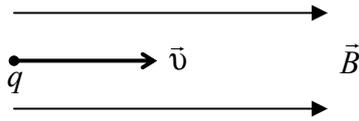


Рис. 1.6

В этом случае угол α между векторами \vec{v} и \vec{B} равен нулю или π . Поэтому, согласно равенству (1.8), сила Лоренца равна нулю, т. е. магнитное поле не действует на частицу.

2. Частица, имеющая заряд q , движется перпендикулярно к линиям магнитной индукции ($\alpha = \pi/2$). В этом случае сила Лоренца равна:

$$F_{\text{Л}} = |q|vB \quad (1.10)$$

и направлена перпендикулярно к векторам \vec{v} и \vec{B} . Как отмечалось выше, сила Лоренца в этом случае является центростремительной силой:

$$F_{\text{ц}} = \frac{mv^2}{R}, \quad (1.11)$$

где m – масса частицы; R – радиус кривизны ее траектории.

Из равенств (1.10) и (1.11) радиус кривизны траектории (если $\vec{B} = \text{const}$, R – радиус окружности):

$$R = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v}{B}. \quad (1.12)$$

Направление силы Лоренца, а значит, и направление отклонения движущейся частицы в магнитном поле зависят от знака заряда q . Рис. 1.7 иллюстрирует сказанное. По характеру отклонения частицы в магнитном поле можно судить о знаке движущегося заряда. Этим фактом широко пользуются в исследованиях элементарных частиц (исследования при помощи камеры Вилсона).

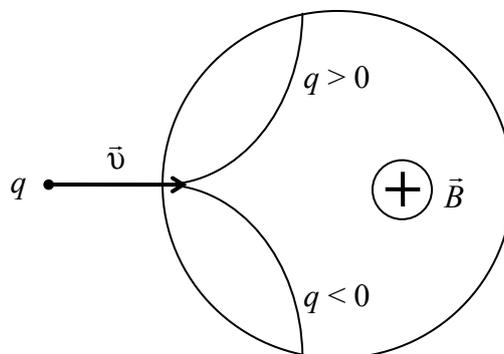


Рис. 1.7

Частица движется по окружности радиуса R равномерно. Поэтому период обращения частицы равен:

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right|. \quad (1.13)$$

Величина $\left| \frac{q}{m} \right|$, называемая **удельным зарядом**, является одной из основных характеристик заряженных частиц.

Полученное соотношение (1.13) справедливо для скоростей $v \ll c$, когда, как известно, масса частицы $m = \text{const}$.

Рассмотрим общий случай движения заряженной частицы в однородном магнитном поле, когда ее скорость \vec{v} направлена под произвольным углом α к вектору индукции поля \vec{B} (рис. 1.8).

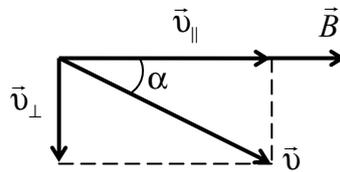


Рис. 1.8

Для определения траектории движения заряженной частицы разложим вектор скорости \vec{v} на две составляющие: параллельную вектору \vec{B} и перпендикулярную к нему. Величины этих составляющих соответственно равны:

$$v_{\parallel} = v \cos \alpha; \quad v_{\perp} = v \sin \alpha. \quad (1.14)$$

Благодаря составляющей \vec{v}_{\perp} частица движется по окружности, плоскость которой перпендикулярна к вектору \vec{B} , а радиус, согласно соотношению (1.12), равен:

$$R = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v_{\perp}}{B} = \left| \frac{m}{q} \right| \frac{v \sin \alpha}{B}. \quad (1.15)$$

Одновременно с движением по окружности радиуса R (см. формулу (1.15)) частица совершает поступательное движение со скоростью v_{\parallel} в направлении, перпендикулярном к плоскости вращения. Таким образом, частица движется по винтовой линии, ось которой совпадает с вектором \vec{B} (рис. 1.9). Шаг винтовой линии равен:

$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi}{B} \left| \frac{m}{q} \right| v \cos \alpha. \quad (1.16)$$

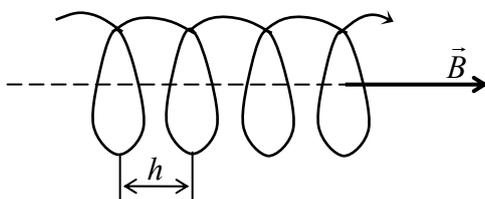


Рис. 1.9

Рассмотренные выше особенности движения заряженных частиц в однородном магнитном поле позволяют разработать точные методы экспериментального определения масс этих частиц. Для определения массы частицы достаточно знать ее заряд q и удельный заряд q/m .

Ф. Астон для этой цели сконструировал прибор, названный им **масс-спектрографом**. Принципиальная схема этого прибора изображена на рис. 1.10. Предварительно отметим, что для проведения исследования вещество необходимо перевести в газообразное состояние и под действием внешних факторов (облучение, нагревание и др.) ионизировать частицы вещества для того, чтобы в электрическом поле сообщить им некоторую скорость.

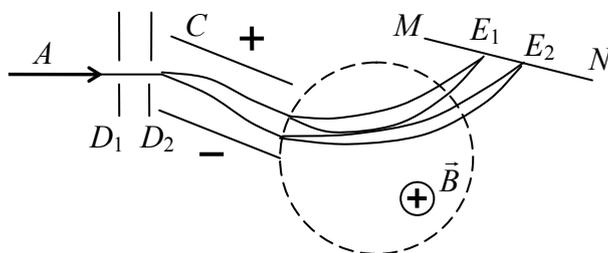


Рис. 1.10

Для получения параллельного пучка A ионов их пропускают через диафрагмы D_1 и D_2 с узкими щелями. Исследуемый пучок заряженных частиц направляется в однородное электрическое поле конденсатора C . При этом ионы отклоняются в этом поле тем сильнее, чем меньше их скорость и чем больше удельный заряд. Затем ионы попадают в однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} , направленной за чертеж, и движутся в нем по дугам различных радиусов кривизны. Величины этих радиусов тем больше, чем больше скорость ионов и чем меньше их удельный заряд (см. формулу (1.12)). В магнитном поле пучок ионов

расщепляется на несколько пучков, каждый из которых соответствует определенному значению величины удельного заряда ионов. На рис. 1.10 приведены траектории двух типов ионов. Радиус верхней границы пучка больше радиуса нижней границы, т. к. вдоль верхней границы движутся более быстрые ионы, а вдоль нижней – более медленные. Следовательно, магнитное поле фокусирует ионы, обладающие одинаковым удельным зарядом и различными скоростями. Величину магнитной индукции B можно подобрать таким образом, чтобы ионы фокусировались на фотопластинке MN , расположенной перпендикулярно к плоскости чертежа (рис. 1.10). Тогда на пластинке получится ряд узких параллельных линий, соответствующих различным значениям удельных зарядов ионов. В нашем примере линия E_1 соответствует ионам с большим удельным зарядом, а линия E_2 – ионам с меньшим удельным зарядом.

Масс-спектрограф Ф. Астона позволил измерить массы изотопов химических элементов.

Экспериментальные методы исследования вещества основаны на бомбардировке атомов заряженными частицами, движущимися с большими скоростями. В связи с этим возникла необходимость создания устройств, которые позволяли бы получать заряженные частицы с большой кинетической энергией. Такие устройства называются **ускорителями заряженных частиц**. По форме траектории движения частиц ускорители подразделяют на две основные группы: *линейные* и *циклические*. В линейных ускорителях траектория движения заряженных частиц близка к прямым линиям, а в циклических она представляет собой окружности или спирали.

В любом ускорителе основным элементом является электрическое поле, которое совершает работу над зарядом q частицы, равную:

$$A = q(\varphi_1 - \varphi_2),$$

где φ_1 и φ_2 – значения потенциалов поля в начальной и конечной точках траектории заряда. Эта работа идет на увеличение кинетической энергии частицы. В линейных ускорителях заряженная частица проходит в электрическом поле однократно, и поэтому для получения большой кинетической энергии необходима большая разность потенциалов, что практически ограничено до нескольких миллионов вольт.

Наиболее мощные современные ускорители заряженных частиц построены по циклическому типу. В этих ускорителях заряженная частица проходит в электрическом поле многократно и при каждом проходе увеличивает энергию до нескольких сотен тысяч электронвольт. Для периодического возвращения заряженных частиц в область ускоряющего

электрического поля применяется сильное поперечное магнитное поле. Ускорители такого типа получили название **циклотронов**.

Циклотроны состоят из двух металлических дуантов: M и N (рис. 1.11). Дуанты заключены в камеру A , которая помещена между полюсами сильного электромагнита. Вектор индукции магнитного поля направлен перпендикулярно к плоскости чертежа.

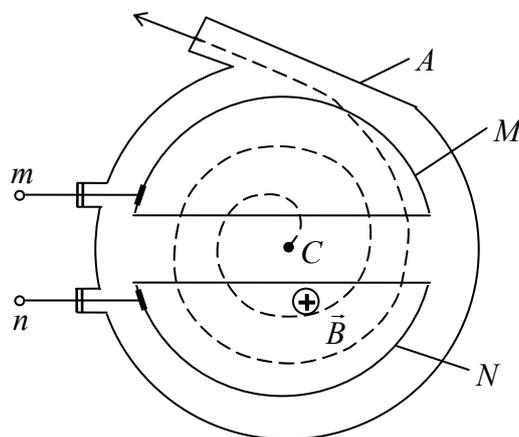


Рис. 1.11

Дуанты с помощью электродов m и n присоединены к полюсам электрического генератора, который создает в цепи между дуантами сильное электрическое поле. Если в точку C ввести положительный ион в тот момент, когда электрическое поле между дуантами максимально и направлено вверх, то ион будет ускоренно перемещаться в плоскости чертежа снизу вверх. Когда ион попадает в дуант M , ускоряющее действие электрического поля прекращается. В дуанте M на движущийся ион действует магнитное поле, под действием которого ион описывает полуокружность, радиус которой определяется соотношением (1.12). К тому моменту времени, когда ион выходит из дуанта M к зазору между дуантами, направление электрического поля изменяется на противоположное первоначальному, и поле снова будет ускорять движение иона. Внутри дуанта N ион опишет полуокружность бóльшего радиуса в связи с возрастанием скорости иона. Далее, к моменту вылета иона в зазор между дуантами, электрическое поле снова изменит свое направление и будет ускорять движение иона. В результате многократного (циклического) ускорения иона электрическим полем его кинетическая энергия может достигнуть больших значений. В камере A создается высокий вакуум.

Отметим, что процесс непрерывного ускорения иона возможен только в том случае, если движение иона и изменение электрического поля в зазоре происходят синхронно.

1.4. Эффект Холла

Американский физик Э. Холл обнаружил, что если пластину M с постоянным электрическим током I поместить в однородное магнитное поле, перпендикулярное к ее боковым граням, то на противоположных гранях между точками A и C (см. рис. 1.12) возникнет разность потенциалов. Точки A и C выбраны на сечении в пластине M перпендикулярно к ее граням.

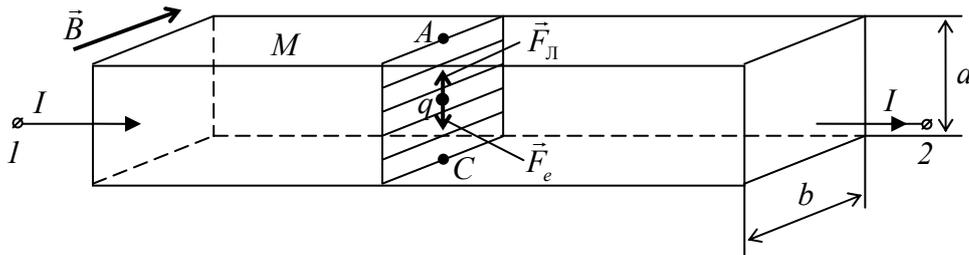


Рис. 1.12

Явление возникновения разности потенциалов $\Delta\varphi = \varphi_A - \varphi_C$ в этом случае носит название **эффекта Холла**. Величина разности потенциалов $\Delta\varphi$ прямо пропорциональна силе тока I , индукции магнитного поля B и обратно пропорциональна ширине b пластины, т. е.

$$\Delta\varphi_H = R_H \frac{IB}{b}, \quad (1.17)$$

где R_H – постоянная Холла.

Изменение направления тока или направления вектора индукции магнитного поля \vec{B} вызывает изменение знака разности потенциалов $\Delta\varphi$.

Величина постоянной Холла R_H зависит от природы материала пластины M и может принимать положительное или отрицательное значение.

Выведем уравнение (1.17) на основе электронной теории проводимости вещества. Пусть ток I в пластине обусловлен упорядоченным движением зарядов q , движущихся со скоростью \vec{v} и имеющих концентрацию n_0 . Тогда величина тока I равна:

$$I = qv n_0 S = qv n_0 ab. \quad (1.18)$$

Скорость зарядов $q > 0$ совпадает с направлением тока, и в соотношении (1.18) скорость $v > 0$. В случае если заряды $q < 0$, их скорость противоположна направлению тока, и в формуле (1.18) скорость $v < 0$.

На положительный заряд q , движущийся со скоростью \vec{v} в магнитном поле с индукцией \vec{B} , действует сила Лоренца:

$$\vec{F}_L = q\vec{v} \times \vec{B}. \quad (1.19)$$

Под влиянием этой силы заряды q отклоняются к верхней грани пластины, обуславливая избыток заряда q на ней. Тогда в области нижней грани обнаружится недостаток этих зарядов. В результате этого в пластине возникает поперечное электрическое поле, напряженность \vec{E} которого направлена сверху вниз. Сила, действующая на заряд q со стороны электрического поля, равна: $\vec{F} = q\vec{E}$ и направлена противоположно силе Лоренца. При равновесном процессе прохождения тока в пластине эти силы равны, т. е.

$$qE = qvB.$$

При определенной геометрии пластины M электрическое поле в ней можно считать однородным. Тогда разность потенциалов $\Delta\phi$ между точками A и C равна:

$$\Delta\phi = Ea = vBa. \quad (1.20)$$

Выразив скорость v из соотношения (1.18) и подставив ее в формулу (1.20), получим:

$$\Delta\phi_H = \frac{1}{qn_0} \frac{IB}{b}. \quad (1.21)$$

Из выражения (1.21) следует, что постоянная Холла равна:

$$R_H = \frac{1}{n_0q}. \quad (1.22)$$

Таким образом, знак постоянной Холла указывает на знак заряда, обуславливающего ток I . По этой причине на основании экспериментального измерения постоянной Холла для полупроводников можно судить о природе их проводимости (электронная или дырочная).

С помощью измерения постоянной Холла R_H можно определить концентрацию n_0 носителей тока.

Знание величины постоянной Холла для электронных проводников позволило определить среднюю длину свободного пробега электронов $\bar{\lambda}$, величина которой достигает сотен межузельных расстояний ($\bar{\lambda} \approx 10^{-8}$ м).

Эффект Холла широко используется для измерения индукции B магнитных полей.

2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ

2.1. Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей

В 1820 г. французские ученые Ж. Био и Ф. Савар исследовали магнитные поля, создаваемые в воздухе проводниками с током. В результате многочисленных опытов было установлено:

- 1) во всех случаях индукция магнитного поля B пропорциональна силе тока в проводнике;
- 2) величина индукции магнитного поля B зависит от размеров и формы проводника с током;
- 3) магнитная индукция B зависит от положения точки наблюдения по отношению к проводнику с током.

В случае прямолинейного проводника с током I магнитная индукция B пропорциональна отношению I/r (r – расстояние от рассматриваемой точки до проводника), а в центре кругового витка радиусом R с током I индукция B пропорциональна I/R .

Общий закон, определяющий индукцию магнитного поля, был получен П. Лапласом, который учел векторный характер магнитной индукции. При этом магнитная индукция \vec{B} в каждой точке поля представляет собой векторную сумму индукций $d\vec{B}$ элементарных магнитных полей, создаваемых каждым участком $d\vec{l}$ проводника с током.

Обобщив опытные данные Ж. Био и Ф. Савара, П. Лаплас получил следующий закон, называемый **законом Био – Савара – Лапласа**:

$$d\vec{B} = K \frac{I}{r^3} d\vec{l} \times \vec{r}. \quad (2.1)$$

где K – коэффициент пропорциональности, зависящий от среды и системы единиц; $d\vec{l}$ – вектор, численно равный длине dl элемента проводника и совпадающий по направлению с электрическим током; \vec{r} – радиус-вектор, проведенный из элемента проводника $d\vec{l}$ в рассматриваемую точку поля.

Иллюстрацией закона (2.1) является рис. 2.1, на котором представлен вектор $d\vec{B}$ индукции магнитного поля в точке C , создаваемого элементом проводника dl с током I .

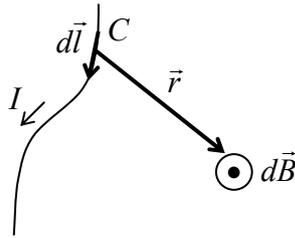


Рис. 2.1

В системе СИ равенство (2.1) принимает вид:

$$\vec{dB} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{I}{r^3} \vec{dl} \times \vec{r}, \quad (2.2)$$

где μ – магнитная проницаемость среды; $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Численное значение вектора \vec{dB} равно:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin(\widehat{dl \vec{r}})}{r^2}. \quad (2.3)$$

Наряду с магнитной индукцией \vec{B} вводится другая векторная характеристика магнитного поля – напряженность \vec{H} , которая для изотропных магнитных сред связана с индукцией \vec{B} следующим соотношением:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu\mu_0}. \quad (2.4)$$

Напряженность магнитного поля электрического тока не зависит от свойств среды, что будет показано ниже, и равна:

$$\vec{dH} = \frac{I}{4\pi r^3} \vec{dl} \times \vec{r}, \quad (2.5)$$

или модуль dH равен:

$$dH = \frac{Idl \sin(\widehat{dl \vec{r}})}{4\pi r^2}. \quad (2.6)$$

В соответствии с принципом суперпозиции магнитная индукция \vec{B} в любой точке магнитного поля проводника с током I равна:

$$\vec{B} = \int_l \vec{dB}. \quad (2.7)$$

Используем закон Био – Савара – Лапласа для расчета магнитных полей в простейших случаях.

1. *Магнитное поле прямолинейного проводника с током.*

Пусть прямолинейный проводник MN с током I лежит в плоскости чертежа (рис. 2.2). Согласно закону Био – Савара – Лапласа (см. формулу (2.2)), вектор магнитной индукции $d\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости чертежа и направлен «к нам». Численное значение поля dB , создаваемого в точке A элементом проводника dl с током I , равно:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl \sin \varphi}{4\pi r^2}, \quad (2.8)$$

где φ – угол между векторами $d\vec{l}$ и \vec{r} .

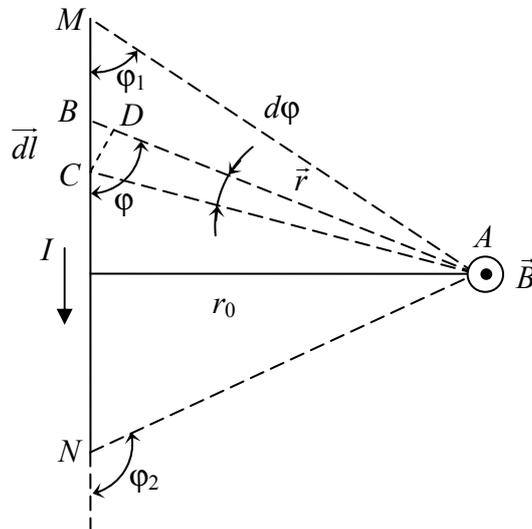


Рис. 2.2

Поскольку проводник прямолинейный, то вектор $d\vec{B}$ от каждого элемента $d\vec{l}$ имеет одинаковое направление, и поэтому суммарная магнитная индукция равна:

$$B = \int dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi} \int_l \frac{dl \sin \varphi}{r^2}. \quad (2.9)$$

В формуле (2.9) подынтегральное выражение трех переменных выразим через одну переменную φ . Из рис. 2.2 следует, что $r = \frac{r_0}{\sin \varphi}$, а

$dl = \frac{CD}{\sin \varphi}$. Но $CD = r d\varphi$, поэтому

$$dl = \frac{rd\varphi}{\sin\varphi} = \frac{r_0 d\varphi}{\sin^2\varphi}.$$

Подставив полученные значения r и dl в соотношение (2.9), получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sin\varphi d\varphi,$$

где φ_1 и φ_2 – значения угла φ для крайних точек проводника MN .

Проинтегрировав последнее равенство, получим:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2). \quad (2.10)$$

Углы φ_1 и φ_2 – это углы между проводником с током (или его продолжением) и радиусом-вектором, проведенным от конца проводника к рассматриваемой точке.

Если проводник MN бесконечно длинный, то $\varphi_1 = 0$, а $\varphi_2 = \pi$. Тогда магнитная индукция в любой точке поля такого проводника с током равна:

$$B = \frac{\mu\mu_0 I}{2\pi r_0}. \quad (2.11)$$

Напряженность магнитного поля $H = \frac{B}{\mu\mu_0}$ для прямолинейного проводника с током равна:

$$H = \frac{I}{4\pi r_0} (\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2), \quad (2.12)$$

а для бесконечно длинного проводника:

$$H = \frac{I}{2\pi r_0}. \quad (2.13)$$

2. Магнитное поле кругового тока.

Определим индукцию и напряженность магнитного поля в центре O кругового плоского витка радиусом R , по которому течет ток I (рис. 2.3).

Согласно закону Био – Савара – Лапласа (2.8), магнитная индукция dB поля, создаваемого в точке O элементом dl витка с током, равна:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin(\widehat{dl \vec{r}}).$$

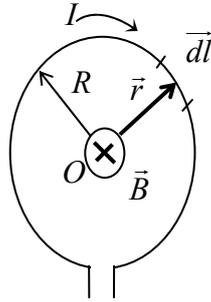


Рис. 2.3

В рассматриваемом случае $\sin(\widehat{dl \vec{r}}) = 1$; $r = R$.

Поэтому величина dB равна:

$$dB = \frac{\mu\mu_0 I dl}{4\pi R^2}.$$

Все векторы \vec{dB} , создаваемые в точке O различными участками \vec{dl} , имеют одинаковое направление, перпендикулярное к плоскости витка («от нас»). Поэтому индукция результирующего поля равна:

$$B = \int dB = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi R^2} dl = \frac{\mu\mu_0 I}{2R}. \quad (2.14)$$

Соответственно напряженность магнитного поля в центре кругового витка с током равна:

$$H = \frac{I}{2R}. \quad (2.15)$$

Определим индукцию и напряженность магнитного поля, создаваемого круговым витком с током в произвольной точке на оси витка. Пусть кольцевой виток радиусом R с током I расположен перпендикулярно к плоскости чертежа, а его ось OO' лежит в плоскости чертежа (рис. 2.4). Векторы \vec{dB} в точке C , лежащей на оси OO' , создаваемые различными участками \vec{dl} , не совпадают по направлению и равны:

$$\vec{dB} = \frac{\mu\mu_0 I}{4\pi r^3} \vec{dl} \times \vec{r}.$$

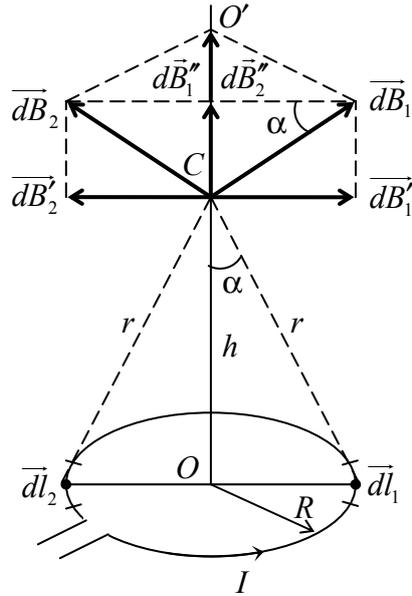


Рис. 2.4

Численно все векторы \vec{dB} для равных по длине элементов dl равны между собой:

$$dB = dB_1 = dB_2 = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{Idl}{R^2 + h^2}. \quad (2.16)$$

В нашем случае $r^2 = R^2 + h^2$ и $\sin(\widehat{dl \vec{r}}) = 1$.

Разложим векторы \vec{dB}_1 и \vec{dB}_2 от диаметрально противоположных элементов \vec{dl}_1 и \vec{dl}_2 на \vec{dB}'_1 , \vec{dB}''_1 , \vec{dB}'_2 и \vec{dB}''_2 . Из приведенного рисунка видно, что векторы \vec{dB}'_1 и \vec{dB}'_2 противоположно направлены и равны по величине. По этой причине суммарная индукция магнитного поля в рассматриваемой точке C равна сумме одинаково направленных векторов \vec{dB}''_2 и \vec{dB}''_1 :

$$B = \int_l dB \sin \alpha. \quad (2.17)$$

В свою очередь $\sin \alpha = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + h^2}}$. В конечном итоге искомая индукция B магнитного поля равна:

$$B = \int_l \frac{\mu\mu_0 IR}{4\pi(R^2 + h^2)^{3/2}} dl = \frac{\mu\mu_0 IR^2}{2(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2.18)$$

Обозначим через S площадь, охватываемую круговым витком с током:

$$S = \pi R^2,$$

тогда магнитная индукция в произвольной точке C оси кругового витка с током будет равна:

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2.19)$$

Произведение тока I , текущего в витке, на площадь S этого витка называется **магнитным моментом** P_m витка с током:

$$P_m = IS. \quad (2.20)$$

Магнитный момент представляет собой вектор, направленный вдоль оси витка с током в ту же сторону, что и вектор \vec{B} его магнитного поля.

Уравнение (2.19) в векторном виде в конечном итоге примет вид:

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{P}_m}{(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2.21)$$

Напряженность магнитного поля в точке C равна:

$$\vec{H} = \frac{\vec{P}_m}{2\pi(R^2 + h^2)^{3/2}}. \quad (2.22)$$

3. Магнитное поле соленоида.

Соленоид представляет собой цилиндрическую катушку, состоящую из большого числа плотно прилегающих витков проволоки. Соленоид в этом случае можно рассматривать как систему последовательно соединенных круговых токов одинакового радиуса, имеющих общую ось (рис. 2.5).

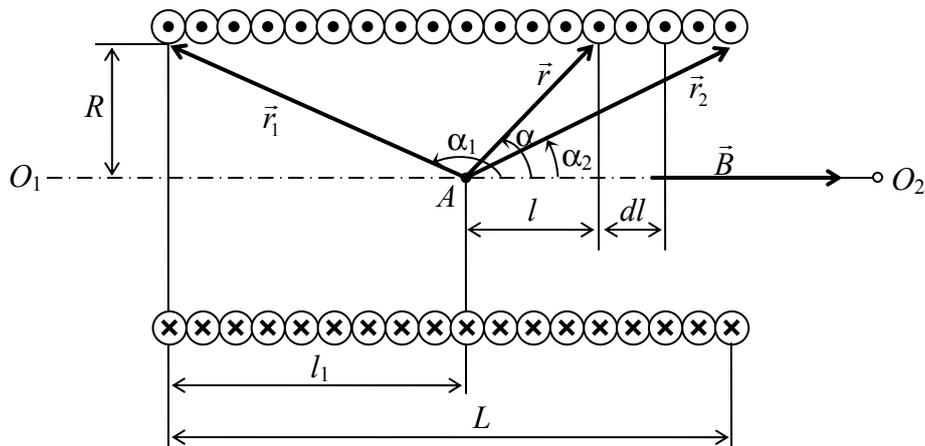


Рис. 2.5

На рис. 2.5 представлено сечение соленоида с током I . Пусть соленоид длиной L содержит общее число витков N , радиус витка равен R . Величина $n = \frac{N}{L}$ представляет собой число витков на единицу длины соленоида. Если $R \ll L$, то магнитное поле внутри соленоида однородно.

Магнитная индукция \vec{B} в любой точке A , лежащей на оси O_1O_2 соленоида, направлена вдоль оси и численно равна сумме индукций магнитных полей, создаваемых в этой точке всеми витками.

Проведем из точки A к какому-либо витку радиус-вектор \vec{r} , образующий с осью O_1O_2 угол α . Тогда данный виток с током I создает в точке A магнитное поле с индукцией B , равной (см. формулу (2.18)):

$$B = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}}.$$

На малый участок длины соленоида приходится ndl витков, создающих в точке A магнитное поле, индукция dB которого равна:

$$dB = \frac{\mu\mu_0}{2} \frac{IR^2}{(R^2 + l^2)^{3/2}} ndl. \quad (2.23)$$

Из рис. 2.5 видно, что $l = R \operatorname{ctg} \alpha$, тогда

$$dl = -R \frac{d\alpha}{\sin^2 \alpha}; \quad r = \sqrt{R^2 + l^2} = \frac{R}{\sin \alpha}.$$

Подставим в уравнение (2.23) приведенные выражения для dl и $(R^2 + l^2)^{3/2}$ с учетом dl и r и получим:

$$dB = -\frac{\mu\mu_0}{2} nI \sin \alpha d\alpha. \quad (2.24)$$

Искомая суммарная индукция B , создаваемая всеми витками соленоида, равна:

$$B = -\frac{\mu\mu_0}{2} nI \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin \alpha d\alpha, \quad (2.25)$$

где α_1 и α_2 – углы, которые образуют с осью соленоида радиусы-векторы \vec{r}_1 и \vec{r}_2 , проведенные к крайним виткам соленоида. Интегрирование соотношения (2.25) дает:

$$B = -\frac{\mu\mu_0}{2} nI (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (2.26)$$

Если $R \ll L$ (бесконечно длинный соленоид), то $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 = \pi$, и искомая индукция магнитного поля равна:

$$B = \mu\mu_0 nI. \quad (2.27)$$

Напряженность магнитного поля внутри бесконечно длинного соленоида равна:

$$H = nI. \quad (2.28)$$

2.2. Магнитное поле движущегося электрического заряда

Вокруг проводника с током I существует магнитное поле. Ток представляет собой направленное движение зарядов. Естественно, что и вокруг отдельно движущегося заряда существует магнитное поле. Закон Био – Савара – Лапласа позволяет найти выражение для индукции и напряженности магнитного поля, создаваемого движущимся электрическим зарядом.

Закон Био – Савара – Лапласа (2.2) можно переписать в виде:

$$\vec{dB} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} I \vec{dl} \times \vec{r}. \quad (2.29)$$

В свою очередь

$$I \vec{dl} = \vec{j} S dl = S d\vec{l}j, \quad (2.30)$$

где S – площадь поперечного сечения проводника; \vec{j} – вектор плотности тока. Вектор плотности тока

$$\vec{j} = qn_0\vec{v}, \quad (2.31)$$

где q – заряд частиц, упорядоченное движение которых со скоростью \vec{v} образует в проводнике ток I ; n_0 – число заряженных частиц в единице объема проводника. Необходимо отметить, что соотношение (2.31) справедливо для $q > 0$.

Таким образом, имеем:

$$I \vec{dl} = q S dln_0\vec{v}.$$

Произведение $S dln_0$ представляет собой число dn зарядов, находящихся в объеме участка проводника длиной dl .

Поэтому $I \vec{dl} = q\vec{v}dn$, и тогда

$$\overline{d\vec{B}} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi r^3} q dn \vec{v} \times \vec{r}. \quad (2.32)$$

Величина $\overline{d\vec{B}}$ в соотношении (2.32) определяется всеми dn зарядами q , движущимися со скоростью \vec{v} . Естественно, индукция \vec{B}_q магнитного поля, создаваемого отдельным зарядом, равна:

$$\vec{B}_q = \frac{\overline{d\vec{B}}}{dn} = \frac{\mu\mu_0 q}{4\pi r^3} \vec{v} \times \vec{r}. \quad (2.33)$$

Напряженность магнитного поля заряда q , движущегося со скоростью \vec{v} , равна:

$$\vec{H}_q = \frac{\vec{B}_q}{\mu\mu_0} = \frac{q}{4\pi r^3} \vec{v} \times \vec{r}. \quad (2.34)$$

Из приведенных соотношений (2.33) и (2.34) следует, что индукция \vec{B}_q и напряженность \vec{H}_q магнитного поля движущегося заряда в произвольной точке направлены перпендикулярно к плоскости, в которой лежат \vec{v} и \vec{r} , и определяются правилом векторного произведения указанных векторов. Сказанное иллюстрирует рис. 2.6.

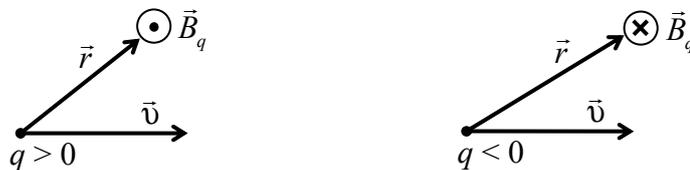


Рис. 2.6

Численное значение магнитной индукции поля движущегося заряда равно:

$$B_q = \frac{\mu\mu_0 q v}{4\pi r^2} \sin(\widehat{\vec{v} \vec{r}}). \quad (2.35)$$

2.3. Закон полного тока.

Магнитное поле тороида и соленоида

Критерием потенциальности любого поля является равенство нулю циркуляции вектора напряженности этого поля вдоль любого замкнутого контура. Так, для электростатического поля циркуляция вектора \vec{E} вдоль произвольного замкнутого контура L равна нулю:

$$\oint_L E dl \cos(\widehat{\vec{E} \vec{dl}}) = 0. \quad (2.36)$$

Рассмотрим данный вопрос для магнитного поля. Пусть магнитное поле создается бесконечно длинным проводником с током I . Контур L произвольной формы охватывает этот проводник (рис. 2.7). Тогда

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{dl} = \oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}). \quad (2.37)$$

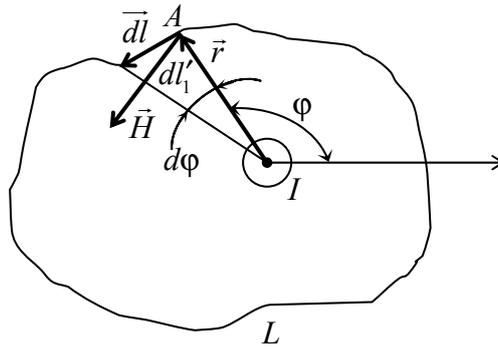


Рис. 2.7

В произвольной точке A контура L вектор напряженности \vec{H} магнитного поля этого тока направлен перпендикулярно к радиус-вектору \vec{r} . Из рис. 2.7 видно, что

$$H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = H dl_1,$$

где dl_1 – длина проекции вектора \vec{dl} на направление вектора \vec{H} .

Малый отрезок dl_1 касательной к окружности радиусом r можно заменить дугой окружности:

$$dl_1 = r d\varphi,$$

где $d\varphi$ – центральный угол, под которым виден элемент dl_1 контура L из центра окружности.

Подставляя полученные значения в соотношение (2.37) с учетом того, что $H = \frac{I}{2\pi r}$ для бесконечно длинного проводника с током I , получим:

$$H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = \frac{I}{2\pi} d\varphi. \quad (2.38)$$

Интегрируя вдоль всего замкнутого контура L и учитывая, что при этом угол φ изменяется от нуля до 2π , получим:

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} d\varphi = I. \quad (2.39)$$

Таким образом, циркуляция вектора напряженности магнитного поля прямолинейного проводника с током I по любому замкнутому контуру L равна силе тока, охватываемого этим контуром. Если замкнутый контур L охватывает проводники с токами I_1, I_2, \dots, I_n , то закон полного тока представляется в виде:

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = \sum_{k=1}^n I_k. \quad (2.40)$$

Величина $\sum_{k=1}^n I_k$ есть алгебраическая сумма токов, охватываемых контуром L . **Правило знаков для токов:** ток I_k в проводнике положительный, если напряженность H_k поля, создаваемого этим током, совпадает с направлением обхода по контуру L .

Уравнение (2.40) представляет собой математическое выражение **закона полного тока:** циркуляция вектора напряженности магнитного поля постоянного электрического тока вдоль замкнутого контура равна алгебраической сумме токов, охватываемых этим контуром.

Из полученного результата следует, что магнитное поле непотенциальное, вихревое.

Закон полного тока (2.40) часто используют для расчета магнитных полей постоянного электрического тока. Для примера рассмотрим применение закона полного тока для расчета магнитного поля тороида. **Тороидом** называется кольцевая катушка, витки которой намотаны на замкнутый сердечник, имеющий форму тора. На рис. 2.8 показано сечение тороида плоскостью, проходящей через его осевую линию.

Пусть R_1 и R_2 соответственно внешний и внутренний радиусы сечения тороида. Общее число витков с током I равно N . При определении циркуляции вектора напряженности магнитного поля по замкнутому контуру выберем контур в виде окружности соответствующего радиуса r с центром, совпадающим с центром тороида. Поэтому циркуляция вектора \vec{H} вдоль окружности радиуса r равна:

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = H \int_0^{2\pi} dl = 2\pi r H. \quad (2.41)$$

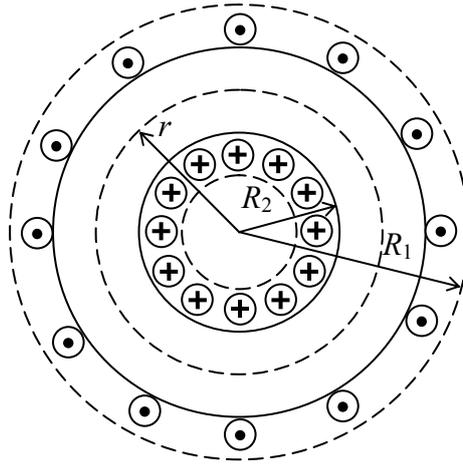


Рис. 2.8

Если $r < R_2$, то контур не охватывает проводники с током, $\sum_{i=1}^N I_k = 0$, и по закону полного тока

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = 2\pi r H = 0,$$

т. е. $H = 0$.

Если $r > R_1$, то контур охватывает $2N$ проводников с током I . Однако в N из них ток I идет в одном направлении, а в остальных N проводниках – в обратном направлении (см. рис. 2.8). Поэтому алгебраическая сумма токов во всех проводниках равна нулю, и, следовательно,

$$2\pi r H = 0, \text{ или } H = 0.$$

Из полученного результата следует, что вне тороида магнитное поле отсутствует. Оно целиком локализовано внутри объема тороида ($R_2 \leq r \leq R_1$). В этом случае контур радиуса r охватывает N проводников, токи в которых равны I и одинаково направлены. Поэтому

$$\oint_L H dl \cos(\widehat{\vec{H} \vec{dl}}) = \sum_{k=1}^N I_k = NI. \quad (2.42)$$

Из соотношений (2.41) и (2.42) следует, что напряженность магнитного поля внутри тороида равна:

$$H = \frac{NI}{2\pi r}, \quad R_2 \leq r \leq R_1. \quad (2.43)$$

Напряженность магнитного поля на осевой линии тороида равна:

$$H_{\text{ср}} = \frac{NI}{2\pi R_{\text{ср}}} = nI,$$

где n – число витков на единицу длины средней линии тороида.

Индукция магнитного поля внутри тороида численно равна:

$$B = \mu\mu_0 H = \mu\mu_0 \frac{NI}{2\pi r}. \quad (2.44)$$

Если неограниченно увеличивать средний радиус тороида, то неоднородность поля внутри тороида будет уменьшаться. В пределе вместо тороида получим бесконечно длинный соленоид, напряженность магнитного поля внутри которого равна:

$$H = nI.$$

2.4. Магнитное взаимодействие проводников с током

Пусть по двум параллельным проводникам, расположенным друг от друга на расстоянии a , текут токи I_1 и I_2 (рис. 2.9).

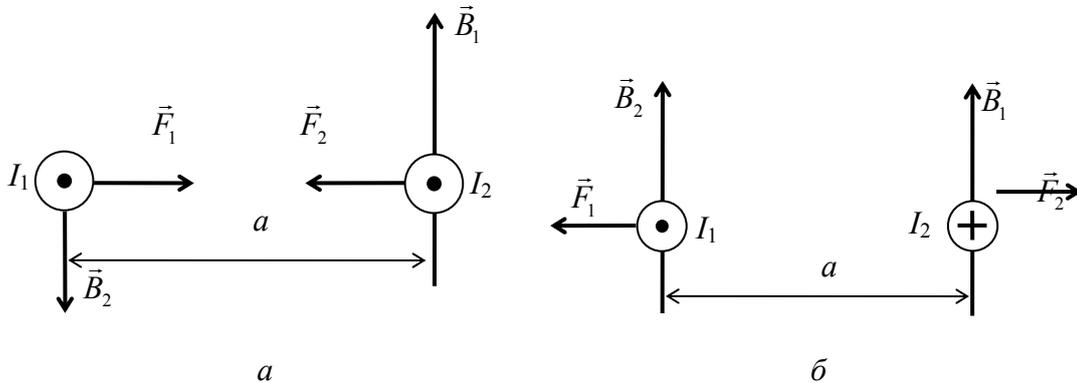


Рис. 2.9

Каждый из проводников с током создает магнитное поле, которое действует по закону Ампера на другой проводник с током. Согласно этому закону, на элемент dl первого проводника с током I_1 действует сила dF_1 , численно равная:

$$dF_1 = I_1 B_2 dl \sin(\widehat{dl \vec{B}_2}),$$

где B_2 – индукция магнитного поля, создаваемого током I_2 .

Если длина каждого из проводников во много раз больше расстояния a между ними, то при определении B_2 второй проводник можно считать бесконечно длинным. Тогда величина B_2 равна:

$$B_2 = \frac{\mu\mu_0 I_2}{2\pi a}.$$

Вектор \vec{B}_2 перпендикулярен к элементу \vec{dl} первого проводника, так что $\sin(\widehat{\vec{dl} \vec{B}_2}) = 1$. Поэтому в конечном итоге

$$dF_1 = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl.$$

Аналогичные выкладки показывают, что на участок dl второго проводника действует сила \vec{dF}_2 , которая направлена в сторону, противоположную силе \vec{dF}_1 , и численно равна ей:

$$dF_2 = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl.$$

В общем случае для dF_1 и dF_2 можно записать:

$$dF = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} dl.$$

Для нахождения численного значения вектора силы \vec{F} , действующей на проводник конечной длины l , интегрируют конечное равенство по l от 0 до l :

$$F = \frac{\mu\mu_0 I_1 I_2}{2\pi a} l.$$

Направление силы взаимодействия двух параллельных проводников с током определяется по правилу левой руки. Оказывается, что если токи в обоих проводниках имеют одинаковое направление (рис. 2.9, а), то проводники притягиваются друг к другу, а если направления токов взаимно противоположны (рис. 2.9, б), то проводники отталкиваются друг от друга.

За единицу силы тока в системе СИ принимается ампер (А) – сила такого постоянного тока, при прохождении которого по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины, находящимся в вакууме на расстоянии 1 м друг от друга, сила электромагнитного взаимодействия между проводниками равна $2 \cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

На основании определения ампера и формулы для нахождения силы взаимодействия F можно получить численное значение магнитной постоянной μ_0 :

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{F \cdot 2\pi a}{I^2 l} = \frac{2 \cdot 10^{-7} \cdot 2\pi}{1 \cdot 1} = \\ &= 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}} = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}.\end{aligned}$$

Введение μ_0 в системе СИ связано с тем, что большинство уравнений теории магнетизма принимает рациональную запись.

3. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНТУР С ТОКОМ

3.1. Контур с током в магнитном поле. Момент сил, действующий на контур

Как известно, на проводники с током в магнитном поле действует сила Ампера. Большой интерес представляет действие магнитного поля на замкнутые проводники (контур) с током, т. к. на этом явлении основана работа электрических двигателей.

Опыт показывает, что свободно подвешенная рамка с током в магнитном поле устанавливается таким образом, что ее плоскость перпендикулярна к вектору \vec{B} магнитной индукции поля. В общем случае (при различных направлениях тока в рамке и различных направлениях вектора \vec{B}) рамка с током всегда устанавливается во внешнем однородном магнитном поле в таком положении, при котором магнитный момент \vec{P}_m рамки совпадает с направлением вектора \vec{B} магнитной индукции поля. Отметим, что из конца вектора \vec{B} ток в рамке виден идущим *против часовой стрелки*. Сказанное выше позволяет определять направление вектора \vec{B} индукции магнитного поля не только при помощи магнитной стрелки, но и при помощи контура с током.

Пусть контур представляет собой прямоугольную рамку 1–2–3–4 с током I , помещенную в магнитное поле индукцией \vec{B} (рис. 3.1).

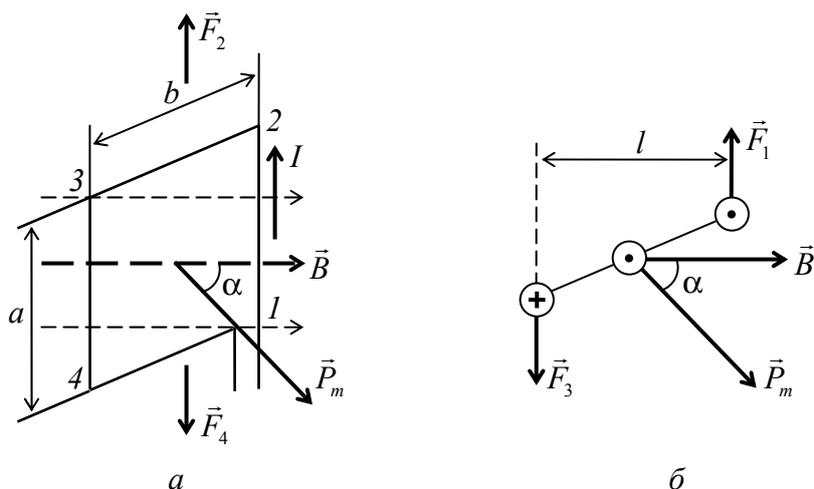


Рис. 3.1

Будем считать, что стороны 2–3 и 4–1 лежат в плоскостях, параллельных вектору \vec{B} индукции внешнего магнитного поля, а стороны 1–2 и 3–4 перпендикулярны к вектору \vec{B} .

Силы \vec{F}_1 и \vec{F}_3 , действующие на прямолинейные проводники 1–2 и 3–4, по закону Ампера численно равны:

$$F_1 = F_3 = IaB. \quad (3.1)$$

На рис. 3.1, б показан вид рамки сверху. Силы \vec{F}_2 и \vec{F}_4 , приложенные к проводникам 2–3 и 4–1, численно равны:

$$F_2 = F_4 = IbB \sin(90 - \alpha) = IbB \cos \alpha \quad (3.2)$$

и направлены вдоль вертикальной оси рамки в противоположные стороны. Поэтому эти силы уравнивают друг друга. Результирующий вращающий момент M , действующий на рамку, равен моменту пары сил \vec{F}_1 и $\vec{F}_3 = -\vec{F}_1$:

$$M = F_1 l,$$

где $l = b \sin \alpha$.

Учитывая соотношение (3.1), получим:

$$M = IabB \sin \alpha. \quad (3.3)$$

Поскольку $S = ab$ – площадь рамки; $P_m = IS$ – численное значение вектора магнитного момента рамки с током; α – угол между векторами \vec{P}_m и \vec{B} , то соотношение (3.3) можно переписать в виде:

$$M = P_m B \sin \alpha = P_m B \sin(\widehat{\vec{P}_m \vec{B}}). \quad (3.4)$$

В векторном виде соотношение (3.4) имеет вид:

$$\vec{M} = \vec{P}_m \times \vec{B}. \quad (3.5)$$

Из соотношения (3.4) следует, что вращающий момент \vec{M} равен нулю и контур находится в равновесии, если магнитный момент контура параллелен или антипараллелен направлению индукции \vec{B} внешнего магнитного поля. При этом полный магнитный поток Φ_m сквозь поверхность S контура, создаваемый внешним магнитным полем \vec{B} и собственным магнитным полем B' тока, в контуре максимален, когда векторы \vec{P}_m и \vec{B} параллельны, и имеет минимальную величину, когда эти векторы антипараллельны.

3.2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля

Если магнитное поле однородно ($\vec{B} = \text{const}$), а поверхность S плоская, то поток вектора \vec{B} через данную поверхность равен:

$$\Phi_m = BS \cos \alpha = B_n S = BS_n, \quad (3.6)$$

где B_n – проекция вектора индукции магнитного поля на нормаль \vec{n} к поверхности S ; S_n – проекция площади S на плоскость, перпендикулярную к индукции \vec{B} магнитного поля.

Если магнитное поле неоднородно ($\vec{B} \neq \text{const}$), а поверхность имеет произвольную форму, то для определения магнитного потока в этом случае поверхность S необходимо разбить на элементарные поверхности dS так, чтобы магнитное поле в этой области было однородным, а поверхность dS можно было считать плоской. Тогда магнитный момент через элементарную поверхность равен:

$$d\Phi_m = B_n dS = BdS \cos(\widehat{\vec{B} \vec{n}}). \quad (3.7)$$

Интегрируя выражение (3.7) по S , получим:

$$\Phi_m = \int_S B_n dS, \quad (3.8)$$

где Φ_m – магнитный поток сквозь произвольную поверхность S .

Магнитный поток является одной из основных величин, применяемых в электромагнетизме. В частности, магнитный поток играет важную роль при описании взаимодействия между магнитными полями и проводниками с током, а также при объяснении явления электромагнитной индукции.

За единицу магнитного потока принимается магнитный поток сквозь плоскую поверхность единичной площади, расположенную перпендикулярно к вектору \vec{B} единичной величины (1 Тл).

В системе СИ единица магнитного потока называется вебером (Вб):

$$1 \text{ Вб} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} \cdot 1 \text{ м}^2 = 1 \text{ В} \cdot \text{с}.$$

Докажем теорему Гаусса для магнитных полей для простого случая (полученный результат остается справедливым и в общем случае). Пусть магнитное поле создается бесконечно длинным проводником с током I . Замкнутую поверхность S выберем в виде прямого кругово-

го цилиндра радиусом r и высотой h , ось которого совпадает с осью проводника (рис. 3.2).

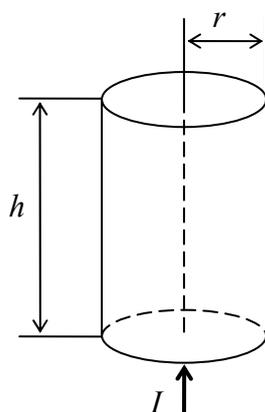


Рис. 3.2

Линии индукции магнитного поля прямолинейного тока представляют собой concentric окружности, центры которых лежат на оси проводника, а плоскости перпендикулярны к нему. Поэтому линии индукции не пересекают ни боковую поверхность цилиндра, ни его основания, и проекция вектора \vec{B} на направление нормали \vec{n} к поверхности равна нулю ($B_n = 0$), а значит,

$$\int_S B_n dS = 0. \quad (3.9)$$

Соотношение (3.9) представляет собой теорему Гаусса для магнитных полей. Из этой теоремы следует, что линии индукции магнитного поля представляют собой *замкнутые* кривые.

3.3. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле

На проводник с током в магнитном поле действует сила Ампера. Если проводник не закреплен, то под действием сил Ампера он будет перемещаться в магнитном поле, и при этом будет совершаться работа.

Вычислим работу dA , совершаемую силами Ампера при перемещении элемента dl проводника с током I в магнитном поле. Будем считать, что элемент проводника перемещается в направлении действующей на него силы \vec{dF} (рис. 3.3). Тогда

$$dA = dF dx. \quad (3.10)$$

По закону Ампера:

$$dF = IBdl \sin(\widehat{dl \vec{B}}) = IBdl \sin \alpha.$$

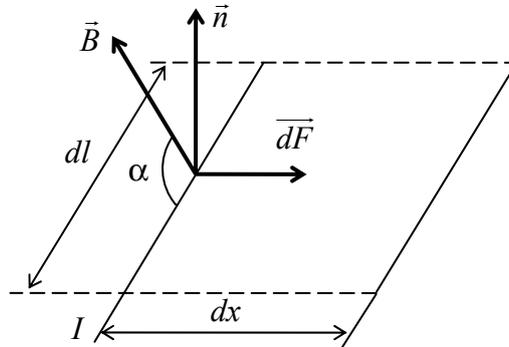


Рис. 3.3

Подставляя это выражение в формулу (3.10), получим:

$$dA = IB \sin \alpha dl dx. \quad (3.11)$$

Сила $d\vec{F}$ и перемещение $d\vec{x}$ направлены перпендикулярно к элементу проводника $d\vec{l}$. Поэтому $dl dx = dS$ представляет собой площадь поверхности, описанной элементом проводника dl при его перемещении на расстояние dx .

Из рис. 3.3 видно, что

$$B \sin \alpha = B_n,$$

где B_n – проекция вектора \vec{B} на нормаль \vec{n} к площадке dS . Величина $B_n dS$ представляет собой поток $d\Phi_m$ сквозь поверхность dS .

С учетом соотношения (3.11) искомая элементарная работа dA равна:

$$dA = Id\Phi_m. \quad (3.12)$$

Если сила тока I в проводнике постоянна, то после интегрирования выражения (3.12) имеем:

$$A = I\Phi_m. \quad (3.13)$$

Работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле проводника с постоянным током, равна произведению силы тока на величину магнитного потока сквозь поверхность, которую описывает проводник при своем движении.

Определим величину работы, совершаемой силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с током I

(рис. 3.4). Пусть при бесконечно малом перемещении контур C занял положение C' . Для расчета искомой работы разобьем контур C на два участка: AMD и DNA . При этом полная работа dA , совершаемая силами Ампера при перемещении контура, равна алгебраической сумме работ перемещения проводников AMD (dA_1) и DNA (dA_2), т. е.

$$dA = dA_1 + dA_2. \quad (3.14)$$

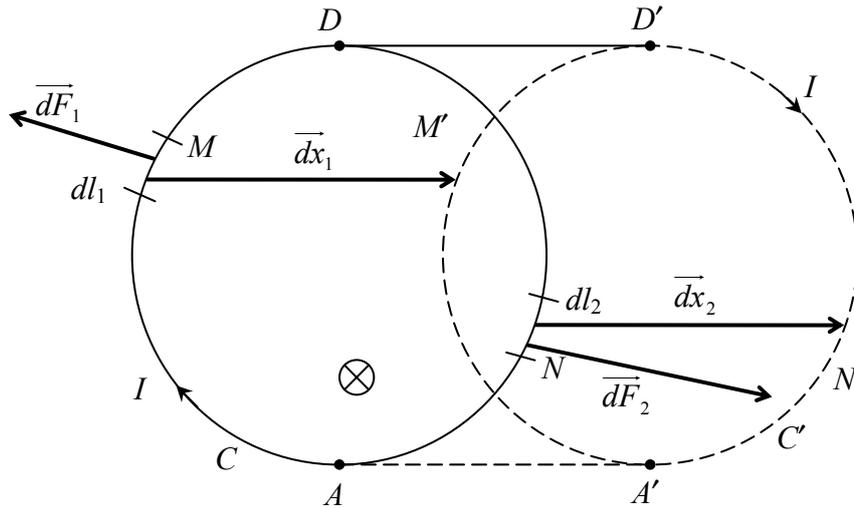


Рис. 3.4

Пусть вектор \vec{B} магнитной индукции направлен «от нас» перпендикулярно к плоскости чертежа. В этом случае сила Ампера \vec{dF}_2 , действующая на элемент dl_2 проводника DNA , образует острый угол с направлением его перемещения \vec{dx}_2 и совершает положительную работу, т. е. $dA_2 > 0$. В то же время сила \vec{dF}_1 , действующая на элемент dl_1 проводника AMD , образует тупой угол с направлением его перемещения \vec{dx}_1 и совершает отрицательную работу, т. е. $dA_1 < 0$. Поэтому полная работа равна (см. формулу (3.13)):

$$dA = dA_1 + dA_2 = -Id\Phi_{m1} + Id\Phi_{m2} = I(d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1}),$$

где $d\Phi_{m1}$ – магнитный поток сквозь поверхность $AMDD'M'A'$; $d\Phi_{m2}$ – магнитный поток сквозь поверхность $ANDD'N'A'$.

Из рис. 3.4 видно, что

$$d\Phi_{m2} - d\Phi_{m1} = d\Phi_m,$$

где $d\Phi_m$ – изменение магнитного потока, пронизывающего поверхность, ограниченную контуром, при перемещении его из положения C в положение C' . Окончательное выражение для элементарной работы dA равно:

$$dA = Id\Phi_m. \quad (3.15)$$

Интегрируя последнее равенство, получим:

$$A = I\Delta\Phi_m. \quad (3.16)$$

Таким образом, *работа, совершаемая силами Ампера при перемещении в магнитном поле замкнутого контура с постоянным током, равна произведению силы тока на изменение магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром.*

4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

4.1. Источники магнетизма атомов (молекул).

Орбитальный магнитный момент атомов

Как известно, при описании электрических свойств вещества использовалось понятие дипольных моментов атомов или молекул этого вещества. Диэлектрик, помещенный во внешнее электрическое поле, поляризуется, и в нем возникает внутреннее электрическое поле. Вещество, помещенное во внешнее магнитное поле, намагничивается, в результате чего возникает внутреннее магнитное поле. Важной характеристикой при описании магнитных свойств является *орбитальный магнитный момент* атомов или молекул вещества.

Согласно представлениям классической физики, в изолированном атоме электроны движутся по некоторым замкнутым орбитам и тем самым создают орбитальный ток. При этом контур орбитального тока охватывает некоторую поверхность S . Магнитный момент \vec{P}_m , обусловленный движением электрона по орбите, называется **орбитальным магнитным моментом электрона**. Рассмотрим простой случай, когда электрон в атоме движется по круговой орбите радиусом r (рис. 4.1).

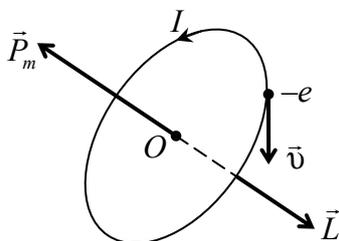


Рис. 4.1

По определению магнитный момент P_m равен:

$$P_m = IS,$$

где S – площадь, ограниченная орбитой электрона.

Направление вектора \vec{P}_m совпадает с направлением напряженности магнитного поля кругового тока I . Величина орбитального тока равна:

$$I = ev,$$

где e – абсолютная величина заряда электрона; v – частота обращения электрона по орбите. Частота обращения электрона равна:

$$v = \frac{v}{2\pi r},$$

где v – скорость электрона. Тогда P_m равен:

$$P_m = \frac{e\upsilon r}{2}. \quad (4.1)$$

Электрон, равномерно вращающийся по орбите, обладает механическим (орбитальным) моментом импульса:

$$L_e = m\upsilon r, \quad (4.2)$$

где m – масса электрона.

Из приведенных соотношений (4.1) и (4.2) можно получить:

$$\frac{P_m}{L_e} = \frac{e}{2m}. \quad (4.3)$$

Из формулы (4.3) следует, что отношение численного значения орбитального магнитного момента электрона к численному значению его орбитального момента импульса не зависит от скорости электрона на орбите и от радиуса орбиты. Направление вектора \vec{P}_m , как известно, совпадает с направлением индукции \vec{B} магнитного поля, создаваемого током. Направление вектора момента импульса \vec{L}_e электрона определяется векторным произведением $\vec{L}_e = \vec{r} \times m\vec{v}$. В рассматриваемом случае векторы \vec{P}_m и \vec{L}_e направлены в противоположные стороны. Поэтому их связь определяется соотношением:

$$\vec{P}_m = -\frac{e}{2m}\vec{L}_e = -g\vec{L}_e, \quad (4.4)$$

где $g = \frac{e}{2m}$ – *гиромагнитное отношение*.

Вектором орбитального магнитного момента атома \vec{P}_{ma} называется векторная сумма орбитальных моментов всех его электронов:

$$\vec{P}_{ma} = \sum_{i=1}^Z \vec{P}_{mi}. \quad (4.5)$$

Аналогично для *орбитального момента импульса атома* имеем:

$$\vec{L}_a = \sum_{i=1}^Z \vec{L}_{ei}. \quad (4.6)$$

Приведенные выше соотношения дают связь между моментами \vec{P}_{ma} и \vec{L}_a атомов в виде:

$$\vec{P}_{ma} = -\frac{e}{2m} \vec{L}_a = -g \vec{L}_a. \quad (4.7)$$

Опыты по определению гиромагнитного отношения для железного стержня, проведенные А. Эйнштейном и А. де Гаазом, показали, что гиромагнитное отношение g_s в два раза больше, чем это следует из вышерассмотренного материала, т. е. равно:

$$g_s = \frac{e}{m}. \quad (4.8)$$

Объяснение полученного результата потребовало предположить, что электрон, помимо орбитальных моментов \vec{L}_e и \vec{P}_m , обладает еще механическим моментом \vec{L}_{es} , названным **спином электрона**, и соответствующим ему собственным магнитным моментом \vec{P}_{ms} , равным:

$$\vec{P}_{ms} = -g_s \vec{L}_{es}. \quad (4.9)$$

Необходимо иметь в виду, что электрону присущи некоторые собственные механический и магнитный моменты, подобно тому как ему присущи заряд e и масса m . Спин является неотъемлемым свойством электрона и определяет многие важные закономерности физики. В частности, спином электронов объясняются магнитные свойства ферромагнетиков.

В настоящее время доказано, что абсолютная величина L_{es} спина электрона равна:

$$L_{es} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{h}{2\pi}, \quad (4.10)$$

где $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с – постоянная Планка.

Абсолютная величина спинового магнитного момента электрона равна:

$$P_{ms} = \sqrt{3} \frac{he}{4\pi m}. \quad (4.11)$$

Величина $\mu_B = \frac{he}{4\pi m} = 0,927 \cdot 10^{-23}$ Дж/Тл называется **магнетоном**

Бора.

Особенность спина электрона заключается в том, что в магнитном поле спин может быть ориентирован только двумя способами: его проекция на направление вектора напряженности \vec{H} магнитного поля может быть равна либо $+\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$, либо $-\frac{1}{2} \frac{h}{2\pi}$. Соответственно, проекции спиновых магнитных моментов равны $-\mu_B$ и $+\mu_B$.

Необходимо отметить, что в магнитные моменты атомов вносят вклад магнитные моменты их ядер (нейтронов и протонов). Однако их величины примерно в две тысячи раз меньше магнитных моментов электронов, и в первом приближении магнитными моментами атомных ядер можно пренебречь по сравнению с магнитными моментами электронов, входящих в атом.

4.2. Атом в магнитном поле. Ларморова прецессия

Рассмотрим влияние магнитного поля на движение электронов в атомах. В силу малых размеров атомов будем считать, что магнитное поле однородно. Кроме того, будем считать, что электрон в атоме движется по круговой орбите, плоскость которой перпендикулярна к вектору напряженности \vec{H} внешнего магнитного поля (рис. 4.2). В отсутствие внешнего магнитного поля на электрон действует кулоновская сила F_e , которая играет роль центростремительной силы:

$$F_e = m\omega_0^2 r,$$

где ω_0 – угловая скорость вращения электрона по орбите.

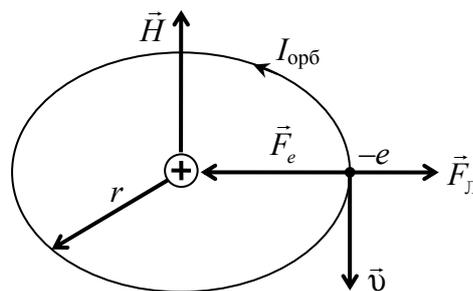


Рис. 4.2

На электрон в магнитном поле кроме силы F_e действует сила Лоренца F_L , которая в рассматриваемом случае направлена в сторону, противоположную силе F_e . Центростремительная сила в этом случае

численно равна $F_e - F_{\text{л}}$, что приводит к изменению угловой скорости вращения электрона по орбите.

Внесение атома в магнитное поле или включение магнитного поля, действующего на электрон, происходит в течение некоторого промежутка времени. В результате возникает индукционное вихревое электрическое поле. Электродвижущая сила, которая наводится в этом случае, равна:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS) = -\frac{d}{dt}(\pi r^2 \mu_0 H) = -\pi r^2 \mu_0 \frac{dH}{dt}. \quad (4.12)$$

Индукционное электрическое поле действует на электрон с силой F , численно равной:

$$F = eE = e \frac{\mathcal{E}_i}{2\pi r} \quad (4.13)$$

и направленной по касательной к орбите электрона в сторону, противоположную направлению движения. Величина этой силы (с учетом формул (4.12) и (4.13)) равна:

$$F = -\frac{er\mu_0}{2} \frac{dH}{dt}. \quad (4.14)$$

Изменение численного значения импульса электрона равно импульсу силы, или:

$$\Delta(mv) = \int_0^t F dt = -\frac{er\mu_0}{2} \int_0^H dH = \frac{er\mu_0}{2} H. \quad (4.15)$$

Используя связь между линейной и угловой скоростями, получим величину изменения угловой скорости электрона при внесении в магнитное поле напряженностью H :

$$\Delta\omega = -\frac{\mu_0 eH}{2m}. \quad (4.16)$$

Выражение (4.16) представляет собой частный случай *теоремы Лармора*.

В общем случае, когда орбита электрона расположена произвольным образом относительно \vec{H} и орбитальный магнитный момент электрона \vec{P}_m составляет с направлением \vec{H} угол α , вся орбита приходит в такое движение вокруг \vec{H} , при котором вектор \vec{P}_m сохраняет неизменным угол α и вращается вокруг направления \vec{H} с угловой скоростью ω_L , равной:

$$\omega_L = \mu_0 \frac{eH}{2m}. \quad (4.17)$$

Такое движение называется **прецессионным**.

Изменение угловой скорости вращения электрона или появление прецессии приводит к изменению орбитального тока на величину $\Delta I_{\text{орб}}$, равную:

$$\Delta I_{\text{орб}} = e \frac{\omega_L}{2\pi} = \frac{e^2 \mu_0 H}{4\pi m}. \quad (4.18)$$

Ток $\Delta I_{\text{орб}}$ обуславливает *наведенный орбитальный момент электрона* $\Delta \vec{P}_m$, численно равный:

$$\Delta \vec{P}_m = \Delta I_{\text{орб}} S_{\perp} = \frac{e^2 \mu_0 S_{\perp}}{4\pi m} H, \quad (4.19)$$

где S_{\perp} – площадь проекции орбиты электрона на плоскость, перпендикулярную к вектору \vec{H} . Направление вектора наведенного орбитального магнитного момента $\Delta \vec{P}_m$ противоположно направлению вектора напряженности \vec{H} , поэтому

$$\Delta \vec{P}_m = -\frac{e^2 \mu_0 S_{\perp}}{4\pi m} \vec{H}. \quad (4.20)$$

Общий наведенный орбитальный момент атома $\Delta \vec{P}_{ma}$ равен векторной сумме наведенных орбитальных моментов всех электронов атома:

$$\Delta \vec{P}_{ma} = -\frac{e^2 \mu_0 \vec{H}}{4\pi m} \sum_{i=1}^Z S_{\perp i},$$

или

$$\Delta \vec{P}_m = -\frac{e^2 Z \bar{S}_{\perp} \mu_0}{4\pi m} \vec{H}, \quad (4.21)$$

где $\bar{S}_{\perp} = \frac{\sum_{i=1}^Z S_{\perp i}}{Z}$ – средняя величина площади проекции орбит электронов в атоме на плоскость, перпендикулярную к направлению вектора напряженности \vec{H} внешнего магнитного поля.

4.3. Типы магнетиков. Магнитная восприимчивость

Как было показано выше, магнитный момент атома или молекулы (см. формулу (4.5)) равен векторной сумме магнитных моментов электронов данного атома или молекулы. При этом возможны два случая: магнитный момент атомов или молекул вещества в отсутствие внешнего магнитного поля равен нулю или отличен от нуля. В первом случае вещества называются **диамагнетиками**, во втором – **парамагнетиками**. К диамагнетикам относятся инертные газы, большинство органических соединений и многие металлы.

При внесении диамагнитного вещества во внешнее магнитное поле в каждом его атоме наводится магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$, направленный противоположно вектору \vec{H} напряженности внешнего магнитного поля. При этом происходит намагничивание вещества.

Для характеристики намагничивания вещества вводится физическая величина, называемая **интенсивностью намагничивания**.

Вектор интенсивности намагничивания \vec{J} представляет собой предел отношения магнитного момента некоторого объема вещества к этому объему, когда последний стремится к нулю:

$$\vec{J} = \lim_{V \rightarrow 0} \left(\frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \Delta\vec{P}_{mi} \right), \quad (4.22)$$

где n – число частиц в объеме V вещества; $\Delta\vec{P}_{mi}$ – магнитный момент i -й частицы. По физическому смыслу вектор \vec{J} представляет собой магнитный момент единицы объема.

При внесении однородного диамагнетика в однородное магнитное поле наведенные орбитальные моменты $\Delta\vec{P}_{mi}$ всех частиц одинаковы по величине и направлены в сторону, противоположную вектору \vec{H} напряженности внешнего магнитного поля. Поэтому, согласно соотношениям (4.22) и (4.21), вектор интенсивности намагничивания равен:

$$\vec{J} = \frac{n\Delta\vec{P}_m}{V} = n_0\Delta\vec{P}_m = -\frac{n_0e^2Z\bar{S}_\perp\mu_0}{4\pi m} \vec{H}. \quad (4.23)$$

Величина $\chi_m = -\frac{n_0e^2Z\bar{S}_\perp\mu_0}{4\pi m}$ называется **магнитной восприимчивостью** вещества и характеризует его магнитные свойства.

Абсолютная величина магнитной восприимчивости диамагнетиков мала и составляет порядка 10^{-6} .

Если векторная сумма орбитальных магнитных моментов всех электронов атомов или молекул не равна нулю, то частица обладает магнитным моментом \vec{P}_m . Такие атомы называются **парамагнитными**, а вещества, состоящие из них, – **парамагнетиками**. К парамагнетикам относятся: кислород, окись азота, алюминий, платина, некоторые редкоземельные элементы, щелочные и щелочноземельные металлы и другие вещества.

При внесении парамагнетика в однородное магнитное поле напряженностью \vec{H} все магнитные моменты электронов данного атома прецессируют вокруг направления \vec{H} с угловой скоростью ω_L (с такой же скоростью прецессирует и магнитный момент атома).

Тепловое движение частиц парамагнетика вызывает затухание прецессии магнитных моментов атомов. Поэтому в парамагнитном веществе появляется собственное магнитное поле, направленное в ту же сторону, что и внешнее магнитное поле.

Классическая теория парамагнетизма была разработана П. Ланжевром. Согласно этой теории, ориентирующее действие магнитного поля на атом зависит от магнитного момента атома \vec{P}_{ma} и от индукции магнитного поля $\mu_0 \vec{H}$. Дезориентирующее действие оказывает тепловое хаотическое движение, определяемое величиной kT , пропорциональной средней тепловой энергии одной частицы (k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура). Результирующее действие двух противоположных факторов зависит от величины a , равной:

$$a = \frac{P_{ma} \mu_0 H}{kT}.$$

Зависимость интенсивности намагничивания парамагнетика от параметра a равна:

$$J = f(a) = n_0 P_m L(a), \quad (4.24)$$

где $L(a)$ – функция Ланжевена. Для комнатных температур и несильных внешних магнитных полей (реальные условия) функция Ланжевена равна:

$$L(a) \approx \frac{a}{3}.$$

С учетом вышесказанного, интенсивность намагничивания парамагнетиков равна:

$$\vec{J} = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT} \vec{H}. \quad (4.25)$$

Магнитная восприимчивость парамагнитного вещества равна:

$$\chi_m = \frac{n_0 P_m^2 \mu_0}{3kT}. \quad (4.26)$$

Магнитная восприимчивость парамагнетиков $\chi_m > 0$, и ее значения при обычных температурах лежат в пределах 10^{-5} – 10^{-3} .

Намагничивание парамагнетика происходит в направлении, совпадающем с направлением вектора \vec{H} напряженности внешнего магнитного поля. При внесении парамагнитного стержня в магнитное поле, созданное между полюсами электромагнита, он устанавливается вдоль линий напряженности этого поля.

Из рассмотренного материала следует, что магнитная восприимчивость χ_m диамагнитных и парамагнитных веществ не зависит от величины напряженности магнитного поля, в которое эти вещества помещены, и является магнитной характеристикой самого вещества.

4.4. Диамагнетики. Диамагнитный эффект

Диамагнетизм обнаруживают только те вещества, у которых атомы (молекулы) при отсутствии внешнего магнитного поля не обладают магнитным моментом (векторная сумма орбитальных и спиновых магнитных моментов атомов равна нулю). Типичными диамагнетиками являются инертные газы, многие металлы (висмут, цинк, золото, серебро, медь, ртуть), смолы, вода, стекло, мрамор.

При внесении диамагнитного вещества во внешнее магнитное поле в каждом его атоме наводится (индуцируется) магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$, направленный противоположно вектору \vec{B} индукции поля. Поэтому в макроскопическом теле индукционный (или поляризационный) магнитный эффект приводит к появлению результирующего магнитного момента, направленного против вызвавшего его внешнего поля. Этот поляризационный макроэффект называют **диамагнетизмом** (от греч. «*диа*» – поперек). Диамагнетизм – это *универсальный* магнитный эффект, присущий всем без исключения магнетикам. Его универсальность состоит в том, что под действием внешнего магнитного поля происходит ларморова прецессия электронных орбит атомов любого вещества. Однако в тех случаях, когда атомы (молекулы) сами по себе обладают магнитным моментом, внешнее магнитное поле не только

индуцирует магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$ в каждом атоме, но и оказывает ориентирующее действие на собственные магнитные моменты атомов, выстраивая их по направлению поля. Возникающий при этом положительный (т. е. направленный по полю) магнитный момент бывает значительно больше, чем отрицательный индуцированный момент. Поэтому результирующий момент оказывается положительным, и вещество ведет себя как парамагнетик.

В пределах малого объема ΔV изотропного диамагнетика наведенные магнитные моменты $\Delta\vec{P}_m$ всех молекул одинаковы и направлены в стороны, противоположные вектору \vec{B} . Поэтому вектор намагниченности $\vec{J} = \frac{N\Delta\vec{P}_m}{\Delta V} = n\Delta\vec{P}_m$ ($n = \frac{N}{\Delta V}$ – число молекул в единице объема магнетика). С учетом выражения для $\Delta\vec{P}_m$ (см. формулу (4.21)) будем иметь:

$$\vec{J} = -\frac{ne^2 Z \bar{S}_\perp}{4\pi m} \vec{B}. \quad (4.27)$$

Обозначив через χ_{gm} величину:

$$\chi_{gm} = -\frac{ne^2 Z \bar{S}_\perp}{4\pi m} \mu_0, \quad (4.28)$$

получим:

$$\vec{J} = \chi_{gm} \frac{\vec{B}}{\mu_0}, \quad (4.29)$$

где χ_{gm} – безразмерная величина, характеризующая магнитные свойства диамагнетиков и называемая **диамагнитной восприимчивостью**.

Величина χ_{gm} для диамагнетиков отрицательна и лежит в пределах от 10^{-8} до 10^{-4} . В неоднородном магнитном поле диамагнетик (например, стержень из висмута) выталкивается в область более слабого поля и устанавливается так, чтобы его ось была перпендикулярна к вектору \vec{B} .

4.5. Парамагнетизм

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты атомов парамагнетика вследствие теплового движения ориентированы совершенно беспорядочно. Поэтому магнитный момент тела, равный векторной сумме моментов отдельных атомов, близок к ну-

лю, а следовательно, тело не намагничено. При внесении парамагнетика во внешнее магнитное поле устанавливается *преимущественная* ориентация магнитных моментов атомов по направлению вектора индукции \vec{B} . Этот эффект ориентационного намагничивания называется **парамагнетизмом** (от греч. «*пара*» – вдоль). Тепловое движение атомов (молекул) и происходящие при этом непрерывные столкновения между ними, с одной стороны, необходимы для проявления парамагнетизма, а с другой стороны, препятствуют установлению полного магнитного порядка в парамагнетике из-за своего хаотического характера.

Пусть \bar{P}_{mH} есть среднее значение проекции магнитного момента атома \vec{P}_m на направление внешнего магнитного поля. Тогда в случае слабой ориентировки ($P_m \mu_0 H \ll kT$) магнитных моментов атомов справедлива формула:

$$\bar{P}_{mH} = \frac{P_m^2}{3kT} B,$$

где k – постоянная Больцмана; T – абсолютная температура; B – индукция внешнего поля.

Если n – число атомов (молекул) в единице объема, то магнитный момент единицы объема (намагниченность)

$$J = n\bar{P}_{mH} = \frac{nP_m^2}{3kT} B = \chi_{nm} \frac{B}{\mu_0}. \quad (4.30)$$

Коэффициент «3» в знаменателе отражает хаотичность распределения магнитных моментов атомов в объеме тела. Величина χ_{nm} – *удельная восприимчивость* парамагнетиков – определяется выражением (законом Кюри):

$$\chi_{nm} = \frac{nP_m^2}{3kT} \mu_0 = \frac{C}{T}, \quad (4.31)$$

где $C = \frac{nP_m^2}{3k} \mu_0$ – постоянная Кюри, зависящая от рода вещества.

Величина χ_{nm} для парамагнетиков положительна и лежит в пределах от 10^{-5} до 10^{-3} .

В очень сильных ($<10^5$ А/м) полях и при низких температурах (близких к 0 К) наблюдаются отступления от пропорциональности между \vec{J} и \vec{H} . В частности, может наступить состояние магнитного

насыщения, при котором моменты \vec{P}_m всех атомов выстраиваются вдоль поля.

У большого числа металлических парамагнетиков (щелочные и щелочноземельные металлы, хром, ванадий, марганец и др.) наблюдается *аномальный парамагнитный эффект*, состоящий в том, что их магнитная восприимчивость практически не зависит от температуры. Это явление обусловлено спиновым парамагнетизмом электронов проводимости металлов и может быть объяснено только на основе законов квантовой теории.

4.6. Магнитное поле в веществе

Магнитное поле в веществе складывается из двух полей: внешнего поля, создаваемого током, и поля, создаваемого намагниченным веществом. Поэтому вектор \vec{B} магнитной индукции характеризует результирующее магнитное поле в магнетике, т. е. он равен векторной сумме магнитных индукций внешнего \vec{B}_0 и внутреннего \vec{B}' полей:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'. \quad (4.32)$$

Истинное (микроскопическое) поле в магнетике сильно изменяется в пределах межмолекулярных расстояний. Под вектором \vec{B}' подразумевается усредненное (макроскопическое) поле, которое зависит от магнитных свойств вещества.

Для наглядного описания процесса намагничивания вещества вводят в рассмотрение так называемые молекулярные токи, которые обусловлены движением электронов в атомах и молекулах. В вакууме магнитное поле возбуждают только макротоки (токи проводимости I), а в магнетике – макротоки и молекулярные токи. Следовательно, для поля в веществе закон полного тока примет вид:

$$\oint_L B_e dl = \mu_0 (I + I_{\text{мол}}), \quad (4.33)$$

где $(I + I_{\text{мол}})$ – алгебраическая сумма соответственно макро- и молекулярных токов, охватываемых замкнутым контуром L . Величину $I_{\text{мол}}$ можно вычислить, основываясь на предположении, что молекула с магнитным моментом \vec{P}_m эквивалентна замкнутому «витку» молекулярного тока:

$$I_{\text{мол}} = \frac{P_m}{S_{\text{мол}}},$$

где $S_{\text{мол}}$ – площадь «витка». В случае парамагнитной среды \vec{P}_m – собственный магнитный момент атома (молекулы), а в случае диамагнитной среды – наведенный магнитный момент $\Delta\vec{P}_m$.

Можно доказать, что для указанных сред циркуляция вектора намагниченности \vec{J} вдоль замкнутого контура L равна алгебраической сумме молекулярных токов, охватываемых этим контуром, т. е.

$$I_{\text{мол}} = \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l}. \quad (4.34)$$

Разделим обе части уравнения (4.33) на μ_0 и с учетом формулы (4.34) получим:

$$\oint_L \frac{\vec{B}_e}{\mu_0} \cdot d\vec{l} = I + \oint_L \vec{J} \cdot d\vec{l}.$$

Последнее выражение легко привести к виду:

$$\oint_L \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \right) \cdot d\vec{l} = I. \quad (4.35)$$

Вектор

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{J} \quad (4.36)$$

называют **вектором напряженности магнитного поля**, циркуляция которого вдоль произвольного контура L равна алгебраической сумме сил токов проводимости, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (4.37)$$

Это уравнение выражает **закон полного тока** для магнитного поля в любой среде.

Намагниченность принято связывать не с магнитной индукцией, а с напряженностью поля. Полагают, что в каждой точке магнетика

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (4.38)$$

где χ – характерная для данного магнетика величина, называемая **магнитной восприимчивостью**. Как показывают опыты, для пара- и диамагнитных веществ при не слишком сильных полях величина χ не зависит от напряженности H .

Подставляя выражение (4.38) в формулу (4.36), получим:

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi \vec{H},$$

откуда

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0(1+\chi)}. \quad (4.39)$$

Безразмерная величина

$$\mu = 1 + \chi \quad (4.40)$$

называется **магнитной проницаемостью** вещества. Так как магнитная восприимчивость бывает как положительной, так и отрицательной, то магнитная проницаемость μ может быть как больше, так и меньше единицы.

С учетом выражения (4.40) формуле (4.39) можно придать вид:

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}. \quad (4.41)$$

Таким образом, напряженность магнитного поля \vec{H} есть вектор, совпадающий по направлению с вектором \vec{B} , но в $\mu \mu_0$ раз меньший по модулю (в анизотропных средах векторы \vec{B} и \vec{H} не совпадают по направлению). В случае ферромагнетиков пропорциональность между \vec{B} и \vec{H} , так же как и пропорциональность между \vec{J} и \vec{H} , нарушается.

4.7. Ферромагнетизм

Наряду с диа- и парамагнетиками есть вещества, в которых внутреннее (собственное) магнитное поле может во много раз превышать вызвавшее его внешнее намагничивающее поле. Среди таких (сильномагнитных) веществ особое место занимают **ферромагнетики**. К этому классу магнетиков относятся: железо, кобальт, никель (переходные d -металлы), редкоземельные элементы (гадолинит, диспрозий, гольмий, тулий и др.), многочисленные бинарные, тройные и т. д. металлические сплавы, а также некоторые полупроводниковые и диэлектрические соединения. Обязательным условием существования в сложных кристаллах атомного магнитного порядка того или иного типа является присутствие, по крайней мере, одной компоненты данного сплава или соединения из класса переходных элементов.

Из многочисленных опытов следует, магнитные свойства ферромагнетиков обусловлены собственными (спиновыми) магнитными

моментами электронов. При определенных условиях в кристалле могут возникать так называемые **обменные силы**, под действием которых магнитные моменты электронов выстраиваются параллельно друг другу. В результате возникают области спонтанного (самопроизвольного) намагничивания, которые называются **доменами**. В пределах каждого домена ферромагнетик спонтанно намагничен до насыщения и обладает определенным магнитным моментом \vec{I}_s . Направления этих моментов для различных доменов различны (рис. 4.3), так что в отсутствие внешнего магнитного поля суммарный момент всего образца равен нулю. Возникновение доменной структуры соответствует минимуму энергии тела.

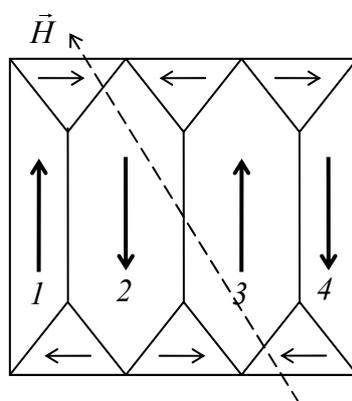


Рис. 4.3

Направление вектора спонтанной намагниченности в доменах и расположение граничных слоев между ними не случайны. Они связаны с ориентацией кристаллографических осей в образце, а также обусловлены зависимостью магнитной энергии домена от направления его намагниченности в кристалле, т. е. явлением **магнитной анизотропии**. Магнитная анизотропия ферромагнетика проявляется в том, что в монокристаллическом образце есть так называемые направления (или оси) легчайшего намагничивания, основным признаком которых является то, что магнитная энергия домена минимальна вдоль такого направления. В различных кристаллах в зависимости от их структуры может быть разное число эквивалентных осей легчайшего намагничивания. Так, в кубических кристаллах железа и никеля имеются соответственно три (совпадающие с ребрами элементарного куба решетки) и четыре (совпадающие с его пространственными диагоналями) оси. Если ферромагнетик имеет мелкокристаллическую структуру и отдельные

кристаллики (зерна) в нем расположены совершенно беспорядочно, то эта анизотропия не проявляется, и его намагничивание не зависит от направления поля.

В настоящее время разработан ряд методов изучения доменной структуры как на поверхности ферромагнитного образца, так и частично в его толще. Наиболее простым является *метод порошковых осадков*. Если на хорошо отполированную поверхность ферромагнетика нанести слой жидкости, в которой взвешены мельчайшие крупинки ферромагнитного порошка (например, Fe_2O_3), то эти крупинки будут оседать преимущественно на те места, вблизи которых магнитное поле неоднородно. Но как раз вблизи границ доменов и возникают неоднородности поля, и поэтому осевший порошок очерчивает границы областей самопроизвольного намагничивания. Домены имеют размеры порядка 1–100 мкм.

Доменная структура ферромагнетиков (т. е. размеры доменов, их форма, форма и энергия их граничных слоев) сильно зависит от мельчайших структурных неоднородностей кристаллической решетки каждого данного ферромагнитного образца (от наличия атомов примесей, вакансий в узлах решетки, микропор, дислокаций, границ между кристалликами и т. п.). Все это определяет резкую структурную чувствительность магнитных свойств ферромагнитных материалов.

Для каждого ферромагнетика есть определенная температура T_K , при которой области спонтанного намагничивания распадаются и вещество утрачивает ферромагнитные свойства. Эта температура называется **точкой Кюри**. Для железа она равна 768°C , для никеля – 358°C , для кобальта – 1130°C , для пермаллоя (30%-ного) – 70°C . При температуре выше точки Кюри ферромагнетик становится обычным парамагнетиком. Зависимость магнитной восприимчивости χ от температуры для таких парамагнетиков подчиняется *закону Кюри – Вейсса*:

$$\chi = \frac{C}{T - T_K}, \quad (4.42)$$

где C – постоянная, зависящая от рода вещества. Переход вещества из ферромагнитного состояния в парамагнитное, происходящий при температуре Кюри, не сопровождается выделением или поглощением теплоты. Поэтому он является примером фазового перехода второго рода.

Важнейшими техническими характеристиками магнитного материала является *кривая намагничивания* (т. е. зависимость намагниченности \vec{J} или магнитной индукции \vec{B} от напряженности \vec{H} внешнего магнитного поля) и *петля магнитного гистерезиса*. Вид кривой намагничивания и петли гистерезиса определяют основные практические магнитные параметры и тем самым область технических применений магнитного материала. Эти характеристики для железа были детально изучены русским ученым А. Г. Столетовым. На рис. 4.4 приведена кривая намагничивания ферромагнетика, магнитный момент которого первоначально был равен нулю (она называется **основной**, или **нулевой**, **кривой намагничивания**).

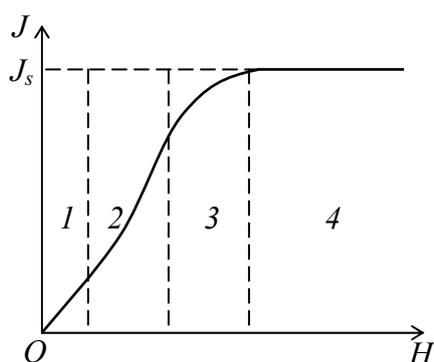


Рис. 4.4

По мере возрастания напряженности H намагниченность J сначала растет быстро, затем медленнее, и, наконец, достигается так называемое *магнитное насыщение* J_s , уже не зависящее от напряженности поля. Процесс намагничивания образца обусловлен процессами изменения его доменной структуры. В случае слабых полей происходит смещение границ доменов, при котором объем доменов с направлением намагниченности \vec{I}_s , более близким к направлению напряженности \vec{H} , увеличивается за счет уменьшения объема менее выгодно намагниченных соседей. Например, домены 1 и 3 увеличиваются за счет доменов 2 и 4 (рис. 4.3). Участок 1 кривой намагничивания (рис. 4.4) соответствует обратимым процессам смещения граничных слоев между доменами. При увеличении напряженности H внешнего поля смещение границ доменов становится необратимым. При достаточной величине намагничивающего поля энергетически невыгодные домены исчезают вовсе. Скачкообразному необратимому смещению границ между доменами и их ориентации (вращение намагниченности \vec{I}_s) соответствует

участок 2 кривой намагниченности. Этот участок называют **областью скачков Брокгаузена**, которые обусловлены скачкообразным ростом внутреннего магнитного поля образца. Третьему, пологому, участку кривой намагничивания в основном отвечает намагничивание образца поворотом магнитных моментов \vec{I}_s оставшихся доменов до их совпадения с направлением вектора \vec{H} . Последний, четвертый, участок соответствует практически неизменной намагниченности, когда магнитные моменты всех доменов устанавливаются параллельно полю. В этом состоянии ферромагнетик имеет наибольший возможный при данной температуре магнитный момент, т. е. намагничен до насыщения.

В случае намагничивания монокристаллического образца вдоль оси легчайшего намагничивания магнитное насыщение в образце достигается при существенно меньшем значении H , чем при намагничивании вдоль оси (направления) трудного намагничивания.

Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля в ферромагнетиках имеет вид, показанный на рис. 4.5.

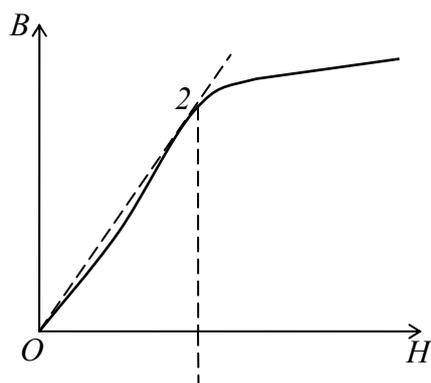


Рис. 4.5

Индукция сначала быстро увеличивается. Но по мере намагничивания магнетика ее нарастание замедляется. Так как $B = \mu_0(H + J)$, то по достижении насыщения индукция B продолжает расти с напряженностью H по линейному закону:

$$B = \mu_0 H + \text{const},$$

где $\text{const} = \mu_0 J_{\text{нас}}$.

В связи с неоднозначностью зависимости B от H понятие магнитной проницаемости μ ферромагнетиков (а следовательно, и магнитной восприимчивости χ) является функцией напряженности поля. На рис. 4.6 дан график зависимости μ от H .

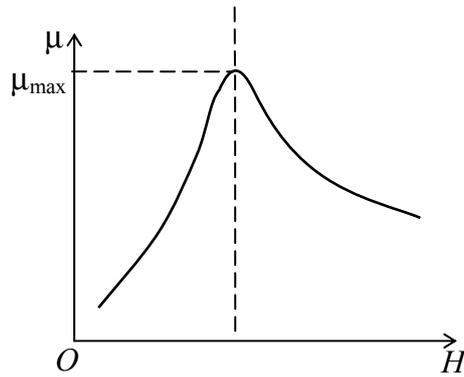


Рис. 4.6

Из рисунков видно, что максимальное значение проницаемости достигается несколько раньше, чем насыщение. Максимальному значению μ_{\max} соответствует максимальное значение тангенса угла наклона касательной к кривой $B(H)$ к оси H (точка 2 на рис. 4.5, прямая $O-2$ является касательной к кривой).

При неограниченном увеличении напряженности H проницаемость асимптотически приближается к единице. Последнее объясняется тем, что при больших значениях \vec{H} в формуле $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{J}$ членом $\mu_0 \vec{J}$ можно пренебречь по сравнению с $\mu_0 \vec{H}$. Тогда $B = \mu \mu_0 H \rightarrow \mu_0 H$ и $\mu \rightarrow 1$.

Характерная особенность ферромагнетиков состоит также в том, что зависимость \vec{J} от \vec{H} (а следовательно, и \vec{B} от \vec{H}) определяется предысторией намагничивания образца. Это явление получило название **магнитного гистерезиса** (от греч. «отстаю» или «запаздываю»). Если довести намагничивание до насыщения (точка 1 на рис. 4.7), а затем уменьшать напряженность магнитного поля, то индукция B следует не по первоначальной кривой $0-1$, а изменяется в соответствии с кривой $1-2$. В результате, когда напряженность внешнего поля становится равной нулю (точка 2), намагничивание не исчезает и характеризуется величиной B_r , которая называется **остаточной индукцией**. Намагниченность при этом имеет значение J_r , называемое **остаточной намагниченностью** и обусловленное тем, что и после выключения внешнего поля у части доменов сохраняется преимущественная ориентация их магнитных моментов. Чтобы полностью размагнитить образец, надо создать магнитное поле напряженностью H_c , направленное в противоположную сторону (точка 3). Величина H_c называется **коэрцитивной (задерживающей) силой**. При дальнейшем увеличении магнитного поля, противоположного первоначальному, намагниченность

образца снова достигает насыщения (точка 4). Возвращаясь постепенно к напряженности намагничивающего поля $+H_n$, получим замкнутую кривую, которая называется **петлей гистерезиса** (аналогичная петля получается и на диаграмме $J-H$). Если максимальные значения напряженности H таковы, что намагниченность достигает насыщения, то петля гистерезиса называется **максимальной** (сплошная кривая на рис. 4.7). Если при амплитудных значениях напряженности H насыщение не достигается, то получается петля, называемая **частным циклом** (пунктирная линия на рис. 4.7). Частных циклов существует бесконечное множество, и все они лежат внутри максимальной петли гистерезиса.

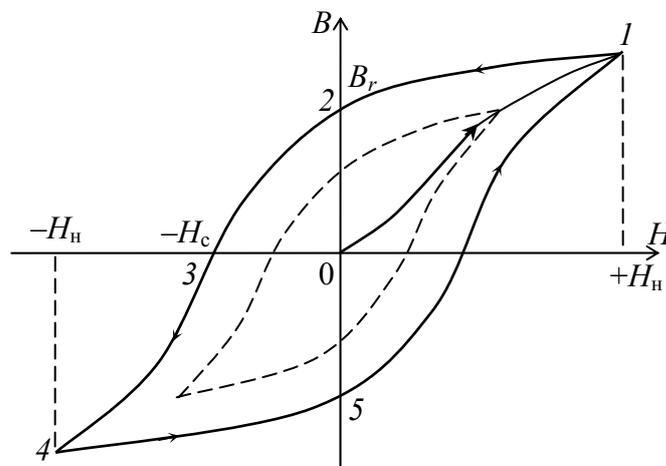


Рис. 4.7

Опыт показал, что в ферромагнитных материалах, помещенных в переменное намагничивающее поле, всегда выделяется некоторое количество теплоты (за счет добавочной энергии, отбираемой от источника перемагничивания), т. е. имеют место гистерезисные потери энергии. Количественно величина этих энергетических потерь определяется площадью петли гистерезиса в координатах B и H .

Величины B_r (или J_r), H_c , μ_{\max} , T_K (точка Кюри) являются основными характеристиками ферромагнетика. Если коэрцитивная сила H_c велика, ферромагнетик называют **жестким**. Для него характерна широкая, близкая к прямоугольной петля гистерезиса, при этом остаточная намагниченность близка к намагниченности насыщения. Основное использование жестких ферромагнетиков – постоянные магниты, широко применяемые в технике, особенно в приборостроении. К магнитожестким материалам относятся углеродистые, вольфрамовые,

алюминиево-никелевые и другие стали, ферромагнитные сплавы на основе редкоземельных металлов. Ферромагнетики с малым значением H_c (и, соответственно, узкой петлей гистерезиса) называют **магнитомягкими**. Такие материалы используются для изготовления сердечников электрических машин (трансформаторов, генераторов, электродвигателей). Магнитомягкие материалы характеризуются малыми гистерезисными потерями энергии, высоким значением μ_{\max} , большой остаточной намагниченностью, близкой к намагниченности насыщения, которая достигается уже в слабых полях.

Освоен промышленный выпуск различных марок аморфных магнитомягких материалов (на основе соединений металлов $3d$ -переходной группы с неметаллами, например галоидами) с очень малым значением коэрцитивной силы H_c .

В приведенной ниже таблице указаны характеристики некоторых ферромагнетиков.

Магнитные характеристики некоторых материалов

Материал	Состав	μ_{\max}	Индукция при насыщении, Тл	H_c , А/м	B_r , Тл
Железо	99,9% Fe	5 000	2,15	80	–
Сплав кремний – железо	96,7% Fe; 3,3% Si	10 000	2,0	16	–
Сплав кремний – железо, отожженный в водороде	96,7% Fe; 3,3% Si	40 000	2,0	8	–
Суперпермолой	79% Ni; 5% Mo; 16% Fe	10^6	0,8	0,32	–
Сплав магнико	13,5% Ni; 9% Al; 24% Co; 3% Cu; 50% Fe	–	–	56 000	1,3
Сплав самарий – кобальт	–	–	–	$>6 \cdot 10^6$	–

При намагничивании ферромагнетика происходит изменение его формы и объема. Это явление называется **магнитострикцией**. Величина и знак магнитострикции зависят от напряженности H намагничивающего поля и от природы ферромагнетика. Этот эффект сильнее всего выражен в редкоземельных металлах. Наблюдается также и обратное явление – изменение намагниченности образца при его деформации. Одним из наиболее важных практических применений прямого и обратного магнитострикционных эффектов являются так называемые *магнитострикционные преобразователи*. В частности, эти

преобразователи используются в качестве излучателей и приемников ультразвука.

В некоторых случаях обменное взаимодействие приводит к возникновению антиферромагнитного состояния. В антиферромагнетиках собственные магнитные моменты электронов самопроизвольно ориентированы антипараллельно друг другу. Такая ориентация охватывает попарно соседние атомы. В результате антиферромагнетики обладают крайне малой магнитной восприимчивостью. К этому классу магнетиков относятся хром, марганец, церий, неодим, самарий и др. Магнитные свойства антиферромагнетиков зависят от температуры. Для каждого вещества существует температура (точка Нееля), при которой антипараллельная ориентация спинов исчезает.

К сильномагнитным веществам относятся и **ферриты (ферримагнетики)**. Они представляют собой химические соединения окиси железа (Fe_2O_3) с окислами других металлов. Общая формула простых ферритов имеет вид MeOFe_2O_3 , где Me – двухвалентный металл (например, Mg, Ni, Co, Mn, Cu, Zn и др.). Ферритовые изделия (в виде колец, стержней, пластин) производят методом прессования порошкообразного вещества и последующего спекания при температурах свыше 1000°C . Удельное сопротивление этих веществ в миллиарды раз превышает удельное сопротивление металлических ферромагнетиков. Поэтому они являются незаменимым материалом для СВЧ-техники.

5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

5.1. Основной закон электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции было открыто М. Фарадеем в 1831 г. Это открытие стало одним из определяющих факторов дальнейшего развития физической науки и техники.

Сущность явления электромагнитной индукции состоит в том, что при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым проводящим контуром, в последнем возникает ток, названный **индукционным**. Рассмотрим некоторые опыты, иллюстрирующие электромагнитную индукцию.

Если в замкнутую на гальванометр катушку вдвигать или выдвигать постоянный магнит (рис. 5.1), то при его движении наблюдается отклонение стрелки гальванометра (возникает индукционный ток); направления отклонений стрелки гальванометра при вдвигании и выдвигании магнита противоположны. Эти отклонения тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно катушки. При изменении полюсов магнита направление отклонения стрелки изменится. Ток в катушке возникает и в том случае, если движется катушка, а магнит покоится.

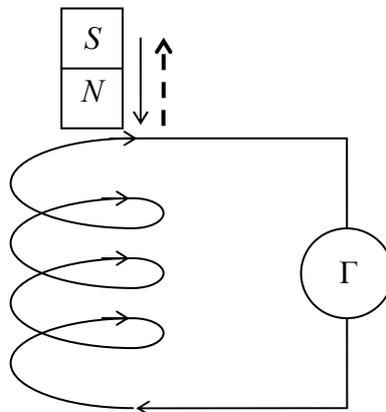


Рис. 5.1

Используют две проволочные катушки (K_1 и K_2), которые могут быть вставлены одна в другую. Катушка K_1 подключена через реостат к источнику электроэнергии, а катушка K_2 подсоединена к гальванометру (рис. 5.2). Отклонения стрелки гальванометра наблюдаются в моменты включения и выключения тока в цепи катушки K_1 , в моменты его увеличения или уменьшения, а также при

перемещении катушек друг относительно друга. Направления отклонений стрелки гальванометра также противоположны при включении и выключении тока, его усилении и уменьшении, при сближении и удалении катушек.

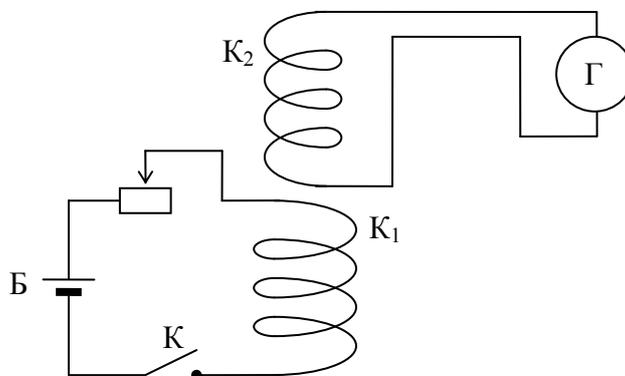


Рис. 5.2

Обобщая результаты своих многочисленных опытов, М. Фарадей пришел к выводу, что индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции. Также им было установлено, что величина индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь *скоростью* его изменения.

Э. Ленц исследовал связь между направлением индукционного тока и характером вызвавшего его изменения магнитного потока. В 1833 г. он установил следующий закон (**закон Ленца**): *при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную замкнутым контуром, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока.*

Так, например, при приближении северного полюса постоянного магнита к замкнутой на гальванометр катушке (рис. 5.1) в ней наводится индукционный ток такого направления, при котором ток своим магнитным действием препятствует приближению магнита и связанному с этим возрастанию магнитного потока сквозь витки катушки. При удалении магнита из катушки в ней наводится ток противоположного направления, который своим магнитным действием также препятствует движению магнита. Легко убедиться в том, что внутри катушки векторы магнитной индукции поля магнита и поля индукционного тока в первом случае направлены в противоположные стороны, а во втором – в одну и ту же сторону.

Дальнейшие исследования индукционного тока, возникающего в контурах различной формы и размеров, показали, что ЭДС электромагнитной индукции \mathcal{E}_i в контуре пропорциональна скорости изменения магнитного потока Φ_m сквозь поверхность, ограниченную этим контуром (**закон Фарадея**):

$$\mathcal{E}_i \sim \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.1)$$

Объединив законы Фарадея и Ленца, получим:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) является математическим выражением **основного закона электромагнитной индукции**: *электродвижущая сила электромагнитной индукции в проводящем контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, охватываемую контуром.*

Если контур состоит из N одинаковых витков, то, поскольку витки соединены последовательно, \mathcal{E}_i будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков в отдельности:

$$\mathcal{E}_i = -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{d\Psi}{dt}, \quad (5.3)$$

где $\Psi = N\Phi_m$ – величина, называемая **потокосцеплением**. Ее измеряют в тех же единицах, что и магнитный поток Φ_m .

Условимся считать ЭДС электромагнитной индукции в контуре положительной, если магнитный момент \vec{P}_m соответствующего ей индукционного тока образует острый угол с линиями магнитной индукции того поля, которое возбуждает этот ток. Тогда в случае, показанном на рис. 5.3, *а*, ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i < 0$, а в случае, изображенном на рис. 5.3, *б*, ЭДС электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i > 0$.

Магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, может изменяться по ряду причин: за счет изменения геометрии контура и его расположения в магнитном поле, вследствие зависимости магнитной индукции от времени, а также в результате совместного действия этих факторов. Хотя величина ЭДС индукции и не зависит от способа изменения магнитного потока, однако механизм ее возникновения при этом оказывается разным.

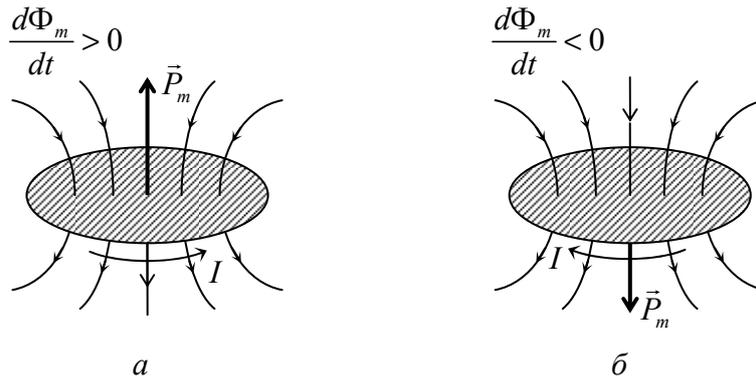


Рис. 5.3

Ток проводимости может существовать в электрической цепи только под действием сил стороннего поля. Энергетической мерой данного поля при этом служит электродвижущая сила \mathcal{E}_i электромагнитной индукции. Рассмотрим сначала случай, когда поток магнитной индукции изменяется вследствие движения проводящего контура (или изменения его геометрии) в постоянном магнитном поле. При этом роль сторонней силы, разделяющей разноименные заряды в проводнике, играет составляющая силы Лоренца, направленная параллельно участкам (или отдельному участку) контура.

В качестве примера рассмотрим контур с подвижной перемычкой l (рис. 5.4), находящийся в однородном магнитном поле. Вектор \vec{B} направлен «от нас» перпендикулярно к плоскости контура.

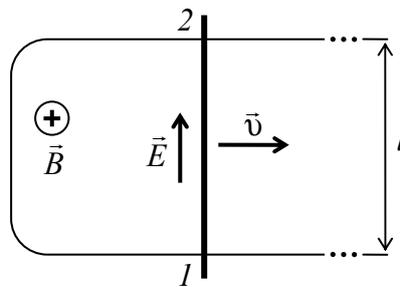


Рис. 5.4

Если привести перемычку в движение со скоростью \vec{v} , то с такой же скоростью будут перемещаться относительно поля и носители заряда в перемычке – электроны. В результате на каждый электрон вдоль перемычки будет действовать сила Лоренца $\vec{F}_{||} = -e\vec{v} \times \vec{B}$. Действие этой силы эквивалентно действию на электрон электрического

поля напряженностью $\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$ (проверим единицу правой части этого равенства: $[E] = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{м}^2} = 1 \frac{\text{В}}{\text{м}}$). Это поле неэлектростатическое.

Циркуляция вектора \vec{E} этого поля вдоль контура равна величине ЭДС, индуцируемой в контуре:

$$\mathcal{E}_i = \oint_L \vec{E} \cdot \vec{dl} = \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = \int_1^2 (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{dl} = -\frac{d\Phi_m}{dt}.$$

Подынтегральная функция отлична от нуля только на участке 1–2.

Если неподвижный контур находится в изменяющемся со временем магнитном поле, то механизм возникновения ЭДС индукции называется, в принципе, другим. Изменяющееся магнитное поле $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$

возбуждает *вихревое* электрическое поле, под действием которого носители заряда в контуре приходят в направленное движение – возникает индукционный ток (подробнее об этом см. в подразделе 7.1).

5.2. Методы измерения магнитной индукции

I. Пусть полный магнитный поток, сцепленный с некоторым проводящим замкнутым контуром, изменяется от значения Ψ_1 до значения Ψ_2 . Определим заряд q , проходящий через поперечное сечение проводника вследствие возбуждения в нем индукционного тока. Из определения силы тока следует, что $i_i = \frac{dq}{dt}$, поэтому $dq = i_i dt$. Но мгновенное значение силы индукционного тока

$$i_i = \frac{e_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt},$$

где e_i – мгновенное значение ЭДС индукции, возникающей в контуре; R – сопротивление контура.

С учетом этого

$$dq = \frac{e_i}{R} dt = -\frac{1}{R} \frac{d\Psi}{dt} dt = -\frac{1}{R} d\Psi.$$

Проинтегрировав полученное выражение, найдем полный заряд:

$$q = \int dq = -\frac{1}{R} \int_{\Psi_1}^{\Psi_2} d\Psi = -\frac{\Delta\Psi}{R} = \frac{\Psi_1 - \Psi_2}{R}. \quad (5.4)$$

Формула (5.4) лежит в основе простого и удобного способа измерения магнитной индукции, который заключается в следующем. В исследуемое поле помещают небольшую плоскую проволочную катушку, соединенную с баллистическим гальванометром. Катушку располагают так, чтобы вектор \vec{B} был перпендикулярен к плоскости витков. Тогда полный магнитный поток, сцепленный с N витками катушки, будет равен: $\Psi = BSN$, где S – площадь одного витка (катушка должна быть настолько малой, чтобы поле в ее пределах можно было считать однородным). Затем магнитный поток сквозь катушку быстро уменьшают до нуля. Это можно осуществить, выдергивая катушку из области магнитного поля или выключая токи, создающие поле, или, наконец, поворачивая катушку на 90° . При этом по цепи протекает заряд

$$q = \frac{\Psi_1}{R} = \frac{SN}{R} B = CB. \quad (5.5)$$

Если в магнитном поле поворачивать катушку на 180° или изменить направление силы тока, возбуждающего исследуемое поле, на противоположное, то в катушке возникает кратковременный импульс тока, при котором протекает заряд

$$q = \frac{1}{R} 2SNB = C_1 B. \quad (5.6)$$

Из выражений (5.5) и (5.6) следует, что измерив q баллистическим гальванометром и зная постоянную прибора C (или C_1), можно определить магнитную индукцию B . Значение постоянной C (или C_1) обычно определяют опытным путем, используя поля с известной индукцией.

Описанный метод лежит в основе принципа действия микроверметров – приборов, предназначенных для измерения магнитного потока.

II. Рассмотрим случай, когда в однородном магнитном поле равномерно вращается плоская катушка (рамка), имеющая N одинаковых витков. Неподвижная ось вращения лежит в плоскости катушки перпендикулярно к вектору индукции \vec{B} . На рис. 5.5 плоскость CD катушки и ось вращения O перпендикулярны к плоскости чертежа.

Угол между вектором \vec{B} и нормалью \vec{n} к плоскости рамки обозначен через α . Выберем начало отсчета времени t так, чтобы при $t = 0$ угол α был равен нулю. Если угловая скорость вращения равна ω , то в

произвольный момент времени угол $\alpha = \omega t$. Полный магнитный поток, сцепленный с катушкой,

$$\Psi = BSN \cos(\widehat{\vec{B} \vec{n}}) = BSN \cos \omega t.$$

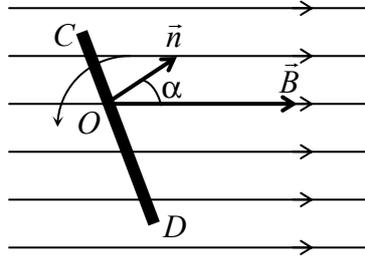


Рис. 5.5

В соответствии с основным законом электромагнитной индукции, мгновенное значение ЭДС, возбуждаемой в катушке, будет:

$$e_i = -\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BSN \cos \omega t) = BSN\omega \sin \omega t. \quad (5.7)$$

Таким образом, в плоской катушке, равномерно вращающейся в однородном магнитном поле, возбуждается ЭДС индукции, изменяющаяся во времени по гармоническому закону. ЭДС максимальна в те моменты времени, когда плоскость катушки располагается параллельно направлению вектора \vec{B} :

$$\mathcal{E}_m = BSN\omega. \quad (5.8)$$

Поэтому формулу (5.7) можно записать в виде:

$$e_i = \mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (5.9)$$

Под действием ЭДС индукции в катушке возникает индукционный ток, также изменяющийся по гармоническому закону:

$$i_i = \frac{e_i}{R} = I_m \sin \omega t. \quad (5.10)$$

где R – сопротивление проволоки, из которой изготовлена катушка; $I_m = \frac{\mathcal{E}_m}{R}$ – максимальная сила тока.

Для практического использования ЭДС, возникающей в катушке, концы катушки подсоединяют к металлическим кольцам, изолированным друг от друга и от оси катушки. К кольцам прижимаются медные

(или медно-графитовые) щетки, к зажимам которых могут быть подключены различные приемники. Таков принцип действия генератора переменного тока.

Если возникающая в катушке ЭДС изменяется по гармоническому закону, то подключенный к зажимам щеток вольтметр измеряет ее действующее (эффективное) значение. Связь между эффективным и максимальным значениями ЭДС выражается отношением

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому с учетом формулы (5.8) получим:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} BSN\omega = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} BSNn = KBn. \quad (5.11)$$

Из последней формулы следует, что если параметры S и N катушки известны, то, зная частоту n вращения (или измерив ее), по показаниям вольтметра можно определить индукцию поля:

$$B = \frac{\mathcal{E}}{Kn}. \quad (5.12)$$

Значение постоянной $K = \pi\sqrt{2}SN$ определяют опытным путем, используя поля с известной индукцией.

Этот метод определения индукции магнитного поля носит название **индукционного**, или **генераторного**.

Есть и другие методы измерения индукции B магнитного поля.

5.3. Явление самоиндукции

Явление электромагнитной индукции наблюдается во всех случаях, когда изменяется магнитный поток, пронизывающий контур. В частности, этот поток может создаваться током, текущим в самом рассматриваемом контуре. Поэтому при всяком изменении силы тока в каком-либо контуре в нем возникает ЭДС индукции, которая вызывает дополнительный ток в контуре. Это явление называется **самоиндукцией**, а сама ЭДС – ЭДС **самоиндукции**.

В соответствии с законом Био – Савара – Лапласа, магнитная индукция B пропорциональна силе тока, возбуждающего поле. Отсюда следует, что сила тока I в контуре и полный магнитный поток Ψ_c сквозь поверхность, ограниченную контуром, пропорциональны друг другу:

$$\Psi_c = LI. \quad (5.13)$$

Коэффициент пропорциональности L называется **индуктивностью контура**. Единицей индуктивности служит генри (Гн); 1 Гн – индуктивность такого контура, в котором при силе тока 1 А возникает магнитный поток в 1 Вб:

$$1 \text{ Гн} = 1 \frac{\text{Вб}}{\text{А}} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}.$$

Линейная зависимость Ψ_c от I имеет место только в случае, если магнитная проницаемость μ среды, в которой находится контур, не зависит от напряженности H поля, т. е. в отсутствие ферромагнетиков. Для ферромагнетиков магнитная проницаемость μ сложным образом зависит от напряженности H , а значит, и от намагничивающей силы тока I . Зависимость Ψ_c от I также будет довольно сложной. Однако соотношение (5.13) и в этом случае останется справедливым. При неизменной силе тока I полный поток Ψ_c может изменяться из-за изменения формы и размеров контура.

Из сказанного следует, что индуктивность L как характеристика контура (проводника) зависит от его геометрии, а также от магнитных свойств окружающей контур среды.

Вычисление индуктивности L вызывает значительные трудности и может быть выполнено только для небольшого числа простейших частных случаев. Однако всегда есть возможность определить L непосредственно из опыта.

Чтобы вычислить индуктивность контура, нужно сначала рассчитать магнитный поток сквозь этот контур, создаваемый током некоторой силы I . После этого индуктивность можно определить по формуле (5.13).

Вычислим индуктивность соленоида. Длину соленоида будем считать большей по сравнению с его диаметром, и поэтому будем пренебрегать искажением поля вблизи концов соленоида. В таком случае при силе тока I внутри соленоида возбуждается однородное магнитное поле, индукция которого $B = \mu\mu_0 \frac{N}{l} I$ (см. формулу (2.27)).

Поток через каждый виток равен: $\Phi_m = BS$, а полный магнитный поток, сцепленный со всеми N витками соленоида:

$$\Psi_c = N\Phi_m = NBS = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} SI, \quad (5.14)$$

где l – длина соленоида; S – площадь поперечного сечения. Сопоставляя формулы (5.13) и (5.14), находим, что индуктивность длинного соленоида равна:

$$L = \mu\mu_0 \frac{N^2}{l} S = \mu\mu_0 n^2 V, \quad (5.15)$$

где $V = Sl$ – объем соленоида; $n = \frac{N}{l}$ – число витков на единицу длины.

Эта формула определяет и индуктивность замкнутой тороидальной катушки (в этом случае l – длина средней магнитной линии тора).

Вычисление индуктивности кабеля длиной l , состоящего из коаксиальных цилиндров радиусами a и b , приводит к формуле:

$$L = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} l \cdot \ln \frac{b}{a}. \quad (5.16)$$

При изменении силы тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции, равная:

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Psi_c}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt} \right). \quad (5.17)$$

Если при изменениях силы тока индуктивность остается постоянной (что возможно лишь в отсутствие ферромагнетиков), выражение для ЭДС самоиндукции имеет вид:

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (5.18)$$

Знак «минус» в этой формуле соответствует закону Ленца. Под действием ЭДС самоиндукции возникает индукционный ток, который противодействует изменению тока в цепи: замедляет его возрастание или убывание. Из формулы (5.18) следует, что ЭДС самоиндукции, а следовательно, и индукционный ток при прочих равных условиях пропорциональны индуктивности контура. Таким образом, индуктивность контура является мерой его инертности по отношению к изменению в нем силы тока.

В цепях постоянного тока ЭДС самоиндукции проявляет себя лишь в моменты включения и отключения приемников энергии или изменения потребляемой ими мощности. Особенно высоких значений ЭДС самоиндукции \mathcal{E}_c достигает при отключении приемников, обладающих большой индуктивностью.

5.4. Токи Фуко

Индукционные токи возбуждаются не только в линейных, но и в массивных проводниках. В этом случае их называют **токами Фуко**. Замкнутая цепь этих токов образуется в толще самого проводника. Поэтому индукционные токи в массивных проводниках носят *вихревой* характер.

По закону Ома сила вихревого тока

$$I_{\text{вихр}} = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\Phi_m}{dt}, \quad (5.19)$$

где Φ_m – магнитный поток, сцепленный с контуром тока; R – сопротивление цепи вихревого тока, которое трудно поддается расчету; но очевидно, что оно тем меньше, чем больше удельная электропроводность материала проводника и чем больше его размеры. Электрическое сопротивление массивного проводника мало, и вихревые токи могут достигать большей силы даже в не очень быстро меняющихся магнитных полях.

В соответствии с законом Ленца, токи Фуко выбирают внутри проводника такие пути и направления, чтобы своим действием максимально противодействовать причине, которая их вызывает. Поэтому движущиеся в сильном магнитном поле массивные проводящие тела испытывают сильное торможение, обусловленное взаимодействием токов Фуко с магнитным полем. Этот эффект используют для успокоения подвижных частей гальванометров, сейсмографов и других приборов.

Тепловое действие вихревых токов используют в индукционных печах, служащих для плавки металлов. Для создания сильного магнитного поля по обмотке такой печи пропускают высокочастотный ток большой силы. Таким способом можно осуществлять плавление металлов в вакууме, что позволяет получать материалы высокой чистоты.

В некоторых технических устройствах токи Фуко играют вредную роль. Поэтому принимают различные меры для уменьшения теплового действия этих токов. Так, например, сердечники электрических машин (трансформаторов, двигателей, генераторов) собирают из тонких пластин, изолированных друг от друга лаком или окалиной. Кроме того, плоскости разреза пластин располагают параллельно вектору \vec{B} . Для увеличения удельного электрического сопротивления электротехнической стали, из которой изготавливают

сердечники, в нее вводят от 2 до 4% кремния. Эта примесь улучшает и магнитные свойства материала.

Если в однородном проводнике с постоянным поперечным сечением существует постоянный ток, то плотность тока одинакова в разных точках сечения проводника. Иное наблюдается при переменном токе. В этом случае магнитное поле внутри проводника изменяется, и в нем возникают вихревые токи. Они имеют такое направление, что противодействуют изменению основного тока внутри проводника и способствуют его изменению вблизи поверхности. Следовательно, для переменного тока сопротивление внутренних частей проводника оказывается большим, чем сопротивление внешних. Поэтому плотность переменного тока неодинакова по сечению. Она максимальна у поверхности проводника и минимальна на его оси. Это явление получило название **поверхностного эффекта**, или **скин-эффекта**. Из-за скин-эффекта внутренняя часть проводников в цепях токов высокой частоты оказывается бесполезной. Поэтому для таких токов применяют проводники трубчатой формы, поверхности которых часто покрывают слоем серебра.

При нагревании сплошных проводников токами высокой частоты в результате скин-эффекта почти вся теплота выделяется в поверхностном слое. На этом основан метод поверхностной закалки различных деталей машин (шестерен, коленчатых валов и др.). Такой метод закалки обеспечивает стойкость детали по отношению как к износу поверхности, так и к ударным нагрузкам.

5.5. Ток при замыкании и размыкании цепи

В цепях постоянного тока действие ЭДС самоиндукции проявляется в моменты включения (выключения) приемников энергии или изменения потребляемой ими мощности. Это приводит к тому, что установление силы тока при замыкании цепи и убывание силы тока при ее размыкании происходит не мгновенно, а постепенно.

Найдем сначала характер изменения силы тока при замыкании цепи. На рис. 5.6 приведена схема цепи, содержащей индуктивность L , не зависящую от силы тока I , сопротивление R и источник энергии с ЭДС \mathcal{E} .

Переведем переключатель Π в положение I . В этом случае в цепи будет действовать ЭДС \mathcal{E} источника и ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_c = -L \frac{di}{dt}$.

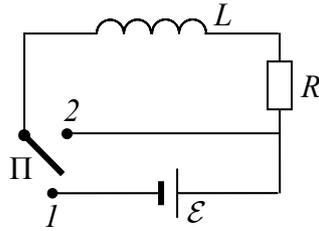


Рис. 5.6

Поэтому, в соответствии с законом Ома, $iR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_c = \mathcal{E} - L \frac{di}{dt}$, или

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{\mathcal{E}}{L}, \quad (5.20)$$

где i – мгновенное значение силы тока в момент времени t . Из формулы (5.20) следует, что скорость нарастания силы тока уменьшается с увеличением L и имеет максимальное значение в начальный момент времени (при $i = 0$):

$$\left(\frac{di}{dt} \right)_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{L}. \quad (5.21)$$

Решим дифференциальное уравнение (5.20). Для этого разделим переменные, а затем проинтегрируем полученное выражение. Поскольку

$$i - \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt},$$

то

$$-\frac{R}{L} dt = \frac{di}{i - I_0}.$$

Величина $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$ – установившееся в цепи значение силы тока.

В начальный момент времени ($t = 0$) сила тока $i = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{R}{L} \int_0^t dt &= \int_0^i \frac{di}{i - I_0} \Rightarrow -\frac{R}{L} t = \ln \frac{i - I_0}{-I_0} \Rightarrow i - I_0 = -I_0 e^{-\frac{R}{L} t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow i = I_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) = \frac{\mathcal{E}}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right). \end{aligned} \quad (5.22)$$

График функции (5.22) дан на рис. 5.7 (кривая 1).

Сила тока постепенно увеличивается от нуля до установившегося значения $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Нарастание силы тока происходит тем быстрее, чем меньше индуктивность цепи и больше ее сопротивление. Величина $\tau = \frac{L}{R}$, имеющая размерность времени, называется **постоянной цепи**.

Процесс нарастания силы тока практически заканчивается при $t = 3\tau$. Так, при $L = 1$ Гн и $R = 10$ Ом время установления силы тока составляет порядка нескольких десятых долей секунды, что вполне заметно на глаз и может быть продемонстрировано на опыте.

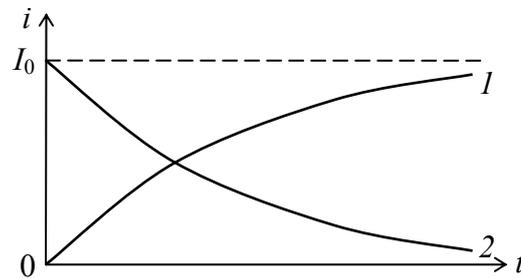


Рис. 5.7

Теперь рассмотрим случай размыкания цепи. Для этого переключатель П (см. рис. 5.6) переведем из положения 1 в положение 2.

По закону Ома мгновенное значение силы тока $i = \frac{e}{R}$. А поскольку

$e = -L \frac{di}{dt}$, то $i = -\frac{L}{R} \frac{di}{dt}$, или $\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt$. Проинтегрируем полученное выражение с учетом начальных условий. При $t = 0$ сила тока $I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$. Тогда

$$\int_{I_0}^i \frac{di}{i} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt \Rightarrow \ln \frac{i}{I_0} = -\frac{R}{L} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = I_0 e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{\mathcal{E}}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}. \quad (5.23)$$

Итак, после отключения источника электроэнергии сила тока в цепи убывает по экспоненциальному закону. График убывания силы

тока I в зависимости от времени приведен на рис. 5.7 (кривая 2). Скорость убывания определяется постоянной времени цепи: $\tau = \frac{L}{R}$. Величина τ есть время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз ($e = 2,72$ – основание натурального логарифма).

5.6. Взаимная индукция

Рассмотрим два контура (1 и 2), расположенных близко друг к другу (рис. 5.8). Индукция магнитного поля контура 1 пропорциональна силе тока I_1 в этом контуре. Поэтому полный магнитный поток Ψ_{21} через поверхность, ограниченную контуром 2 , создаваемый контуром 1 , также пропорционален силе тока I_1 :

$$\Psi_{21} = L_{21}I_1. \quad (5.24)$$

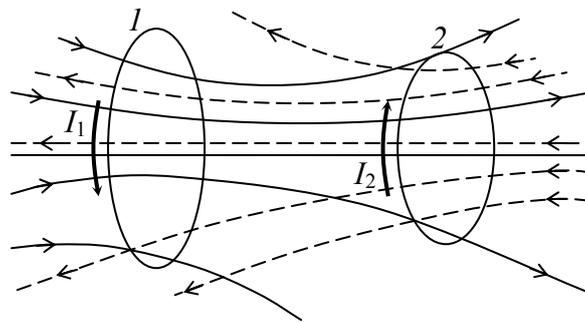


Рис. 5.8

Поле, создающее этот поток, изображено на рисунке сплошными линиями. Коэффициент L_{21} называется **коэффициентом взаимной индукции** контуров 2 и 1 .

Аналогично, если в контуре 2 существует ток силой I_2 , то он создает магнитный поток Ψ_{12} сквозь поверхность, ограниченную контуром 1 , причем

$$\Psi_{12} = L_{12}I_2, \quad (5.25)$$

где L_{12} – коэффициент взаимной индукции контуров 1 и 2 .

Можно показать, что для любых двух контуров, находящихся в неферромагнитной среде, коэффициенты взаимной индукции равны друг другу:

$$L_{21} = L_{12}. \quad (5.26)$$

Если среда ферромагнитная, то L_{12} и L_{21} зависят не только от геометрической формы, размеров и взаимного расположения контуров, но и от силы тока в них. В этом случае равенство (5.26) не соблюдается. Коэффициент взаимной индукции измеряется в тех же единицах, что и индуктивность L контура (проводника).

Наличие магнитной связи между контурами проявляется в том, что при всяком изменении силы тока в одном из контуров в другом контуре возбуждается ЭДС индукции. Согласно основному закону электромагнитной индукции, имеем:

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{i1} = -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}, \quad (5.27)$$

где \mathcal{E}_{i2} – ЭДС самоиндукции, возникающая в контуре 2; \mathcal{E}_{i1} – ЭДС самоиндукции, возникающая в контуре 1.

Рассчитаем коэффициенты взаимной индукции двух однослойных катушек, намотанных на общий тороидальный ферромагнитный сердечник (рис. 5.9).

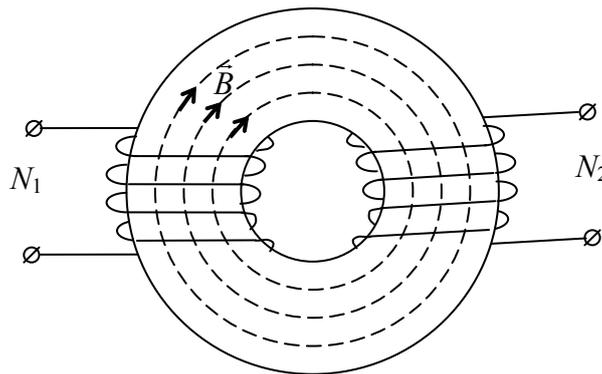


Рис. 5.9

В этом случае почти весь (приближенно будем считать, что весь) магнитный поток, создаваемый током I_1 в первой катушке, пронизывает вторую катушку и наоборот. Предположим, что в пределах сердечника магнитное поле, создаваемое катушками с током, однородное. Напряженность поля, создаваемого катушкой 1, равна:

$$H_1 = \frac{I_1 N_1}{l}, \quad (5.28)$$

где N_1 – число витков в катушке 1; l – длина средней линии сердечника.

Магнитный поток через поперечное сечение сердечника

$$\Phi_m = BS = \mu\mu_0 H_1 S,$$

где μ – магнитная проницаемость материала сердечника; S – площадь поперечного сечения сердечника. Полный поток, сцепленный с витками второй катушки, $\Psi_2 = \mu\mu_0 H_1 S N_2$, или с учетом формулы (5.28):

$$\Psi_2 = \mu\mu_0 N_1 N_2 I_1 \frac{S}{l}.$$

Сопоставление этого выражения с формулой (5.24) показывает, что

$$L_{21} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S. \quad (5.29)$$

Вычисление магнитного потока Ψ_1 , сцепленного с витками катушки l , в том случае, когда по второй катушке протекает ток силой I_2 , приводит к выражению

$$L_{12} = \mu\mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S, \quad (5.30)$$

по форме совпадающему с выражением для L_{21} . Однако в данном случае нельзя утверждать, что при любых условиях $L_{12} = L_{21}$. Как известно, магнитная проницаемость μ ферромагнетиков зависит от напряженности H намагничивающего поля. А эта величина будет разной при $N_1 \neq N_2$, если ток одинаковой силы пропустить сначала по виткам катушки l , а затем по виткам катушки 2 .

Если сердечник неферромагнитный, а витки обмоток вплотную прилегают друг к другу и располагаются по всей поверхности сердечника, то коэффициенты взаимной индукции обмоток равны и связаны с коэффициентами индуктивности каждой обмотки соотношением

$$L_{12} = L_{21} = \sqrt{L_1 L_2},$$

где L_1 и L_2 можно рассчитать по формуле (5.14), приняв $\mu = 1$.

5.7. Энергия магнитного поля

Рассмотрим электрическую цепь, схема которой изображена на рис. 5.10. При замкнутом ключе K в цепи установится сила тока I , которая определяется электродвижущей силой \mathcal{E} источника электрической энергии и полным сопротивлением R цепи: $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$. За время dt в цепи выделится количество теплоты $\delta Q = I^2 R dt$, которое равно работе источника электроэнергии за то же время: $\delta A = I \mathcal{E} dt$. Отсюда следует, что для поддержания постоянного магнитного поля не требуется никакой работы.

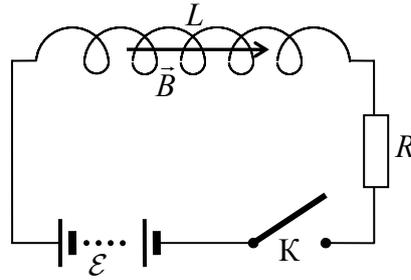


Рис. 5.10

Предположим теперь, что сила тока в цепи возрастает. Из-за этого в катушке возникнет ЭДС индукции, противодействующая увеличению тока. По закону Ома, мгновенное значение силы тока $i = \frac{\mathcal{E} + e_c}{R}$.

Так как $e_c = -L \frac{di}{dt}$, то

$$\mathcal{E} = iR + L \frac{di}{dt}. \quad (5.31)$$

Умножив это равенство на произведение idt , будем иметь:

$$\mathcal{E}idt = i^2 R dt + Lidi. \quad (5.32)$$

В этом случае энергия источника тока расходуется не только на выделение в цепи за время dt количества теплоты, но и на дополнительную работу, обусловленную индукционными явлениями. Дополнительная работа, затрачиваемая на увеличение силы тока в контуре от нуля до I , будет равна:

$$A = \int_0^I Lidi = \frac{LI^2}{2}. \quad (5.33)$$

Выражение $\frac{LI^2}{2}$ получило название **собственной энергии силы тока** I в контуре с индуктивностью L . Собственная энергия контура (проводника) с током есть не что иное, как энергия W_m магнитного поля этого контура (проводника) с током.

Так как собственный полный магнитный поток сквозь поверхность, ограниченную контуром, выражается формулой $\Psi_c = LI$, то уравнение (5.33) можно представить в виде:

$$W_m = \frac{1}{2} \Psi_c I. \quad (5.34)$$

Магнитное поле является одним из неотъемлемых проявлений электрического тока. Вместе с возникновением тока в проводнике возникает магнитное поле, которое неизбежно исчезает при исчезновении тока. Процесс трансформации энергии электрического тока в энергию магнитного поля принципиально отличен от процессов преобразования электрической энергии в другие виды энергии (тепловую, химическую, механическую и др.). Указанными процессами преобразования сравнительно легко управлять, однако нельзя предотвратить трансформацию энергии тока во время его возникновения в энергию магнитного поля. Магнитное поле является «неразлучным спутником» электрического тока. *В этой сопряженности магнитного поля и тока друг с другом и заключается физическая сущность явления электромагнитной индукции и, в частности, самоиндукции.*

В качестве примера рассмотрим однородное магнитное поле длинного соленоида, индуктивность которого $L = \mu\mu_0 n^2 V$ (см. формулу (5.15)), где V – объем соленоида.

Магнитная индукция соленоида выражается следующей формулой: $B = \mu\mu_0 In$. Отсюда

$$I = \frac{B}{\mu\mu_0 n}.$$

Подставив выражения для L и I в формулу (5.33), имеем:

$$W_M = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0} V. \quad (5.35)$$

Так как рассматриваемое поле однородно, то его энергия распределена равномерно по всему объему V с объемной плотностью

$$w_M = \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0}. \quad (5.36)$$

С учетом уравнения $B = \mu\mu_0 H$ полученному выражению можно придать вид:

$$w_M = \frac{1}{2} \mu\mu_0 H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu\mu_0} = \frac{1}{2} BH. \quad (5.37)$$

Зная плотность энергии поля в каждой точке, можно найти энергию поля, заключенную в любом объеме V . Для этого нужно вычислить интеграл:

$$W_{\text{м}} = \int_V w_{\text{м}} dV = \int_V \frac{1}{2} \mu \mu_0 H^2 dV. \quad (5.38)$$

В случае двух связанных контуров (катушек) с током (при отсутствии ферромагнетиков) энергия магнитного поля, как показывают расчеты, определяется формулой:

$$W_{\text{м}} = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 \pm L_{12} I_1 I_2, \quad (5.39)$$

где первое и второе слагаемые выражают энергию магнитного поля соответственно первого и второго контуров с током. Величина $W_{12} = \pm L_{12} I_1 I_2$ называется **взаимной энергией** двух контуров, обладающих магнитной связью. Выбор знака «+» или «-» зависит от того, одинаковы или противоположны направления токов в контурах.

6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

6.1. Квазистационарные токи

При рассмотрении электромагнитных колебаний приходится иметь дело с токами, изменяющимися со временем. Если изменения тока настолько медленны, что за время установления электрического равновесия в цепи относительные изменения токов и ЭДС малы, то мгновенные значения токов и ЭДС (напряжений) будут подчиняться всем законам постоянного тока. Такие токи называются **квазистационарными**.

Отметим, что скорость установления электрического равновесия весьма велика, поэтому все технические переменные токи можно рассматривать как квазистационарные. Даже высокочастотные (с частотой порядка миллионов колебаний в секунду) колебания, используемые в радиотехнике, часто рассматривают как квазистационарные.

Условие квазистационарности налагает ограничения на линейные размеры цепи переменного тока. Электромагнитные возмущения распространяются по цепи с конечной скоростью, равной:

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}},$$

где $c = 3 \cdot 10^8$ м/с – скорость света в вакууме; ϵ и μ – диэлектрическая и магнитная проницаемости среды, окружающей проводники. Если l – длина цепи, то время прохождения возмущения вдоль цепи равно:

$$\tau = \frac{l\sqrt{\epsilon\mu}}{c}.$$

Для периодически изменяющихся токов условие квазистационарности имеет вид:

$$\tau \ll T, \quad (6.1)$$

где T – период переменного тока. Поскольку период $T = \frac{1}{\nu} = \frac{\lambda}{v}$, то записанное выше условие означает, что размеры цепи должны быть во много раз меньше длины волны, соответствующей квазистационарному току, т. е.

$$l \ll \lambda. \quad (6.2)$$

Ток промышленной частоты ($\nu = 50$ Гц) квазистационарен для цепей длиной примерно 100 км.

При выполнении условия (6.1) или (6.2) мгновенные значения всех электрических величин в каждой части цепи будут такими же, как и в случае постоянного тока. Поэтому *мгновенные значения квазистационарных токов подчиняются закону Ома, следовательно, для них справедливы и правила Кирхгофа.*

6.2. Уравнение собственных электрических колебаний. Колебания в отсутствие затухания

Среди различных электрических процессов особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи, электрические и магнитные поля) изменяются периодически. Простейшей электрической колебательной системой является закрытый колебательный контур, который представляет собой электрическую цепь, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивностью L , конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R (сопротивление катушки и соединительных проводов считают равным нулю, а величины C , L и R постоянными).

Колебания в контуре можно вызвать, или сообщив конденсатору некоторый начальный заряд, или возбуждив в катушке ток. Если переключатель Π (рис. 6.1) перевести из положения 1 в положение 2, то заряженный конденсатор начнет разряжаться, и в цепи потечет возрастающий со временем ток.

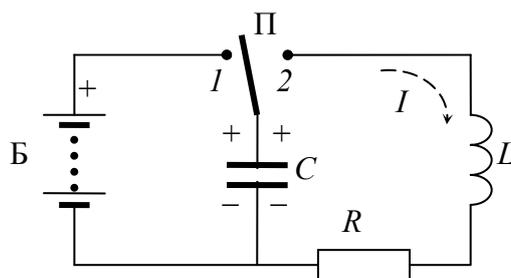


Рис. 6.1

В результате энергия электрического поля конденсатора будет уменьшаться, но при этом будет возрастать энергия магнитного поля катушки. В момент времени, когда разность потенциалов на конденсаторе, а значит, и энергия электрического поля обращаются в нуль, сила тока в катушке, а следовательно, и энергия магнитного поля достигают макси-

мального значения. В дальнейшем сила тока в контуре будет убывать, и в катушке возникнет ЭДС самоиндукции, поддерживающая уменьшающийся ток. Конденсатор начнет перезаряжаться, возникнет электрическое поле, ослабляющее силу тока в цепи. В некоторый момент времени ток в контуре прекратится, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума. Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении. После этого система придет в исходное состояние. Таким образом, в рассматриваемой цепи периодически изменяются (т. е. колеблются) заряды на обкладках конденсатора, напряжение на нем и сила тока в катушке. Колебания указанных величин сопровождаются взаимными превращениями энергий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания, происходящие под действием процессов в самом колебательном контуре, называются **собственными электромагнитными колебаниями**. Эти колебания являются и **свободными**.

Теперь рассмотрим количественно колебания, происходящие в контуре с сосредоточенными постоянными C , L и R (рис. 6.2). По закону Ома, для участка цепи $1LR2$ имеем:

$$iR = \Delta\varphi + e_c, \quad (6.3)$$

где i , $\Delta\varphi$, e_c – мгновенные значения соответственно силы тока в цепи, разности потенциалов между обкладками 1 и 2 конденсатора и ЭДС самоиндукции, возникающей в катушке. Разность потенциалов между обкладками конденсатора $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{q}{C}$, ЭДС самоиндукции

$e_c = -L \frac{di}{dt}$. Сила тока связана с зарядом q конденсатора соотношением

$i = -\frac{dq}{dt}$ и $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$. Знак « $-$ » в приведенных выражениях стоит потому, что выбранное положительное направление тока i соответствует уменьшению положительного заряда конденсатора $\left(\frac{dq}{dt} < 0\right)$.

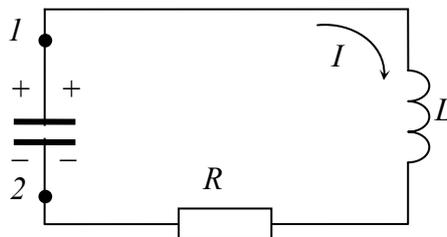


Рис. 6.2

С учетом изложенного уравнение (6.3) примет вид:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на L и введем обозначения:

$$\beta = \frac{R}{2L}; \quad \frac{1}{LC} = \omega_0^2. \quad (6.4)$$

Тогда окончательно будем иметь:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6.5)$$

Полученное уравнение есть линейное дифференциальное уравнение второго порядка с обыкновенными производными и с постоянными коэффициентами. Точно такое же уравнение можно получить для напряжения и силы тока. Отметим, что колебания, описываемые линейными дифференциальными уравнениями, называются **линейными колебаниями**, а соответствующие колебательные системы – **линейными системами**.

Для того чтобы задача была определенной, необходимо задать начальные условия (в данном случае их должно быть два). Предположим, что отсчет времени начинается с момента замыкания контура (см. рис. 6.1) и обозначим величину заряда конденсатора в этот момент через q_m . Тогда при $t = 0$ имеем: $q = q_m$ и $i = \frac{dq}{dt} = 0$.

Предположим, что сопротивление контура $R = 0$ (*идеальный* колебательный контур). Тогда уравнение колебаний (6.5) примет более простой вид:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0. \quad (6.6)$$

Решением этого уравнения является выражение:

$$q = q_m \cos(\omega_0 t + \alpha).$$

Полагая начальную фазу $\alpha = 0$, будем иметь:

$$q = q_m \cos \omega_0 t. \quad (6.7)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с циклической частотой, определяемой выражением:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}. \quad (6.8)$$

Эта частота называется **собственной частотой контура**. Для периода колебаний получается так называемая *формула Томсона*:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (6.9)$$

Напряжение на конденсаторе изменяется по закону

$$U_C = \frac{q_M}{C} = U_M \cos \omega_0 t, \quad (6.10)$$

где $U_M = \frac{q_M}{C}$ – амплитуда напряжения, равная начальному напряжению на конденсаторе.

Сила тока в контуре равна:

$$i = -\frac{dq}{dt} = q_M \omega_0 \sin \omega_0 t = I_M \sin \omega_0 t, \quad (6.11)$$

где $I_M = q_M \omega_0$ – амплитудное значение силы тока. Разность фаз между колебаниями заряда и силы тока составляет $\frac{\pi}{2}$, причем колебания силы тока отстают по фазе.

В случае идеального колебательного контура энергия электрического поля конденсатора полностью превращается в энергию магнитного поля катушки и наоборот:

$$\frac{1}{2}CU_M^2 = \frac{1}{2}LI_M^2. \quad (6.12)$$

Из этого равенства следует, что

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{\frac{L}{C}}}. \quad (6.13)$$

Это соотношение между амплитудными значениями силы тока и напряжения аналогично закону Ома. Величина

$$R_{\text{волн}} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad (6.14)$$

называется **волновым сопротивлением контура**.

6.3. Свободные затухающие колебания

Когда сопротивление контура $R \neq 0$, колебания описываются полным дифференциальным уравнением (6.5).

При условии, что $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$, т. е. когда $\omega_0^2 > \beta^2$ ($\beta = \frac{R}{2L}$), решение уравнения (6.5) имеет вид:

$$q = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \alpha_0), \quad (6.15)$$

где $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$, или с учетом формулы (6.4) получим:

$$\omega' = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (6.16)$$

Таким образом, частота затухающих колебаний меньше собственной частоты ω_0 . Величина

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (6.17)$$

называется **коэффициентом затухания**.

Амплитуда A колебаний заряда q конденсатора, как видно из уравнения (6.15), выражается формулой:

$$A = A_0 e^{-\beta t}. \quad (6.18)$$

Зависимость $q = q(t)$ на рис. 6.3 показана сплошной линией, а зависимости амплитуды затухающих колебаний от времени – пунктирными линиями. Промежуток времени $\tau = \frac{1}{\beta}$, в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшится в e раз, называется **временем релаксации**.

Разность потенциалов $\Delta\varphi$ между обкладками конденсатора пропорциональна заряду q . Поэтому

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C} = \frac{A_0}{C} e^{-\beta t} \sin(\omega' t + \alpha_0). \quad (6.19)$$

Чтобы найти выражение для силы тока в контуре, продифференцируем уравнение (6.15) по времени:

$$i = -\frac{dq}{dt} = A_0 e^{-\beta t} \left[\frac{R}{2L} \sin(\omega' t + \alpha_0) - \omega' \cos(\omega' t + \alpha_0) \right]. \quad (6.20)$$

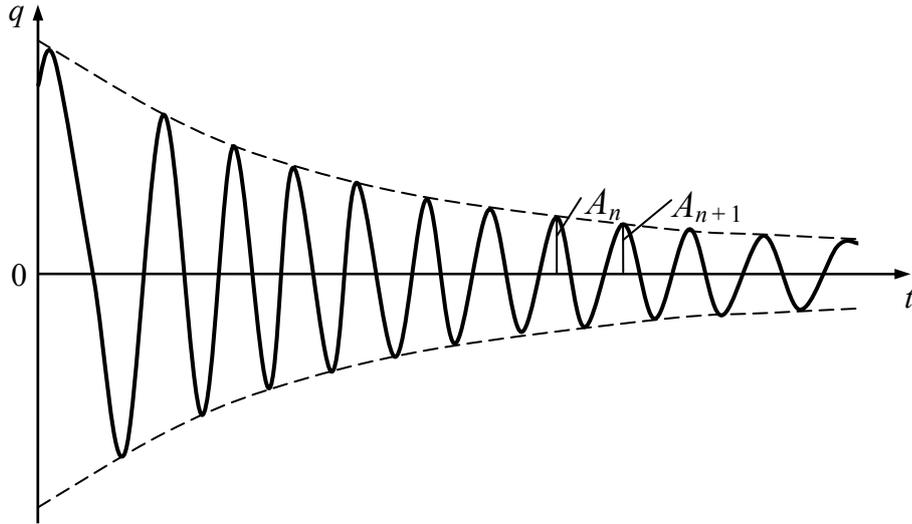


Рис. 6.3

В начальный момент времени ($t = 0$) заряд конденсатора $q = q_m$, и сила тока $i = \frac{dq}{dt} = 0$. Тогда из уравнений (6.15) и (6.20) будем иметь:

$$A_0 \sin \alpha_0 = 0; \quad \frac{R}{2L} \sin \alpha_0 - \omega' \cos \alpha_0 = 0,$$

откуда для начальной фазы α_0 и начальной амплитуды A_0 получим следующие выражения:

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\omega'}{\beta} = \frac{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}{\frac{R}{2L}} = \sqrt{\frac{4L}{R^2 C} - 1}; \quad A_0 = \frac{q_m}{\sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}}.$$

Таким образом, начальная фаза и амплитуда колебаний в контуре существенным образом зависят от его параметров: емкости, индуктивности и сопротивления.

Затухание нарушает периодичность колебаний, поэтому затухающие колебания не являются периодическими и, строго говоря, к ним не применимо понятие периода или частоты. Однако если затухание мало, то можно условно пользоваться понятием периода как промежутка времени между двумя последующими максимумами (или минимумами) колеблющейся физической величины (рис. 6.3). Условный период затухания колебаний с учетом формулы (6.16) равен:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}. \quad (6.21)$$

Затухание колебаний характеризуют *логарифмическим декрементом* затухания:

$$\delta = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} = \beta T' = \frac{T'}{\tau} = \frac{1}{N_e}, \quad (6.22)$$

где N_e – число полных колебаний, совершаемых за время τ , в течение которого амплитуда уменьшается в e раз.

Так как $\beta = \frac{R}{2L}$, а $T' = \frac{2\pi}{\omega'}$, то

$$\delta = \frac{R}{2L} \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{\pi R}{L\omega'}. \quad (6.23)$$

Условная частота ω' , а следовательно, и логарифмический декремент затухания δ определяются параметрами контура L , C , R . Таким образом, логарифмический декремент затухания является характеристикой контура. Если затухание невелико ($\beta^2 \ll \omega_0^2$), то в формуле (6.21) можно положить $\omega' \approx \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Тогда

$$\delta = \frac{\pi R \sqrt{LC}}{L} = \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}. \quad (6.24)$$

Колебательный контур часто характеризуют его *добротностью* Q , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\delta} = \pi N_e. \quad (6.25)$$

Из приведенной формулы следует, что добротность контура тем выше, чем большее число колебаний успевают совершиться, пока амплитуда уменьшится в e раз.

В случае слабого затухания

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.26)$$

При слабом затухании добротность контура как колебательной системы может быть определена по формуле:

$$Q = 2\pi \frac{W}{\Delta W}, \quad (6.27)$$

где W – энергия, запасенная в контуре в данный момент времени; ΔW – убыль этой энергии за один период колебаний.

Если $\omega_0^2 \leq \beta^2$, то происходит апериодический разряд конденсатора. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется **критическим сопротивлением** R_k . Из равенства $\frac{1}{LC} = \frac{R_k^2}{4L^2}$ находим, что

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (6.28)$$

6.4. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение

Электрическое сопротивление R любого колебательного контура при обычных условиях отлично от нуля. Поэтому свободные электромагнитные колебания в контуре постепенно затухают. Чтобы колебания были незатухающими, необходимо извне подводить к контуру энергию, компенсирующую ее потери на ленту – джоулево тепло. В этом случае в колебательном контуре будут происходить уже не свободные, а *вынужденные* электромагнитные колебания. Для практического осуществления таких колебаний необходимо включить в контур источник электрической энергии, ЭДС которого периодически изменяется.

Рассмотрим простейший случай вынужденных электромагнитных колебаний в контуре, происходящих под действием синусоидальной ЭДС:

$$e = \mathcal{E}_m \sin \omega t, \quad (6.29)$$

где \mathcal{E}_m – амплитудное значение ЭДС; ω – циклическая частота. Этот случай важен в практическом отношении, т. к. все технические генераторы переменного тока вырабатывают ЭДС, изменяющуюся по закону, очень близкому к синусоидальному, и поэтому создаваемые ими

токи практически являются синусоидальными. С другой стороны, этот случай является и достаточно общим, поскольку по теореме Фурье любую непрерывную периодическую функцию можно представить в виде суммы (конечной или бесконечной) простых синусоидальных функций, имеющих различные амплитуды, начальные фазы и циклические частоты. Таким образом, синусоидальные, или гармонические, колебания одновременно являются и важным, и самым простым типом колебаний.

Для получения дифференциального уравнения, описывающего вынужденные электромагнитные колебания, необходимо в законе Ома (6.3) заменить мгновенное значение ЭДС e суммой мгновенных значений вынуждающей ЭДС и ЭДС самоиндукции $e_c = -L \frac{di}{dt}$:

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = -\mathcal{E}_m \sin \omega t. \quad (6.30)$$

Произведя преобразования, получим уравнение:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = -\frac{\mathcal{E}_m}{L} \sin \omega t. \quad (6.31)$$

Здесь ω_0^2 и β определяются формулами $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ и $\beta = \frac{R}{2L}$.

Полное решение неоднородного линейного дифференциального уравнения (6.31) равно сумме полного решения соответствующего однородного линейного уравнения (выражение (6.15)) и частного решения уравнения (6.31). Величина первого члена этой суммы обычно быстро убывает с течением времени, т. к. он характеризует свободные затухающие колебания в контуре. Поэтому вскоре после начала колебаний влиянием этого члена можно пренебречь. Частным решением уравнения (6.31) является выражение вида:

$$q = q_m \cos(\omega t + \varphi), \quad (6.32)$$

которое описывает установившиеся вынужденные колебания в контуре. Продифференцировав выражение (6.32) по t , найдем силу тока в контуре при установившемся режиме:

$$i = -\frac{dq}{dt} = I_m \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.33)$$

Задача состоит в отыскании таких значений амплитуды силы тока I_m и начальной фазы φ , чтобы выражение (6.33) обращало уравнение (6.31) в тождество.

Можно показать (это будет сделано позже на основе метода векторных диаграмм), что I_M и φ при этом определяются формулами:

$$I_M = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}; \quad (6.34)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (6.35)$$

Таким образом, из формул (6.34) и (6.35) следует, что в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой, равной частоте вынуждающей ЭДС, и являются гармоническими. Амплитудное значение силы тока I_M и фаза φ , как видно из формул (6.34) и (6.35), также зависят от ω .

6.5. Переменный ток. Закон Ома для переменного тока

Установившиеся вынужденные электромагнитные колебания можно рассматривать как протекание переменного тока в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор.

Рассмотрим последовательно процессы, происходящие в цепи, содержащей резистор, катушку индуктивности и конденсатор, когда в ней действует генератор переменного тока. Предположим, что в цепи существует переменный ток

$$i = I_M \sin \omega t. \quad (6.36)$$

1. Резистор в цепи переменного тока (рис. 6.4).

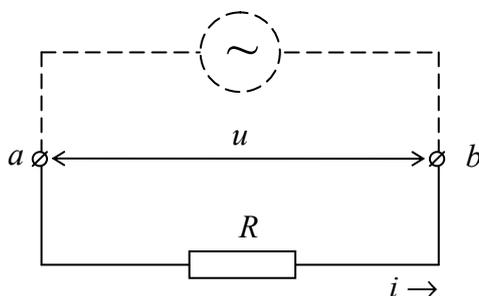


Рис. 6.4

Применяя к участку aRb закон Ома, имеем:

$$u = iR = I_m R \sin \omega t = U_m \sin \omega t, \quad (6.37)$$

где $U_m = I_m R$ – амплитудное значение напряжения на резисторе. Таким образом, напряжение на резисторе также изменяется по закону синуса, причем разность фаз между колебаниями тока и напряжения равна нулю.

При сложении гармонических колебаний для определения амплитуд и фазовых соотношений часто используют метод векторных диаграмм. Сущность этого метода состоит в следующем. Гармоническое колебание изображают с помощью вектора \vec{A} , модуль которого равен амплитуде колебания и который равномерно вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω , равной циклической частоте колебаний. Кроме того, при $t = 0$ вектор амплитуды составляет с выбранным направлением OX (опорной осью) угол α , равный начальной фазе колебаний (рис. 6.5).

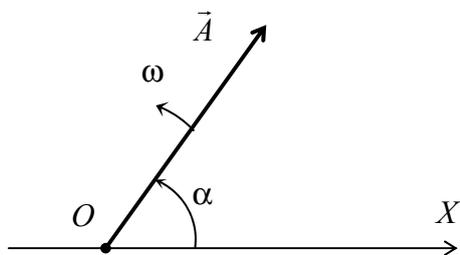


Рис. 6.5

Применим этот метод к данному случаю. Выберем опорную ось таким образом, чтобы вектор, изображающий колебания силы тока, был направлен вдоль этой оси – **оси токов**. Тогда вектор, изображающий колебания напряжения, также будет направлен вдоль оси токов, т. к. разность фаз между током и напряжением равна нулю (рис. 6.6).

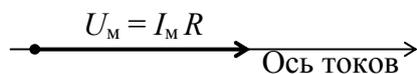


Рис. 6.6

Длина этого вектора (в выбранном масштабе) равна амплитуде напряжения на резисторе $U_m = I_m R$.

2. *Емкость в цепи переменного тока.* Предположим, что участок цепи (рис. 6.7) содержит только конденсатор емкостью C ($L \rightarrow 0$;

$R \rightarrow 0$). Конденсатор не представляет собой разрыва в цепи переменного тока, т. к. в диэлектрике конденсатора цепь замыкается токами смещения.

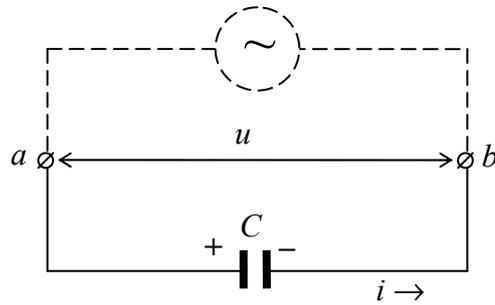


Рис. 6.7

Установим, по какому закону в данном случае будет изменяться напряжение на концах этого участка. Обозначим разность потенциалов точек a и b через $\varphi_1 - \varphi_2 = u$ и будем считать заряд конденсатора q и силу тока i положительными, если они соответствуют рисунку. Тогда $u = \frac{q}{C}$. Но $i = \frac{dq}{dt}$, и, следовательно,

$$q = \int i dt.$$

Если в цепи сила тока изменяется по закону

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (6.38)$$

то $q = \int I_m \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t + q_0$, где q_0 – постоянный заряд, не связанный с колебаниями тока, поэтому можно положить $q_0 = 0$. Следовательно,

$$u = -\frac{I_m}{\omega C} \cos \omega t = \frac{I_m}{\omega C} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = U_{mC} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.39)$$

Сравнивая выражения (6.38) и (6.39), видим, что напряжение на конденсаторе также изменяется по закону синуса, однако колебания напряжения на конденсаторе отстают по фазе от колебаний тока на $\frac{\pi}{2}$.

Полученный результат имеет простой физический смысл. Напряжение на конденсаторе в некоторый момент времени определяется существующим зарядом конденсатора. Но этот заряд возникает под действием тока, протекающего на более ранней стадии колебаний.

Из формулы (6.39) следует, что амплитудное значение напряжения на конденсаторе равно:

$$U_{\text{мс}} = I_{\text{м}} \frac{1}{\omega C},$$

где величина

$$X_C = \frac{1}{\omega C} \quad (6.40)$$

называется **реактивным емкостным сопротивлением** (или **емкостным сопротивлением**); $[X_C] = \frac{1}{1 \text{ Ф} \cdot \text{с}^{-1}} = 1 \frac{\text{В}}{\text{Кл} \cdot \text{с}^{-1}} = 1 \frac{\text{В}}{\text{А}} = 1 \Omega$. В случае постоянного тока ($\omega = 0$) $X_C = \infty$, т. е. конденсатор представляет собой разрыв цепи.

Полученные результаты представлены на векторной диаграмме (рис. 6.8).

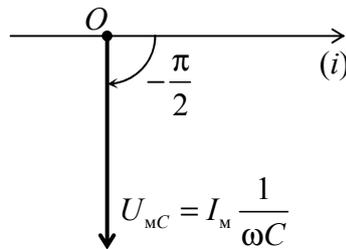


Рис. 6.8

Вектор, изображающий колебания напряжения $U_{\text{мс}}$, повернут относительно оси токов в отрицательном направлении (по часовой стрелке) на угол $\frac{\pi}{2}$. Длина этого вектора (в определенном масштабе) равна амплитуде напряжения $U_{\text{мс}} = I_{\text{м}} \frac{1}{\omega C}$.

3. *Индуктивность в цепи переменного тока* ($R \rightarrow 0$; $X_C \rightarrow 0$) (рис. 6.9).

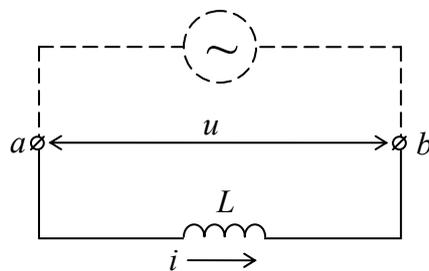


Рис. 6.9

Обозначим по-прежнему разность потенциалов точек a и b через $u = \varphi_1 - \varphi_2$ и будем считать ток i положительным, если он направлен от a к b . При наличии переменного тока в катушке индуктивности возникнет ЭДС самоиндукции $e_c = -L \frac{di}{dt}$. По закону Ома для мгновенных значений величин, имеем:

$$u = iR - e_c.$$

В данном случае $R = 0$. Поэтому

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Если сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = I_m \sin \omega t, \quad (6.41)$$

то мгновенное значение напряжения

$$u = I_m \omega L \cos \omega t = I_m \omega L \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right) = U_{mL} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right). \quad (6.42)$$

Сравнивая формулы (6.41) и (6.42), видим, что колебания напряжения на катушке опережают по фазе колебания силы тока на $\frac{\pi}{2}$. Причина этого состоит в следующем. Если сопротивление участка равно нулю, то приложенное напряжение в точности уравновешивает ЭДС самоиндукции и поэтому равно ей с обратным знаком. Но e_c пропорциональна не мгновенному значению силы тока, а скорости его изменения, которая будет наибольшей в те моменты времени, когда сила тока принимает нулевые значения. Поэтому максимумы напряжения совпадают с нулевыми значениями силы тока и наоборот.

Из формулы (6.42) следует, что амплитудное значение напряжения на катушке равно:

$$U_{mL} = I_m \omega L,$$

где величина

$$X_L = \omega L \quad (6.43)$$

играет роль сопротивления участка. Поэтому X_L называют **реактивным индуктивным сопротивлением** (или **индуктивным сопротивлением**); $[X_L] = 1 \text{ Гн} \cdot \text{с}^{-1} = 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}} \text{с}^{-1} = 1 \frac{\text{В}}{\text{А}} = 1 \Omega$. На векторной

диаграмме (рис. 6.10) вектор, изображающий колебания напряжения, повернут относительно оси токов (i) в противоположном направлении (против часовой стрелки) на угол $\frac{\pi}{2}$.

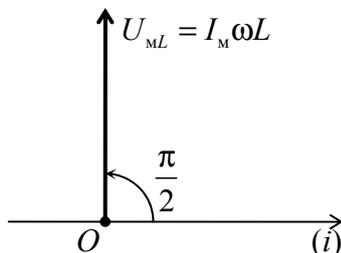


Рис. 6.10

Длина этого вектора (в определенном масштабе) равна амплитудному значению напряжения $U_{ML} = I_M \omega L$.

Проволочные катушки (с ферромагнитными сердечниками или без них), обладающие большой индуктивностью, носят название **дросселей**. Эти устройства используются для регулирования силы тока в цепях переменного тока. По сравнению с реостатами дроссели имеют важное преимущество: увеличение сопротивления цепи при их включении не сопровождается увеличением лентжовулева тепла, а следовательно, не приводит к бесполезной затрате энергии.

4. Пользуясь полученными результатами, можно найти соотношения между колебаниями силы тока и напряжения в любой цепи. Наиболее общий случай неразветвленной цепи переменного тока представляет собой цепь, состоящая из последовательно соединенных резистора сопротивлением R , катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C (рис. 6.11, *a*). По-прежнему будем предполагать, что сила тока в цепи изменяется по закону

$$i = I_M \sin \omega t, \quad (6.44)$$

и определим напряжение между концами a и b цепи. Искомое напряжение равно сумме трех напряжений: на резисторе, на катушке индуктивности и на конденсаторе, причем каждое из них, как видно из ранее изложенного, изменяется во времени по закону синуса.

Для сложения этих трех гармонических колебаний воспользуемся векторной диаграммой амплитуд напряжений (рис. 6.11, *б*).

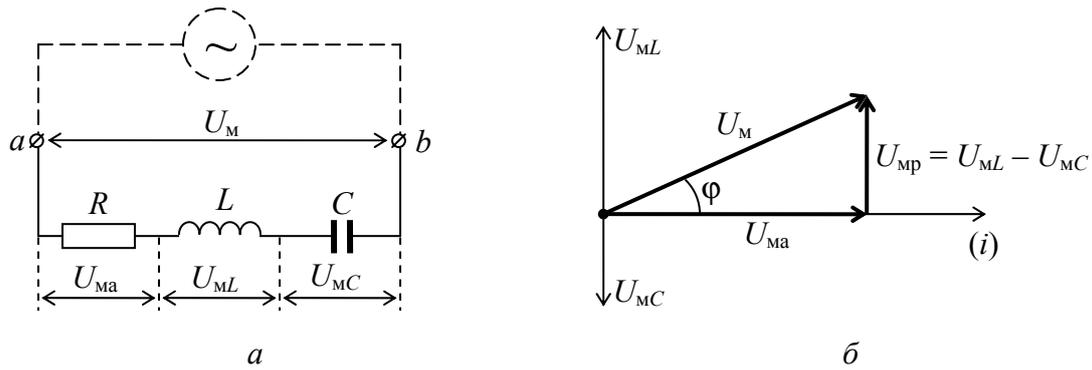


Рис. 6.11

Колебания напряжения на резисторе изображаются на диаграмме вектором $U_{ма} = I_M R$, направленным вдоль оси токов (i), колебания же напряжения на катушке и конденсаторе – векторами, перпендикулярными к оси токов, с длинами $I_M \omega L$ и $I_M \frac{1}{\omega C}$. Складывая два последних колебания, получаем одно гармоническое колебание, изображаемое вектором $U_{мп}$, перпендикулярным к оси токов и имеющим длину

$$I_M \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right).$$

Таким образом, напряжение между концами цепи a и b можно рассматривать как сумму двух гармонических колебаний: напряжения u_a , совпадающего по фазе с током, и напряжения u_p , отличающегося по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Первое из них называется **активной составляющей** напряжения, а второе – **реактивной составляющей**. Оба эти колебания, складываясь, дают также гармоническое колебание:

$$u = U_M \sin(\omega t + \varphi). \quad (6.45)$$

Это колебание изображается на диаграмме (рис. 6.11, б) векторной суммой векторов $U_{ма}$ и $U_{мп}$, причем длина результирующего вектора равна амплитуде напряжения U_M , а угол, образованный результирующим вектором с осью токов, – сдвигу фазы φ . Из треугольника напряжений следует, что

$$U_M = I_M \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

откуда амплитудное значение силы тока в цепи

$$I_M = \frac{U_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_M}{Z}, \quad (6.46)$$

где величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad (6.47)$$

называется **полным сопротивлением цепи**, или **импедансом**, а величина

$$X_p = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

называется **реактивным сопротивлением**.

Уравнение (6.46) выражает **закон Ома для цепи переменного тока**. Надо иметь в виду, что уравнение (6.46) справедливо только для амплитудных значений тока I_M и напряжения U_M и для их действующих значений ($I = I_M/\sqrt{2}$ и $U = U_M/\sqrt{2}$), но не для мгновенных значений этих величин.

Если каждую сторону треугольника напряжений (рис. 6.11, б) разделить на I_M , то получим треугольник сопротивлений, из которого следует, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_p}{R} = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (6.48)$$

Из этой формулы следует, что ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$), когда преобладает емкостное сопротивление $\left(\omega L < \frac{1}{\omega C}\right)$.

В замкнутой цепи (рис. 6.11, а) можно считать, что R представляет собой суммарное активное сопротивление цепи, включая и внутреннее сопротивление генератора, а C и L – емкость и индуктивность цепи, и заменить реальный генератор воображаемым, у которого внутреннее сопротивление равно нулю. При этом напряжение U между точками a и b будет равно ЭДС \mathcal{E} генератора. Отсюда следует, что формулы, приведенные в этом пункте, справедливы и для замкнутой цепи переменного тока, если под R , C и L понимать их значения для всей цепи и заменить во всех формулах напряжение U на ЭДС \mathcal{E} генератора.

6.6. Работа и мощность переменного тока

Предположим сначала, что цепь имеет только активное сопротивление R . В этом случае вся работа тока полностью превращается в тепло. Если напряжение, приложенное к цепи, задается выражением

$$u = U_M \sin \omega t,$$

а сдвиг фаз между током и напряжением равен нулю, то сила тока

$$i = I_M \sin \omega t.$$

Поэтому мгновенная мощность переменного тока

$$P(t) = ui = U_M I_M \sin^2 \omega t.$$

Обычно необходимо знать не мгновенное значение мощности, а ее среднее значение за один период T . Работа переменного тока за промежуток времени dt

$$P(t)dt = U_M I_M \sin^2 \omega t dt.$$

Следовательно, работа A_T за время, равное периоду колебаний T , выразится формулой:

$$A_T = U_M I_M \int_0^T \sin^2 \omega t dt.$$

Но $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T \left(1 - \cos \frac{4\pi}{T} t\right) dt = \frac{1}{2} T$. Поэтому

$$A_T = \frac{1}{2} U_M I_M T.$$

Отсюда для средней мощности получим:

$$P = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} U_M I_M.$$

Так как $U_M = I_M R$, то можно записать:

$$P = \frac{1}{2} U_M I_M = \frac{1}{2} I_M^2 R = \frac{1}{2} \frac{U_M^2}{R}. \quad (6.49)$$

Обозначим через I и U силу и напряжение постоянного тока, который выделяет в сопротивлении R то же количество теплоты, что и данный переменный ток. Тогда

$$P = UI = I^2 R = \frac{U^2}{R}. \quad (6.50)$$

Сравнивая эти выражения с выражениями для мощности переменного тока, имеем:

$$I = \frac{I_M}{\sqrt{2}}; \quad U = \frac{U_M}{\sqrt{2}}, \quad (6.51)$$

где I и U – действующие (эффективные) значения соответственно силы переменного тока и напряжения.

Пользуясь эффективными значениями, среднюю мощность переменного тока можно выразить теми же формулами (см. выражение (6.50)), что и мощность постоянного тока.

Вольтметры и амперметры различных систем, предназначенных для работы в цепях синусоидальных токов, градуируются так, чтобы они непосредственно измеряли действующие значения напряжения и силы тока.

При произвольной форме периодически изменяющегося напряжения его действующее значение

$$U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2 dt}. \quad (6.52)$$

Рассмотрим общий случай, когда цепь содержит не только активные, но и реактивные сопротивления. Теперь между током и напряжением существует разность фаз, что существенно меняет дело. Напряжение, приложенное к цепи (см. рис. 6.11, б), можно разложить на две составляющие: активную $u_a = U_M \cos \varphi \sin \omega t$, изменяющуюся в фазе с силой тока, и реактивную $u_p = U_M \sin \varphi \sin(\omega t \pm \pi/2)$, смещенную по фазе относительно тока на $\pm \frac{\pi}{2}$. Поэтому при вычислении работы за период T получим тоже два слагаемых. Одно из них, обусловленное реактивной составляющей напряжения, равно нулю, т. к.

$$\int_0^T \sin \varphi \sin(\omega t \pm \pi/2) dt = \pm \int_0^T \sin \varphi \cos \omega t dt = 0.$$

Таким образом, полная работа за период T определяется только активной составляющей напряжения:

$$A_T = U_M I_M \cos \varphi \int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} U_M I_M T \cos \varphi.$$

Поэтому средняя мощность

$$P = \frac{A_T}{T} = \frac{1}{2} U_M I_M \cos \varphi.$$

Выражение средней мощности (ее называют также *активной*) через действующие значения силы тока и напряжения имеет вид:

$$P = UI \cos \varphi. \quad (6.53)$$

Входящий в это выражение множитель $\cos \varphi$ называется **коэффициентом мощности**. Из формулы (6.53) следует, что в общем случае выделяемая в цепи мощность зависит не только от силы тока и напряжения, но и от сдвига фаз между током и напряжением.

Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos \varphi = 0$, и средняя мощность равна нулю, как бы ни были велики сила тока и напряжение. В этом случае величина энергии, передаваемой за $\frac{1}{4}T$ от генератора во внешнюю цепь, в точности равна энергии, передаваемой из внешней цепи в генератор в течение следующей четверти периода, и вся энергия колеблется между генератором и внешней цепью.

На практике всегда стремятся распределить нагрузку (лампы, двигатели, электропечи и др.) таким образом, чтобы $\cos \varphi$ был по возможности близок к единице.

6.7. Резонанс напряжений

Резонанс напряжений наблюдается в цепи (рис. 6.12), содержащей последовательно соединенные генератор, конденсатор емкостью C , катушку индуктивностью L и активное сопротивление R . Такая электрическая цепь называется **последовательным контуром**.

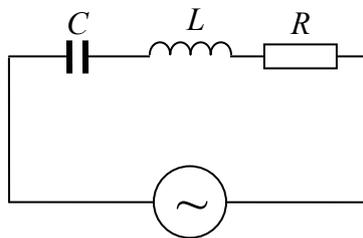


Рис. 6.12

Если ЭДС генератора изменяется по гармоническому закону: $e = \mathcal{E}_M \sin \omega t$ (\mathcal{E}_M – амплитудное значение ЭДС; $\omega = 2\pi\nu$ – циклическая

частота; ν – частота, измеряемая в герцах), то, согласно закону Ома для переменного тока, амплитуда силы тока

$$I_M = \frac{\mathcal{E}_M}{Z} = \frac{\mathcal{E}_M}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (6.54)$$

Сдвиг фаз φ между силой тока и ЭДС определяется формулой:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (6.55)$$

Амплитуда силы тока в контуре, как видно из формулы (6.54), зависит не только от параметров цепи R , L и C и амплитуды \mathcal{E}_M генератора, но и от циклической частоты ω . Предположим, что параметры R , L , C и \mathcal{E}_M останутся неизменными, и исследуем зависимость полного сопротивления Z контура и силы тока в нем от частоты ω . Если $\omega = 0$, то $X_C = \frac{1}{\omega C} = \infty$ и $Z = \infty$, а $I_M = 0$. Это и понятно, т. к. $\omega = 0$ соответствует постоянному току, а конденсатор разрывает цепь постоянного тока. При увеличении частоты ω квадрат реактивного сопротивления $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ сначала уменьшается. Поэтому и сопротивление уменьшается, а амплитуда силы тока I_M увеличивается. При частоте ω_p , называемой *резонансной*, реактивное сопротивление $\left(\omega_p L - \frac{1}{\omega_p C}\right)$ обращается в нуль, т. е.

$$\omega_p L = \frac{1}{\omega_p C}, \quad (6.56)$$

откуда резонансная циклическая частота, совпадающая с собственной частотой контура ω_0 ,

$$\omega_p = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (6.57)$$

При выполнении условия (6.55) сопротивление Z становится наименьшим, равным активному сопротивлению цепи:

$$Z_{\min} = R,$$

а сила тока достигает максимума.

Следует отметить, что частота ω_0 , при которой наступает резонанс, не равна условной частоте колебаний в контуре $\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$. Однако в большинстве практических случаев $\omega_0^2 \gg \beta^2$ ($\beta = \frac{R}{2L}$ – коэффициент затухания), и поэтому с хорошим приближением различием между ω_0 и ω' можно пренебречь.

Если $\omega > \omega_p$, то квадрат реактивного сопротивления $\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2$ возрастает с увеличением частоты ω (из-за увеличения индуктивного сопротивления $X_L = \omega L$). В соответствии с этим сопротивление Z возрастает, а амплитуда силы тока I_M уменьшается, асимптотически приближаясь к нулю при увеличении частоты ω .

На рис. 6.13 приведена зависимость полного сопротивления Z контура от частоты ω .

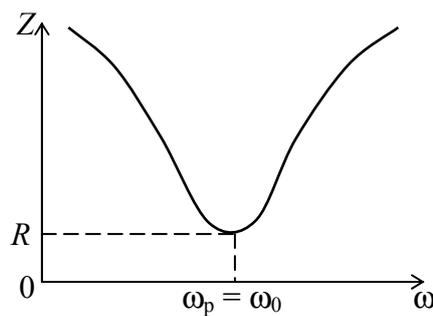


Рис. 6.13

Зависимость I_M от ω графически изображена на рис. 6.14, где показаны две кривые, соответствующие двум разным значениям активного сопротивления R .

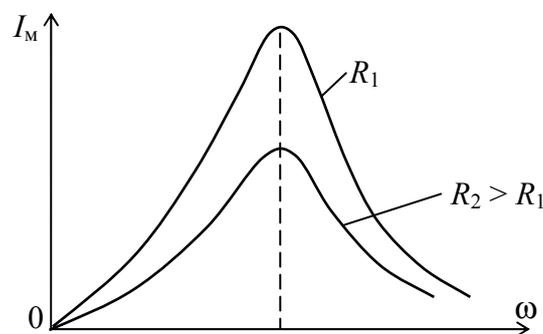


Рис. 6.14

Из изложенного следует, что резонанс будет тем более ярко выраженным, чем меньше активное сопротивление цепи, включающее и внутреннее сопротивление генератора. Следовательно, для осуществления резонанса напряжений следует использовать источники ЭДС с малым внутренним сопротивлением.

Обратимся теперь к разности фаз φ между током и ЭДС. Из выражения (6.55) видно, что при малых частотах, когда $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$,

$\operatorname{tg}\varphi$ велик и отрицателен, а следовательно, $\varphi \approx -\frac{\pi}{2}$. В этом случае ток

опережает по фазе ЭДС и в цепи преобладает емкостное сопротивление. При увеличении частоты разность фаз φ уменьшается. Если $\omega = \omega_p = \omega_0$, то $\operatorname{tg}\varphi = 0$, а значит, $\varphi = 0$. По мере дальнейшего увеличения частоты ω цепь приобретает индуктивный характер, и ток отстает по фазе от ЭДС, причем угол φ асимптотически стремится к предельному значению $+\frac{\pi}{2}$. Так же как амплитуда силы тока I_m , угол φ зависит и от активного сопротивления R контура. Чем меньше R , тем быстрее изменяется φ вблизи ω_p , и в предельном случае, при $R = 0$, изменение фазы становится скачкообразным.

Колебательный контур можно настроить в резонанс не только путем изменения частоты ЭДС при фиксированных параметрах контура, но и изменяя его собственную частоту путем изменения индуктивности или емкости при фиксированной частоте ЭДС.

Чему равны амплитуды напряжения на отдельных элементах контура при резонансе? Амплитудное значение силы тока при резонансе достигает максимума:

$$(I_m)_{\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R}. \quad (6.58)$$

Поэтому амплитуда напряжения на конденсаторе

$$(U_{mC})_{\text{рез}} = (I_m)_{\text{рез}} (X_C)_{\text{рез}} = \frac{\mathcal{E}_m}{R} \frac{1}{\omega_p C}.$$

С учетом формулы (6.57) будем иметь:

$$(U_{mC})_{\text{рез}} = \mathcal{E}_m \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_m Q, \quad (6.59)$$

где Q – добротность контура. Аналогично амплитудное значение напряжения на катушке индуктивности равно:

$$(U_{ML})_{\text{рез}} = (I_M)_{\text{рез}} \omega_p L = \mathcal{E}_M \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_M Q. \quad (6.60)$$

Формулы (6.59) и (6.60) верны лишь при достаточно больших значениях Q , т. е. в случае, когда затухание свободных колебаний в контуре мало.

Из изложенного следует, что амплитудные значения напряжения на катушке L и конденсаторе C при резонансе одинаковы. Однако $(U_{ML})_{\text{рез}}$ опережает $(U_{MC})_{\text{рез}}$ по фазе на π . Поэтому их сумма равна нулю, а напряжение на активном сопротивлении равно ЭДС \mathcal{E}_M источника энергии:

$$(U_R)_{\text{рез}} = (I_M)_{\text{рез}} R = \frac{\mathcal{E}_M}{R} R = \mathcal{E}_M. \quad (6.61)$$

Векторная диаграмма для резонанса напряжений приведена на рис. 6.15.

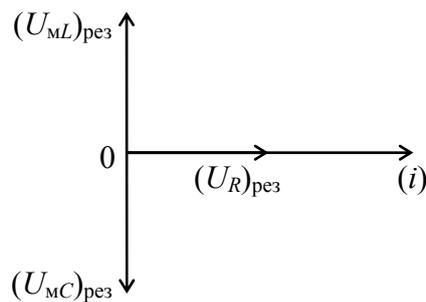


Рис. 6.15

Итак, при настройке последовательного колебательного контура в резонанс напряжения на его отдельных элементах достигают максимальных значений, чем и обусловлено название «резонанс напряжений».

Если вынуждающая ЭДС \mathcal{E} представляет собой сумму синусоидальных ЭДС \mathcal{E}_{mi} с различными циклическими частотами ω_i , то благодаря явлению электрического резонанса контур сильнее всего реагирует на ту составляющую ЭДС, частота ω которой равна или близка к резонансной частоте $\omega_{\text{рез}}$ контура. Поэтому сила тока в контуре будет определяться указанной составляющей ЭДС. На этом основаны все радиоприемные устройства, неотъемлемой частью которых является колебательный контур, резонансную частоту которого можно менять, изменяя его емкость

или индуктивность. Ясно, что чем больше добротность Q контура (добротность радиотехнических контуров составляет 200–300), тем выше уровень полезного (выделенного) сигнала. Однако колебательный контур при настройке его в резонанс должен не только осуществлять выделение нужного сигнала, но и пропускать без заметного ослабления все составляющие спектра этого сигнала. Поэтому он должен обладать достаточно широкой полосой пропускания $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ($\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1$) (рис. 6.16), которая связана с добротностью следующим образом:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_{\text{рез}}}{Q}. \quad (6.62)$$

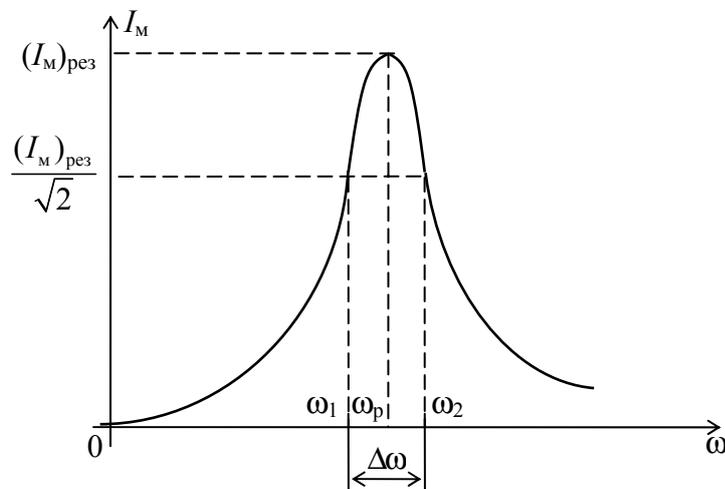


Рис. 6.16

Отсюда следует, что полоса пропускания контура убывает с ростом добротности.

Явление резонанса напряжений необходимо учитывать при выборе изоляции электрических линий, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, т. к. иначе может произойти их пробой.

При резонансе ($\omega_p = \omega_0$) сила тока в цепи достигает максимального значения, а $\cos\varphi = 1$. Следовательно, для резонанса напряжений характерно еще и то, что энергия, передаваемая в контур от генератора, имеет наибольшее значение.

7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

7.1. Вихревое электрическое поле

Из основного закона электромагнитной индукции $\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi_m}{dt}$ следует, что *любое* изменение сцепленного с замкнутым проводящим контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению ЭДС индукции, в результате чего появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в неподвижном контуре, находящемся в изменяющемся магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникают только тогда, когда в ней на носители зарядов действуют сторонние силы – силы неэлектростатического происхождения.

Опыт показывает, что в данном случае эти сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре, их возникновение нельзя также объяснить действием силы Лоренца, т. к. она не совершает работы над зарядами. Анализируя явление электромагнитной индукции, Д. Максвелл заключил, что всякое изменяющееся во времени магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве *вихревое* электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в контуре. Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется ЭДС индукции, играет второстепенную роль, являясь лишь индикатором, обнаруживающим это поле.

Итак, согласно Д. Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое поле, циркуляция вектора напряженности \vec{E} которого по контуру l равна:

$$\oint_l \vec{E} \cdot \vec{dl} = \mathcal{E}_i = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Частная производная $\frac{\partial \Phi_m}{\partial t}$ учитывает зависимость потока магнитной индукции только от времени.

Подставив в формулу (7.1) выражение для магнитного потока сквозь поверхность S , ограниченную контуром l : $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

($\vec{dS} = dS\vec{n}$ – вектор, модуль которого равен dS , а направление совпадает с положительной нормалью \vec{n} к поверхности S), получим:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}.$$

Так как контур и поверхность неподвижны, то операции дифференцирования и интегрирования можно поменять местами:

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}. \quad (7.2)$$

Формула (7.2) выражает **первое уравнение Максвелла в интегральной форме**.

Напомним, что электрическое поле покоящихся зарядов потенциально. Линии напряженности \vec{E}_q этого поля начинаются и заканчиваются на зарядах, т. е. не замкнуты. Циркуляция \vec{E}_q по любому замкнутому контуру l равна нулю, т. е. $\oint_l \vec{E}_q \cdot d\vec{l} = 0$. Из уравнения (7.2) следует, что электрическое поле \vec{E} , возбуждаемое изменяющимся магнитным полем, как и само магнитное поле, является вихревым. Линии напряженности \vec{E} этого поля замкнуты.

Если рассматриваемый контур проводящий и в нем помимо ЭДС электромагнитной индукции действуют другие ЭДС ($\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$), то для такого контура

$$\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial \Phi_m}{\partial t} + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k. \quad (7.3)$$

Возникновение в пространстве вихревого электрического поля под влиянием переменного магнитного поля используется в индукционном ускорителе электронов – *бетатроне*. Основной его частью является мощный электромагнит ММ (рис. 7.1) с коническими полюсными наконечниками C и D . Между наконечниками расположена ускорительная камера K , имеющая форму тора и откачанная до глубокого вакуума. Обмотка электромагнита питается переменным током, частота которого составляет 400 Гц. Для ускорения может быть использована лишь одна четверть периода: либо первая, либо третья. Изменение (увеличение) силы тока в обмотке электромагнита вызывает в пространстве между его полюсами изменение магнитного поля и возникновение вихревого электрического поля. Магнитное поле симметрично относительно оси OO' . Поэтому силовые линии вихревого электрического поля расположены в плоскости AA , перпендикулярной

к оси OO' и проходящей через середину зазора между полюсами, имеют вид окружностей, центры которых лежат на оси OO' (рис. 7.1). Числовые значения напряженности \vec{E} электрического поля во всех точках каждой силовой линии одинаковы.

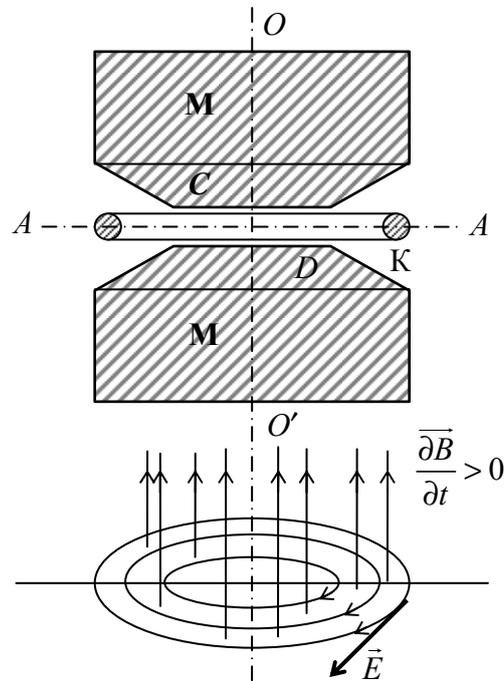


Рис. 7.1

В определенный момент времени, когда $B \approx 0$, в камеру попадает пучок электронов из термоэлектронного излучателя, расположенного внутри камеры. На каждый из электронов будет действовать электрическая сила $e\vec{E}$, направленная по касательной к силовой линии в сторону, противоположную вектору \vec{E} . Обязательным условием ускорения электрона является его непрерывное движение по одной и той же орбите. Для этого полюсным наконечникам придают такую форму, чтобы магнитное поле убывало от центра к периферии по определенному закону.

Существует предел энергий электронов, достижимых с помощью бетатрона. Принципиальное затруднение, возникающее при высоких энергиях, заключается в появлении сильного радиационного торможения – электрон, движущийся с ускорением, излучает электромагнитные волны. Радиационное торможение делает работу бетатрона практически невозможной при энергиях электронов более 500 МэВ.

7.2. Ток смещения

Согласно Д. Максвеллу, если всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве вихревое электрическое поле, то должно существовать и обратное явление: всякое изменение электрического поля должно вызывать появление в окружающем пространстве магнитного поля. Так как магнитное поле всегда связано с электрическим током, то Д. Максвелл назвал переменное электрическое поле, возбуждающее магнитное поле, **током смещения**, в отличие от тока проводимости, обусловленного упорядоченным движением носителей заряда.

По теореме Остроградского – Гаусса, поток смещения сквозь замкнутую поверхность S равен:

$$\Phi_e = \oint \vec{D} \cdot \vec{dS} = q,$$

где q – алгебраическая сумма свободных электрических зарядов, охватываемых замкнутой поверхностью S .

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\Phi_e}{dt} = \frac{d}{dt} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS}. \quad (7.4)$$

Если поверхность S неподвижна и не деформируется, то изменение во времени потока смещения сквозь поверхность S вызывается только изменением электрического смещения \vec{D} с течением времени. Поэтому полную производную, стоящую в правой части выражения (7.4), можно заменить частной производной по времени и внести дифференцирование под знак интеграла:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t} = \oint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS}. \quad (7.5)$$

Правая часть этой формулы имеет размерность силы тока. Из сравнения выражения (7.5) с формулой, связывающей силу тока I и плотность \vec{j} тока проводимости ($I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS}$), следует, что $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ имеет раз-

мерность плотности тока. Поэтому Д. Максвелл назвал величину $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ **плотностью тока смещения**, т. е.

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.6)$$

Таким образом, плотность тока смещения в некоторой точке пространства равна скорости изменения электрического смещения в этой точке.

Током смещения $I_{\text{смещ}}$ сквозь произвольную поверхность S называется физическая величина, численно равная потоку вектора плотности тока смещения сквозь эту поверхность:

$$\begin{aligned} I_{\text{смещ}} &= \int_S \vec{j}_{\text{смещ}} \cdot \vec{dS} = \\ &= \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS} = \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

В диэлектрике вектор электрического смещения \vec{D} , как известно, выражается формулой:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_e,$$

где \vec{P}_e – вектор поляризации, характеризующий действительное смещение электрических зарядов в неполярных молекулах и поворот полярных молекул, находящихся в единице объема диэлектрика. Дифференцируя это выражение по времени, получим:

$$\vec{j}_{\text{смещ}} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t}. \quad (7.8)$$

Слагаемое $\frac{\partial \vec{P}_e}{\partial t}$ представляет собой плотность тока, обусловленного упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещением зарядов или поворотом диполей). Этот ток называется **поляризационным током**. Как и ток проводимости, поляризационный ток связан с потерей энергии на нагревание диэлектрика при его поляризации в переменном электрическом поле. Тепловое действие поляризационного тока используется, в частности, для сушки различных материалов (древесины, кож, зерна и др.). Что касается тока смещения в вакууме (плотность тока смещения в вакууме равна $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$), то он обладает только свойством возбуждать магнитное поле.

Если в каком-либо проводнике существует переменный ток, то в этом проводнике действует как ток проводимости, так и ток смещения, и магнитное поле проводника определяется их суммой, т. е. полным током. Плотность полного тока

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (7.9)$$

В зависимости от электропроводности среды и частоты переменного тока оба слагаемых в уравнении (7.9) играют разную роль. В хорошо проводящих материалах (металлах) и при низких частотах ток смещения по сравнению с током проводимости можно пренебречь. Напротив, в плохо проводящих средах (изоляторах) и при высоких частотах ток смещения играет основную роль. Оба члена в формуле (7.9) могут иметь и одинаковые знаки, и противоположные. Поэтому полный ток может быть как больше, так и меньше тока проводимости, а в частном случае может обращаться в нуль.

Из выражения (7.9) также следует, что в природе все электрические токи (электрические цепи) замкнуты.

Введя понятия тока смещения и полного тока, Д. Максвелл обобщил закон полного тока:

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = I + I_{\text{смещ}}. \quad (7.10)$$

Эта формула называется **вторым уравнением Максвелла в интегральной форме**. Из него следует, что *циркуляция вектора \vec{H} напряженности магнитного поля по произвольному замкнутому контуру l равна алгебраической сумме токов проводимости (а также токов конвекционных) и токов смещения сквозь поверхность*.

Используя изложенное, второе уравнение Максвелла (7.10) можно записать еще в двух эквивалентных формах:

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = I + \frac{\partial \Phi_e}{\partial t}; \quad (7.11)$$

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot \vec{dS}. \quad (7.12)$$

Если магнитное поле возбуждается только током смещения, то

$$\oint_l \vec{H} \cdot \vec{dl} = \int_s \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot \vec{dS}, \quad (7.13)$$

и направления векторов $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ и \vec{H} образуют «правовинтовую» систему (рис. 7.2).

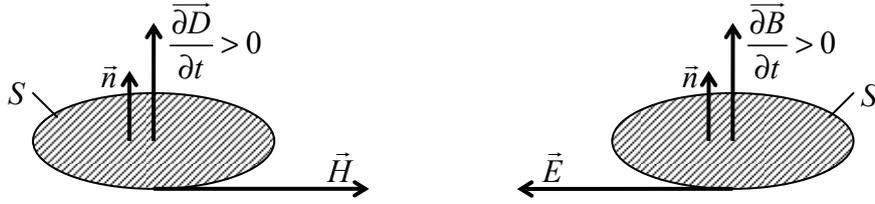


Рис. 7.2

Из первого уравнения Максвелла $\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ следует, что

направления $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и \vec{E} образуют «левовинтовую» систему (рис. 7.2).

Различие в знаках правых частей уравнений Максвелла соответствует требованиям закона сохранения энергии и закона Ленца. В случае одинаковых знаков при $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ и $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ бесконечно малое увеличение одного из полей вызвало бы неограниченное возрастание обоих полей, а бесконечно малое уменьшение одного из полей привело бы к полному исчезновению этих полей.

7.3. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

Введение Д. Максвеллом понятия тока смещения привело его к завершению макроскопической теории электромагнитного поля, позволившей с единой точки зрения объяснить все известные в то время экспериментальные факты и предсказать ряд новых явлений.

В основе теории лежат уравнения Максвелла. В учении об электромагнетизме эти уравнения играют такую же роль, как законы Ньютона в механике или основные законы (начала) в термодинамике.

Из рассмотренных нами первого $\left(\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right)$ и второго

$\left(\oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_s \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \right)$ уравнений следует, что изменяющееся во

времени магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а изменяющееся во времени электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т. е. электрические и магнитные поля неразрывно связаны друг с другом – они создают единое электромагнитное поле.

Третье уравнение Максвелла выражает теорему Остроградского – Гаусса для потока вектора электрического смещения \vec{D} сквозь произвольную замкнутую поверхность S , охватывающую суммарный свободный заряд $q_{\text{своб}}$:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = q_{\text{своб}}. \quad (7.14)$$

Д. Максвелл обобщил теорему Остроградского – Гаусса, предположив, что выражение (7.14) справедливо как для стационарного, так и для переменного электрического поля.

Четвертое уравнение Максвелла является обобщением теоремы Остроградского – Гаусса на переменное магнитное поле:

$$\oint_S \vec{B} \cdot \vec{dS} = 0. \quad (7.15)$$

Рассмотренные уравнения представляют собой уравнения Максвелла в *интегральной форме*.

Для расчета электромагнитного поля в веществе этих уравнений недостаточно. К ним нужно добавить уравнения, характеризующие электрические и магнитные свойства среды, в которой создано электромагнитное поле. Эти дополнительные уравнения имеют вид:

$$\vec{D} = \epsilon \epsilon_0 \vec{E}; \quad \vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}; \quad \vec{j} = \gamma \vec{E}, \quad (7.16)$$

где ϵ_0 и μ_0 – соответственно электрическая и магнитная постоянные; ϵ и μ – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости среды; γ – удельная электропроводность среды.

Совокупность семи указанных уравнений образует основу электродинамики покоящихся сред.

Теория Максвелла представляет собой феноменологическую теорию электромагнитного поля. Это означает, что внутренний механизм явлений, происходящих в среде и вызывающих возникновение электрических и магнитных полей, в данной теории не рассматривается. Зависимость характеристик ϵ , μ и γ среды от ее свойств, физический смысл явлений, происходящих в среде при ее поляризации и намагничивании, в теории Максвелла не исследуются.

Теория Максвелла является макроскопической теорией электромагнитного поля. В ней рассматриваются электрические и магнитные поля, создаваемые макроскопическими зарядами и токами, т. е. зарядами, сосредоточенными в объемах, несоизмеримо больших, чем размеры отдельных атомов и молекул.

На основе созданной им теории Д. Максвелл предсказал существование электромагнитных волн, т. е. переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. Теоретическое исследование свойств электромагнитных волн привело затем Д. Максвелла к созданию электромагнитной теории света. В дальнейшем электромагнитные волны были получены опытным путем, а еще позднее электромагнитная теория света, а вместе с ней и вся теория Максвелла получили полное и блестящее подтверждение.

8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

8.1. Волновое уравнение. Свойства электромагнитных волн

Ранее было выяснено, что переменное электрическое поле порождает магнитное, которое тоже оказывается переменным. Это переменное магнитное поле, в свою очередь, порождает электрическое и т. д. Таким образом, если с помощью колеблющихся зарядов возбудить переменное электромагнитное поле, то в окружающем заряды пространстве возникнет последовательность взаимных превращений электрического и магнитного полей, распространяющихся от точки к точке. Этот процесс является периодическим во времени и пространстве и, следовательно, представляет собой волну.

Можно показать, что для однородной и изотропной среды вдали от зарядов и токов, создающих электромагнитное поле, из уравнений Максвелла следует, что векторы \vec{E} и \vec{H} переменного электромагнитного поля удовлетворяют волновому уравнению типа:

$$\Delta \vec{E} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (8.1)$$

$$\Delta \vec{H} = \frac{\epsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (8.2)$$

где v – фазовая скорость; $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа; c – скорость света в вакууме.

Всякая функция, удовлетворяющая уравнениям (8.1) и (8.2), описывает некоторую волну. Следовательно, электромагнитное поле может распространяться в виде электромагнитных волн. Фазовая скорость электромагнитных волн определяется выражением:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}}, \quad (8.3)$$

где $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ *.

* Выражение $c\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = 1$ связывает постоянные ϵ_0 и μ_0 с фундаментальной физической константой – скоростью света c в вакууме. Учитывая числовые значения этих величин и их единицы, проверим выполнимость этого равенства:

$$3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \frac{\text{Ф}}{\text{м}} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 10^{-8} \sqrt{1 \frac{\text{Кл}}{\text{В} \cdot \text{м}} \cdot 1 \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А} \cdot \text{м}}} = 1 \quad (1 \text{ Кл} = 1 \text{ А} \cdot \text{с}).$$

В вакууме (при $\epsilon = 1$ и $\mu = 1$) скорость электромагнитных волн равна скорости света в этой среде. Так как для любого вещества $\epsilon\mu > 1$, то $v < c$.

Формула (8.3) выражает **закон Максвелла**.

Рассмотрим случай, когда \vec{E} и \vec{H} зависят только от одной координаты и времени (одномерная задача), что соответствует плоской электромагнитной волне. Предположим, что волна распространяется вдоль оси Ox перпендикулярно к волновому фронту (среда непроводящая, $\epsilon = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$). Тогда для этого частного случая из уравнений (8.1) и (8.2) можно получить, что

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{\epsilon\mu}{c^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (8.5)$$

Индексы y и z при E и H отражают тот факт, что векторы \vec{E} и \vec{H} направлены вдоль взаимно перпендикулярных осей Oy и Oz .

Решением уравнения (8.4) является функция:

$$E_y = E_M \cos(\omega t - kx + \varphi_1). \quad (8.6)$$

Решение уравнения (8.5) имеет аналогичный вид:

$$H_z = H_M \cos(\omega t - kx + \varphi_2). \quad (8.7)$$

В этих формулах ω – частота волны; $k = \omega/v$ – волновое число; φ_1 и φ_2 – начальные фазы колебаний в точке с координатой $x = 0$.

Можно показать, что начальные фазы φ_1 и φ_2 в уравнениях (8.6) и (8.7) равны между собой ($\varphi_1 = \varphi_2$). Кроме того, мгновенные (а значит, и амплитудные) значения E и H связаны соотношением:

$$\sqrt{\epsilon_0 \epsilon} E_M = \sqrt{\mu \mu_0} H_M. \quad (8.8)$$

Таким образом, в свободно распространяющейся электромагнитной волне напряженности E и H одновременно достигают максимальных (амплитудных) значений и одновременно обращаются в нуль, т. е. колеблются в одинаковых фазах.

На рис. 8.1 приведен график плоской электромагнитной волны.

Из рисунка видно, что векторы \vec{E} и \vec{H} напряженностей электрического и магнитного полей волны взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости, перпендикулярной к вектору \vec{v} скорости распространения

волны, причем векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{v} образуют «правовинтовую» систему. Из приведенного следует, что электромагнитные волны *поперечны*. Положив в выражениях (8.6) и (8.7) $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ и опустив индексы, получим уравнение плоской электромагнитной волны в виде:

$$\begin{aligned} E &= E_M \cos(\omega t - kx); \\ H &= H_M \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (8.9)$$

или в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_M \cos(\omega t - kx); \\ \vec{H} &= \vec{H}_M \cos(\omega t - kx), \end{aligned} \quad (8.10)$$

где $\vec{E} = E_y \vec{e}_y$; $\vec{H} = H_z \vec{e}_z$ (\vec{e}_y и \vec{e}_z – орты осей Oy и Oz).

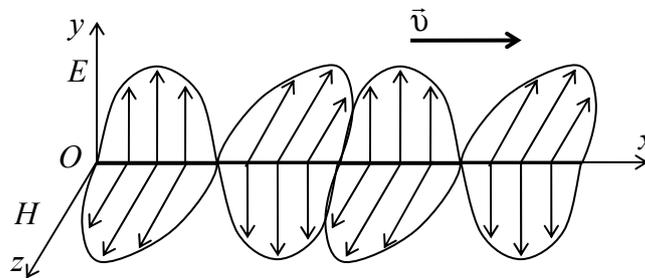


Рис. 8.1

Рассмотренные свойства плоской электромагнитной волны присущи и сферической волне.

Решающую роль в утверждении теории Максвелла сыграли исследования Г. Герца (1887–1891 гг.). Именно Г. Герцем впервые были получены опытным путем свободные электромагнитные волны и изучены их основные свойства.

8.2. Энергия электромагнитных волн

Для доказательства того, что электромагнитные волны переносят энергию, приведем один пример: осуществление сверхдальней космической связи.

Рассмотрим площадку S , расположенную произвольно в поле электромагнитной волны (рис. 8.2), и вычислим энергию ΔW , переносимую электромагнитной волной через эту площадку за малое время Δt .

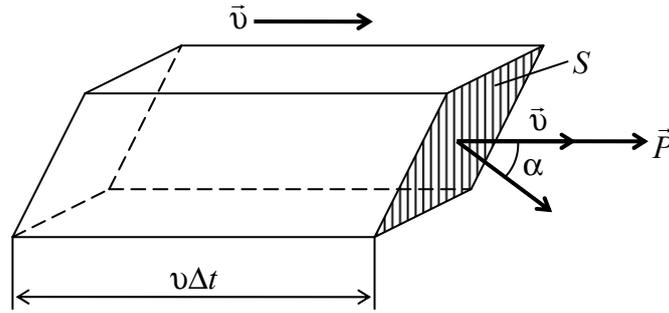


Рис. 8.2

Для этого построим на площадке S , как на основании, параллелепипед, ребра которого параллельны вектору \vec{v} скорости распространения волны и имеют длину $v\Delta t$. Объем параллелепипеда равен:

$$\Delta V = Sv\Delta t \cos\alpha,$$

где α – угол между нормалью \vec{n} к площадке S и вектором скорости \vec{v} .

Так как за время Δt волна распространяется на расстояние $v\Delta t$, то очевидно, что через площадку S пройдет энергия ΔW , заключенная внутри указанного параллелепипеда. Поэтому если w есть объемная плотность энергии электромагнитного поля, то

$$\Delta W = w\Delta V = wSv\Delta t \cos\alpha.$$

Так как объемная плотность энергии электромагнитной волны складывается из объемной плотности энергии электрического поля $\left(\frac{1}{2}\epsilon\epsilon_0 E^2\right)$ и объемной плотности энергии магнитного поля $\left(\frac{1}{2}\mu\mu_0 H^2\right)$, то

$$w = \frac{1}{2}(\epsilon\epsilon_0 E^2 + \mu\mu_0 H^2).$$

Величины E и H в электромагнитной волне связаны соотношением $\sqrt{\epsilon\epsilon_0} E = \sqrt{\mu\mu_0} H$. Поэтому можно записать:

$$w = \epsilon_0\epsilon E^2 = \mu\mu_0 H^2 = \sqrt{\epsilon_0\mu_0} \sqrt{\epsilon\mu} EH.$$

Учитывая, что $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$, имеем:

$$\Delta W = EH\Delta t S \cos\alpha.$$

Плотностью потока энергии называется величина $|\vec{P}|$, численно равная энергии, переносимой волной за единицу времени (за 1 с) через единичную площадку (в 1 м^2), расположенную перпендикулярно к направлению распространения волны. Поэтому из последнего выражения следует, что

$$|\vec{P}| = \frac{\Delta W}{S_n \Delta t} = EH. \quad (8.11)$$

Векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны и образуют с вектором \vec{v} «правовинтовую» систему. Поэтому направление вектора $\vec{E} \times \vec{H}$ совпадает с направлением переноса энергии, а модуль этого вектора равен EH . Следовательно, вектор плотности потока энергии электромагнитной волны можно представить как векторное произведение \vec{E} и \vec{H} :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}. \quad (8.12)$$

Вектор \vec{P} называется **вектором Умова – Пойнтинга**.

Поток Φ энергии электромагнитной волны через некоторую поверхность S можно рассчитать с помощью интегрирования:

$$\Phi = \int_S \vec{P} \cdot \vec{dS}. \quad (8.13)$$

Можно показать, что в замкнутой цепи постоянного тока энергия от участков, где действуют сторонние силы, передается другим участкам цепи не вдоль проводников, а через окружающее проводники пространство в виде потока энергии электромагнитного поля, характеризуемого вектором \vec{P} .

Д. Максвелл, впервые вычисливший давление электромагнитных волн, нашел, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то величина давления равна:

$$p = \bar{w}, \quad (8.14)$$

где \bar{w} – среднее значение объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне. Если же тело частично отражает волну, то кроме поля падающей волны присутствует еще поле отраженной волны, и давление будет равно:

$$p = (1 + k)\bar{w}, \quad (8.15)$$

где k – коэффициент отражения; если $k = 1$, то $p = 2\bar{w}$.

Давление электромагнитной волны можно выразить через ее интенсивность J (среднее значение плотности потока энергии). Так как $J = c\bar{w}$, то

$$p = \frac{J}{c}(1 + k). \quad (8.16)$$

8.3. Излучение диполя

Простейшей системой, излучающей электромагнитные волны, является электрический диполь, электрический момент которого изменяется во времени по гармоническому закону:

$$p_e = p_m \cos \omega t, \quad (8.17)$$

где $p_m = dl_m$ – амплитуда электрического момента диполя; l_m – амплитуда колебаний.

Примером такого диполя может служить система, образованная неподвижным точечным зарядом $+q$ и колеблющимся относительно него (вдоль оси диполя) точечным зарядом $-q$.

Если дипольный момент p_e изменяется по гармоническому закону (8.15), то и возбуждаемые им электрическое и магнитное поля будут изменяться с той же частотой ω . Следовательно, рассматриваемая система будет излучать монохроматическую волну, т. е. волну определенной частоты (длина волны $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega}$).

Рассмотрим излучение диполя, размеры которого малы по сравнению с длиной волны ($l_m \ll \lambda$). Такой диполь называется **элементарным**. Представляет интерес картина электромагнитного поля в так называемой *волновой зоне* диполя, которая начинается на расстояниях r , значительно превышающих длину волны ($r \gg \lambda$). Эта зона характеризуется тем, что в ней происходит взаимное индуцирование электрического и магнитного полей. Эти поля уже не связаны с создавшими их зарядами и токами и распространяются в пространстве со скоростью света, перенося энергию. Если среда однородная и изотропная, то волновой фронт в этой области становится сферическим (рис. 8.3).

Таким образом, на большом расстоянии от диполя излучаемая им волна является сферической. Векторы \vec{E} и \vec{H} в каждой точке среды взаимно перпендикулярны и перпендикулярны к лучу, т. е. радиус-вектору, проведенному в данную точку из центра диполя. Если зафиксировать точку на некотором расстоянии от излучателя, то векторы \vec{E}

и \vec{H} в этой точке будут колебаться синхронно (т. е. в одной и той же фазе с частотой, равной частоте колебаний диполя). Поскольку векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, то сферическая волна (как и плоская) является поперечной.

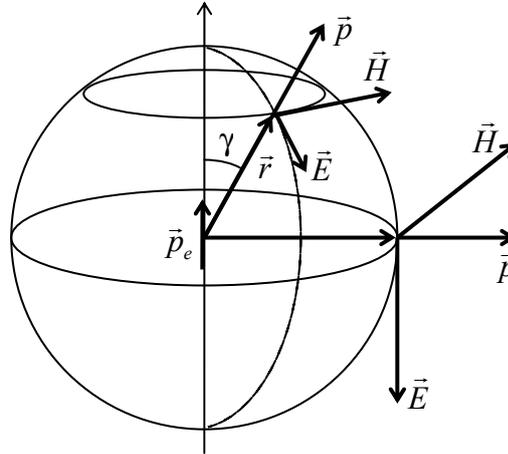


Рис. 8.3

В каждой точке волновой зоны векторы \vec{E} и \vec{H} колеблются по закону $\cos(\omega t - kr)$. Амплитуды \vec{E}_m и \vec{H}_m зависят от расстояния r до излучателя и от угла γ между направлением радиуса-вектора \vec{r} и осью диполя (см. рис. 8.3). Эта зависимость для вакуума имеет следующий вид:

$$E_m \sim H_m \sim \frac{1}{r} \sin \gamma.$$

Среднее значение плотности потока энергии J пропорционально произведению $E_m H_m$, следовательно,

$$J \sim \frac{1}{r^2} \sin^2 \gamma. \quad (8.18)$$

Из этой формулы следует, что интенсивность J излучения изменяется вдоль луча (при $\gamma = \text{const}$) обратно пропорционально квадрату расстояния до излучателя. Кроме того, она зависит от угла γ . Интенсивность излучения достигает максимума в направлениях, перпендикулярных к оси диполя ($\gamma = \frac{\pi}{2}$). Вдоль своей оси ($\gamma = 0$ и $\gamma = \pi$) диполь не излучает.

Соответствующий расчет показывает, что мощность N излучения диполя (т. е. энергия, излучаемая по всем направлениям в единицу

времени) пропорциональна квадрату второй производной дипольного момента по времени:

$$N \sim \ddot{p}_e^2. \quad (8.19)$$

Согласно формуле (8.17), $\ddot{p}_e^2 = p_M^2 \omega^4 \cos^2 \omega t$. Подставляя это выражение в формулу (8.19), имеем:

$$N \sim p_M^2 \omega^4 \cos^2 \omega t.$$

Усреднив последнее выражение по времени, получим:

$$\langle N \rangle \sim p_M^2 \omega^4. \quad (8.20)$$

Таким образом, средняя мощность излучения диполя пропорциональна квадрату амплитуды электрического момента диполя и четвертой степени частоты.

Поэтому при низкой частоте мощность излучения электрических систем (например, линий передачи переменного тока переменной частоты) весьма незначительна.

Можно показать, что мощность излучения диполя

$$N \sim q^2 a^2. \quad (8.21)$$

где a – ускорение колеблющегося заряда.

Формула (8.21) справедлива и при произвольном движении заряда. Всякое заряженное тело (частица), движущееся с ускорением, является источником электромагнитного излучения, причем мощность излучения пропорциональна квадрату заряда и квадрату ускорения. Следует отметить, что частица не излучает энергии в направлении вектора \vec{a} .

СОДЕРЖАНИЕ

1. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ЕГО ХАРАКТЕРИСТИКИ	3
1.1. Индукция магнитного поля. Силовые линии магнитного поля	3
1.2. Сила Ампера	5
1.3. Действие магнитного поля на движущийся заряд. Сила Лоренца. Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях	7
1.4. Эффект Холла	14
2. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ТОКОВ	16
2.1. Закон Био – Савара – Лапласа. Примеры расчета магнитных полей	16
2.2. Магнитное поле движущегося электрического заряда	24
2.3. Закон полного тока. Магнитное поле тороида и соленоида	25
2.4. Магнитное взаимодействие проводников с током	29
3. ДЕЙСТВИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА КОНТУР С ТОКОМ	32
3.1. Контур с током в магнитном поле. Момент сил, действующий на контур	32
3.2. Поток вектора магнитной индукции. Теорема Гаусса для магнитного поля	34
3.3. Работа по перемещению проводника и контура с током в магнитном поле	35
4. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	39
4.1. Источники магнетизма атомов (молекул). Орбитальный магнитный момент атомов	39
4.2. Атом в магнитном поле. Ларморова прецессия	42
4.3. Типы магнетиков. Магнитная восприимчивость	45
4.4. Диамагнетики. Диамагнитный эффект	47
4.5. Парамагнетизм	48
4.6. Магнитное поле в веществе	50
4.7. Ферромагнетизм	52
5. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	61
5.1. Основной закон электромагнитной индукции	61
5.2. Методы измерения магнитной индукции	65
5.3. Явление самоиндукции	68

5.4. Токи Фуко	71
5.5. Ток при замыкании и размыкании цепи	72
5.6. Взаимная индукция	75
5.7. Энергия магнитного поля	77
6. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ	81
6.1. Квазистационарные токи	81
6.2. Уравнение собственных электрических колебаний. Колебания в отсутствие затухания	82
6.3. Свободные затухающие колебания	86
6.4. Дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний и его решение	89
6.5. Переменный ток. Закон Ома для переменного тока	91
6.6. Работа и мощность переменного тока	99
6.7. Резонанс напряжений	101
7. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА	107
7.1. Вихревое электрическое поле	107
7.2. Ток смещения	110
7.3. Уравнения Максвелла для электромагнитного поля	113
8. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ	116
8.1. Волновое уравнение. Свойства электромагнитных волн	116
8.2. Энергия электромагнитных волн	118
8.3. Излучение диполя	121

Учебное электронное издание

Олехнович Александр Михайлович
Рудик Константин Иванович

ФИЗИКА

В 5-ти частях

Часть 4

ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Редактор *О. А. Семенец*
Компьютерная верстка *Д. В. Чернушевич*
Корректор *О. А. Семенец*

Издатель и полиграфическое исполнение:
УО «Белорусский государственный технологический университет».
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.
ЛП № 02330/0150477 от 16.01.2009.
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.