Учреждение образования
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Д. В. Кленицкий

ФИЗИКА

В 5-ти частях
Часть 1
Механика

**Учебное электронное издание
для студентов инженерно-технических
специальностей**

Минск 2010

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.31я73
К48

Рассмотрено и рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом университета

Рецензенты:
кандидат физико-математических наук, доцент,
заведующий кафедрой технической физики БНТУ *И. А. Хорунжий*;
кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник
ОИЭЯИ – Сосны НАН Беларуси *И. А. Едчик*

Кленицкий, Д. В.
К48 Физика. В 5 ч. Ч. 1. Механика : учеб. электронное издание для студентов инженерно-технических специальностей / Д. В. Кленицкий. – Минск : БГТУ, 2010. – 122 с.

Предлагаемое учебное издание составлено на основе действующей учебной программы по физике для студентов инженерно-технических специальностей. В пособии рассмотрена классическая механика Ньютона, механические колебания и волны в упругих средах, механика жидкостей, а также основы релятивистской и квантовой механики.

УДК 531/534(075.8)
ББК 22.31я73

СОДЕРЖАНИЕ

Часть I. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Механика – раздел физики, который изучает закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.

Механическое движение – это изменение с течением времени взаимного расположения тел или их частей.

Классическая механика (механика Галилея – Ньютона) изучает движения тел со скоростями, много меньшими скорости света в вакууме ($\upsilon \ll c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

Основная задача механики состоит в определении положения тела в любой момент времени по известным начальному положению тела и его начальной скорости

Положение тела в пространстве и изменение его положения с течением времени может быть определено только по отношению к каким-либо другим телам. Тело (или система неподвижных друг относительно друга тел), которое служит для определения положения интересующего нас тела, называют *телом отсчета*. Практически для описания движения с телом отсчета связывают систему координат, например декартову. Координаты тела позволяют установить его положение в пространстве. Т. к. движение тела происходит не только в пространстве, но и во времени, то для описания движения необходимо отсчитывать также и время. Это делается с помощью часов. Тело отсчета и связанная с ним система координат, снабженная часами, образуют так называемую *систему отсчета*, относительно которой изучают движения тел.

Реальные движения тел настолько сложны, что, изучая их, необходимо отвлечься от несущественных для рассматриваемого движения деталей (в противном случае задача так усложнилась бы, что решить ее практически было бы невозможно). С этой целью используют понятия (абстракции, идеализации), применимость которых зависит от конкретного характера интересующей задачи, а также от той степени точности, с которой хотят получить результат. Среди этих понятий большую роль играют понятия материальной точки и абсолютно твердого тела.

Материальная точка – это тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь. Одно и то же тело в одних случаях можно рассматривать как материальную точку, в других же – как протяженное тело. Например, радиус Земли значительно меньше расстояния от

Земли до Солнца, и ее орбитальное движение можно хорошо описать как движение материальной точки. Однако при рассмотрении суточного движения Земли вокруг собственной оси замена ее материальной точкой не имеет смысла.

Механика материальной точки является основой всей механики. Любое тело можно представить как совокупность взаимодействующих материальных точек с массами, равными массам его частей. Изучение движения этих частей сводится к изучению движения материальных точек.

Абсолютно твердое тело, или просто *твердое тело*, – это система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения. Реальное тело можно считать абсолютно твердым, если в условиях рассматриваемой задачи его деформации пренебрежимо малы.

Глава 1. КИНЕМАТИКА

Кинематика – это раздел механики, в котором изучаются способы описания движений тел, без выяснения причин, обуславливающих эти движения. *Основной задачей кинематики* является расчет кинематических характеристик движущихся тел, к которым относятся скорость, ускорение, траектория и др.

§ 1.1. Кинематика материальной точки

Существует три способа описания движения материальной точки: векторный, координатный и естественный. Рассмотрим их последовательно.

Векторный способ. В этом способе положение материальной точки M задают радиусом-вектором $\vec{r}$, проведенным из некоторой точки O на теле отсчета в направлении движущейся точки M (рис. 1.1).

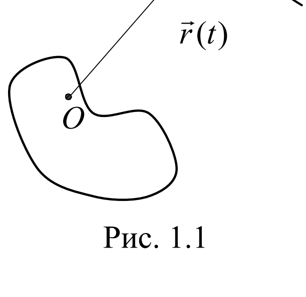


Рис. 1.1

При движении материальной точки ее радиус-вектор изменяется в общем случае как по модулю, так и по направлению, т. е. радиус-вектор является функцией времени: $\vec{r}(t)$. Данная зависимость задает *закон движения* материальной точки. Линию, которую описывает материальная точка *M* при своем движении, называют *траекторией.*

Вектором перемещения, или *перемещением* $\Delta\vec{r}$, называют вектор, проведенный из начального положения *1* тела в конечное положение *2* (рис. 1.2). При перемещении точки из положения *1* с радиусом-вектором $\vec{r}_1$ в положение *2* с радиусом-вектором $\vec{r}_2$ перемещение $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

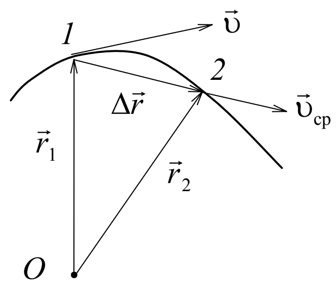


Рис. 1.2

Средним вектором скорости на некотором участке траектории называют величину, равную отношению перемещения $\Delta\vec{r}$ к промежутку времени Δt, за который это перемещение произошло:

$$\vec{\upsilon}_{ср} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.1)$$

Вектор $\vec{\upsilon}_{ср}$ совпадает по направлению с вектором перемещения $\Delta\vec{r}$ (рис. 1.2).

Мгновенная скорость (или просто *скорость*) есть предел, к которому стремится вектор $\vec{\upsilon}_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю, т. е.

$$\vec{\upsilon} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{\upsilon}_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.2)$$

Это значит, что вектор скорости $\vec{\upsilon}$ материальной точки в данный момент времени равен производной от радиуса-вектора $\vec{r}$ по времени и направлен по касательной к траектории в данной точке траектории, т. к. при $\Delta t \to 0$, когда векторы $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ бесконечно близки друг к другу, вектор $\vec{\upsilon}_{ср}$ стремится к касательной к траектории в точке *1*.

Путь s – расстояние, пройденное точкой, отсчитанное вдоль траектории. При $\Delta t \to 0$ модуль вектора перемещения численно равен пути, пройденному точкой: $|d\vec{r}| = ds$, так что модуль скорости $\upsilon = |d\vec{r}|/dt = ds/dt$. Отсюда $ds = \upsilon dt$. Интегрируя это соотношение, получим путь, пройденный точкой за время *t*:

$$s = \int_0^t \upsilon dt. \tag{1.3}$$

Средняя (путевая) скорость – это отношение пути *s*, пройденного телом, ко времени Δt, за которое этот путь был пройден:

$$\upsilon_{\text{ср}} = \frac{s}{\Delta t}. \tag{1.4}$$

Средняя скорость является скалярной величиной.

Движение материальной точки характеризуется также ускорением, которое показывает, как быстро изменяется скорость.

Средним ускорением за промежуток времени Δt называют отношение изменения скорости $\Delta\vec{\upsilon}$ к промежутку времени Δt, за который это изменение произошло:

$$\vec{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}. \tag{1.5}$$

Мгновенное ускорение (или просто *ускорение*) есть предел, к которому стремится вектор $\vec{a}_{\text{ср}}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю, т. е.

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{a}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \tag{1.6}$$

где после последнего знака равенства было учтено соотношение (1.2).

Таким образом, ускорение $\vec{a}$ материальной точки в данный момент времени равно первой производной от вектора скорости $\vec{\upsilon}$ по времени или второй производной от радиуса-вектора $\vec{r}$ по времени.

Напомним, что в СИ единицами длины, скорости и ускорения являются соответственно *метр* (м), *метр в секунду* (м/с) *и метр на секунду в квадрате* (м/с^2).

Зная зависимость радиуса-вектора от времени $\vec{r}(t)$, по формулам (1.2), (1.6) можно найти скорость $\vec{\upsilon}$ и ускорение $\vec{a}$ материальной точки в любой момент времени.

Возникает и обратная задача: по известной зависимости ускорения от времени $\vec{a}(t)$ найти зависимости $\vec{\upsilon}(t)$ и $\vec{r}(t)$. Для получения однозначного решения этой задачи необходимо еще знать *начальные условия*, а именно: значения радиуса-вектора и скорости в начальный момент времени при $t = 0$.

Рассмотрим простейший случай, когда вектор ускорения в процессе движения материальной точки не изменяется: $\vec{a} = \text{const}$ (например, движение тела под действием силы тяжести с ускорением свободного падения $\vec{a} = \vec{g}$). Пусть при $t = 0$ радиус-вектор $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ и скорость $\vec{\upsilon}(0) = \vec{\upsilon}_0$.

Из (1.6) следует, что элементарное (бесконечно малое) приращение скорости $d\vec{\upsilon} = \vec{a}dt$. Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения по скорости от $\vec{\upsilon}_0$ до $\vec{\upsilon}$ и по времени от 0 до t с учетом, что $\vec{a} = \text{const}$, найдем зависимость $\vec{\upsilon}(t)$:

$$\int_{\vec{\upsilon}_0}^{\vec{\upsilon}} d\vec{\upsilon} = \int_0^t \vec{a}dt \;\Rightarrow\; \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t. \tag{1.7}$$

Аналогично найдем зависимость $\vec{r}(t)$. Из (1.2) с учетом (1.7) элементарное перемещение $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = (\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t)dt$. Проинтегрировав левую и правую части этого уравнения по радиусу-вектору от $\vec{r}_0$ до $\vec{r}$ и по времени от 0 до t с учетом, что $\vec{a} = \text{const}$, найдем зависимость $\vec{r}(t)$:

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r} = \int_0^t (\vec{\upsilon}_0 + \vec{a}t)dt \;\Rightarrow\; \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{a}t^2}{2}. \tag{1.8}$$

Например, скорость и положение тела, брошенного под некоторым углом α к горизонту и двигающегося с ускорением свободного падения $\vec{a} = \vec{g}$, относительно точки бросания $\vec{r}_0 = 0$ будут определяться соотношениями

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_0 + \vec{g}t;\; \vec{r} = \vec{\upsilon}_0 t + \frac{\vec{g}t^2}{2}. \tag{1.9}$$

В данном случае $\vec{r}$ представляет собой сумму двух векторов. Это показано на рис. 1.3.

Координатный способ. В этом способе с выбранным телом отсчета жестко связывают определенную систему координат, которая позволяет каждой точке пространства сопоставить три числа, называемые координатами точки этого пространства. Наиболее распространенной является декартова система координат (рис. 1.4).

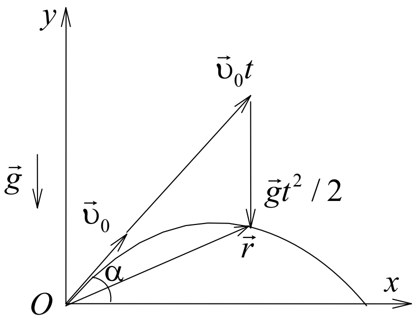


Рис. 1.3

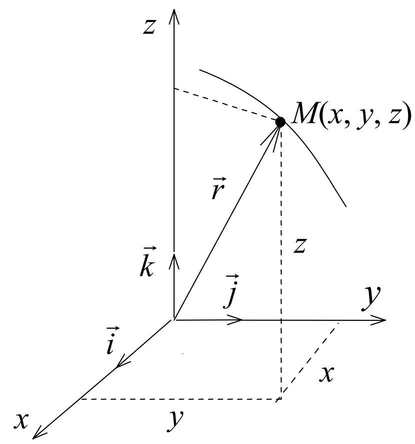


Рис. 1.4

Положение материальной точки в пространстве в этой системе координат определяется тремя координатами, которые изменяются со временем при перемещении точки:

$$x = x(t);\ y = y(t);\ z = z(t)\,. \tag{1.10}$$

Зная зависимость координат от времени (1.10) – *закон движения точки*, – можно найти положение точки, ее скорость и ускорение в любой момент времени. Действительно, в декартовой системе координат радиус-вектор и его модуль определяются соотношениями

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}; \qquad r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,, \tag{1.11}$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты декартовой системы координат (единичные векторы ($i = j = k = 1$), направленные вдоль положительных направлений координатных осей). Подставляя радиус-вектор $\vec{r}$ (1.11) в (1.2), а полученную скорость в (1.6) и учитывая, что векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ постоянны (не изменяют своего направления и модуля), найдем выражения для скорости и ускорения точки в декартовой системе координат:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_x\vec{i} + \upsilon_y\vec{j} + \upsilon_z\vec{k}; \qquad \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}, \tag{1.12}$$

где проекции векторов на оси координат (компоненты векторов скорости и ускорения)

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}; \tag{1.13}$$

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2};\ a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2};\ a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}\,. \tag{1.14}$$

Модули векторов скорости и ускорения

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 + \upsilon_z^2}\,;\; a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\,. \tag{1.15}$$

Кроме того, можно решить и ряд других вопросов: найти траекторию точки, зависимость пройденного пути от времени, зависимость скорости от положения точки и пр. Например, в случае падения тела вблизи поверхности Земли с ускорением свободного падения $\vec{a} = \vec{g}$ тело будет двигаться в плоскости Oxy (рис. 1.3), его скорость и радиус-вектор изменяются со временем по формулам (1.9). Проецируя вектор скорости $\vec{\upsilon}$ и радиус-вектор $\vec{r}$ на оси координат, найдем зависимости компонентов скорости и координат от времени:

$$\upsilon_x = \upsilon_{0x}\,;\; \upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt\,; \tag{1.16}$$

$$x = \upsilon_{0x}t\,;\; y = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2}, \tag{1.17}$$

где компоненты начальной скорости $\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$, $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$. При выводе (1.16) и (1.17) учтено, что $r_y = y$, $r_x = x$, а также, что проекции ускорения свободного падения на оси координат $g_x = 0$, $g_y = -g$.

Таким образом, тело участвует одновременно в двух движениях: с постоянной скоростью υ_{0x} вдоль оси x и с ускорением свободного падения вдоль оси y. Из (1.17) следует, что траекторией движения тела является парабола, уравнение которой имеет вид

$$y = \frac{\upsilon_{0y}}{\upsilon_{0x}}x - \frac{g}{2\upsilon_{0x}^2}x^2 = x\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}x^2. \tag{1.18}$$

Модуль скорости тела в произвольный момент времени

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + (\upsilon_{0y} - gt)^2}\,. \tag{1.19}$$

Решение обратной задачи – нахождение скорости и закона движения точки по заданному ускорению – проводится, как и в векторном способе, путем интегрирования (в данном случае проекций ускорений по времени), причем задача и здесь имеет однозначное решение, если кроме ускорения заданы еще и начальные условия, проекции скорости и координат в начальный момент времени.

Естественный (траекторный) способ. Этот способ применяется тогда, когда траектория точки известна заранее. Положение точки M на траектории задается *дуговой координатой* l – расстоянием, отсчитанным вдоль траектории от вы бранного начала отсчета O (рис. 1.5). При этом произвольно выбирают положительное и отрицательное направления отсчета дуговой координаты l (на рис. 1.5 указаны знаками плюс и минус).

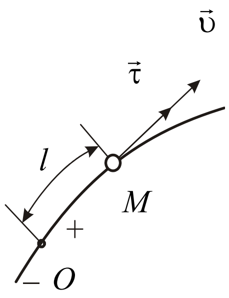


Рис. 1.5

Движение точки определено, если известны ее траектория, начало отсчета O, положительное направление отсчета дуговой координаты l и закон движения точки, т. е. зависимость $l(t)$.

Для задания вектора скорости вводят единичный вектор $\vec{\tau}$ ($\tau = |\vec{\tau}| = 1$), связанный с движущейся точкой M и направленный в сторону увеличения дуговой координаты l (рис. 1.5). Очевидно, что $\vec{\tau}$ – переменный вектор, его направление зависит от местоположения точки на траектории, т. е. от дуговой координаты l. Т. к. вектор скорости точки направлен по касательной к траектории, то его можно представить так:

$$\vec{\upsilon} = \upsilon_\tau \vec{\tau}, \tag{1.20}$$

где υ_τ – проекция вектора $\vec{\upsilon}$ на направление вектора $\vec{\tau}$,

$$\upsilon_\tau = \frac{dl}{dt}. \tag{1.21}$$

Кроме того, т. к. точка может двигаться как в положительном, так и в отрицательном направлениях отсчета дуговой координаты, то $\upsilon_\tau = \pm\upsilon$. Так что модуль скорости точки

$$\upsilon = |\vec{\upsilon}| = |\upsilon_\tau|. \tag{1.22}$$

Ускорение тела найдем, продифференцировав (1.20) по времени:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt}. \tag{1.23}$$

Преобразуем последний член этого выражения:

$$\upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \upsilon_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dl}\frac{dl}{dt} = \upsilon^2 \frac{d\vec{\tau}}{dl}. \tag{1.24}$$

Найдем изменение вектора $\vec{\tau}$ на участке dl: $d\vec{\tau}/dl$. При стремлении точки *2* к точке *1* на рис. 1.6 отрезок траектории между ними стремится к дуге окружности с центром в некоторой точке O. Эту точку называют *центром кривизны траектории* в данной точке, а радиус ρ соответствующей окружности – *радиусом кривизны траектории* в той же точке.

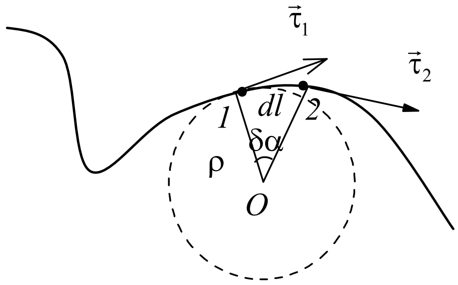


Рис. 1.6

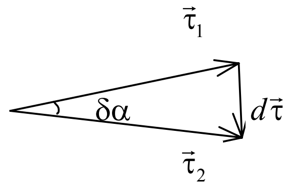


Рис. 1.7

Используя радианную меру измерения углов, из рис. 1.6 найдем $\delta\alpha = |dl|/\rho$. Угол между векторами $\vec{\tau}_1$ и $\vec{\tau}_2$ также будет равен $\delta\alpha$ (углы с взаимно перпендикулярными сторонами). Учитывая, что $\tau_1 = \tau_2 = \tau = 1$, $\delta\alpha = |d\vec{\tau}|/\tau = |d\vec{\tau}|$ (см. рис. 1.7). Отсюда

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{dl}\right| = \frac{1}{\rho}. \tag{1.25}$$

Причем при стремлении точки *2* к точке *1* ($\delta\alpha \to 0$) $d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$ (рис. 1.7), т. е. вектор $d\vec{\tau}$ направлен по нормали к траектории в точке *1*, направленной к центру кривизны. Тогда последнее равенство можно записать в векторном виде:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dl} = \frac{\vec{n}}{\rho}, \tag{1.26}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к траектории ($n = 1$).

Подставим (1.26) в (1.24), а затем полученное выражение в (1.23). В результате найдем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}. \tag{1.27}$$

Здесь первое слагаемое называют *тангенциальным* (касательным) ускорением $\vec{a}_\tau$, а второе – *нормальным* (центростремительным) ускорением $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\upsilon_\tau}{dt}\vec{\tau};\ \vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{\rho}\vec{n}. \tag{1.28}$$

Таким образом, полное ускорение тела может быть представлено как сумма тангенциального и нормального ускорений (рис. 1.8):

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n. \tag{1.29}$$

Тангенциальное ускорение характеризует изменение скорости по величине, а нормальное – по направлению.

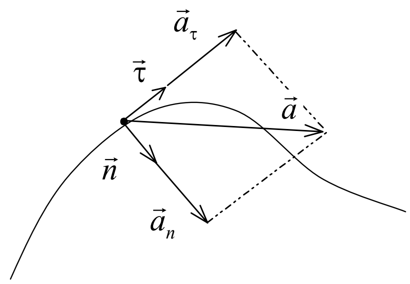


Рис. 1.8

Модуль полного ускорения тела

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}. \tag{1.30}$$

В случае движения тела вблизи поверхности Земли с ускорением свободного падения $\vec{a} = \vec{g}$, используя (1.19), (1.28), (1.30), нетрудно найти соотношения для a_τ, a_n и ρ:

$$a_\tau = -g\frac{\upsilon_y}{\upsilon}; \quad a_n = g\frac{\upsilon_x}{\upsilon}; \quad \rho = \frac{\upsilon^3}{g\upsilon_x}, \tag{1.31}$$

где $\upsilon = \sqrt{\upsilon_{0x}^2 + (\upsilon_{0y} - gt)^2}$; $\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\alpha$; $\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt$; $\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\alpha$.

§ 1.2. Классификация движений материальной точки

Механические движения классифицируют в зависимости от конкретных условий движения. Классификацию частных случаев движения материальной точки выполним с помощью естественного способа задания движения. В зависимости от радиуса кривизны траектории ρ возможны три ситуации: а) *криволинейное движение* – радиус кривизны не является постоянной величиной, а изменяется от точки к точке траектории: $\rho \neq \text{const}$; б) *движение по окружности* – радиус кривизны является постоянной величиной, равной радиусу окружности: $\rho = R = \text{const}$; в) *прямолинейное движение* – $\rho = \infty$, при этом нормальное ускорение $a_n = 0$.

В каждом из этих трех случаев точка может двигаться равномерно, равнопеременно и неравномерно.

1. *Равномерное движение* – движение, при котором модуль скорости не изменяется: $\upsilon = \text{const}$. При этом из (1.28) следует, что тангенциальное ускорение $a_\tau = 0$. Из (1.21) и (1.22) дуговая координата l точки, а из (1.3) путь s, пройденный точкой:

$$l = \upsilon_\tau t; \;\; s = \upsilon t, \tag{1.32}$$

где принято, что начальная дуговая координата точки равна нулю.

2. *Равнопеременное движение* – движение, при котором тангенциальное ускорение не изменяется: $a_\tau = \text{const}$. Т. к. $a_\tau = d\upsilon_\tau / dt$, то, интегрируя это соотношение, нетрудно найти зависимость $\upsilon_\tau(t)$ при этом виде движения:

$$\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + a_\tau t, \tag{1.33}$$

где $\upsilon_{0\tau} = \upsilon_\tau(0)$.

Учитывая, что $\upsilon_\tau = dl/dt$, после интегрирования найдем зависимость дуговой координаты от времени:

$$l = \upsilon_{0\tau} t + \frac{a_\tau t^2}{2}, \tag{1.34}$$

где начальная дуговая координата принята равной нулю.

Если скорость тела уменьшается, то движение называют *равнозамедленным* (тангенциальное ускорение имеет противоположное направление вектору скорости), если увеличивается – *равноускоренным* (тангенциальное ускорение совпадает по направлению с вектором скорости).

3. *Неравномерное движение* – движение, при котором тангенциальное ускорение зависит от времени: $a_\tau = a_\tau(t)$. Интегрируя соотношения $a_\tau = d\upsilon_\tau / dt$ и $\upsilon_\tau = dl/dt$, найдем зависимости $\upsilon_\tau(t)$ и $l(t)$ при этом виде движения:

$$\upsilon_\tau = \upsilon_{0\tau} + \int_0^t a_\tau dt; \;\; l = \int_0^t \upsilon_\tau dt. \tag{1.35}$$

§ 1.3. Кинематика твердого тела

Любое движение твердого тела можно разложить на два основных вида движения: 1) поступательное движение; 2) вращательное движение.

Поступательное движение – это движение, при котором любая прямая, связанная с телом, остается параллельна самой себе (рис. 1.9).

Все точки тела при поступательном движении описывают одинаковые траектории, сдвинутые относительно друг друга, а также имеют одинаковые скорости и ускорения. Поэтому при изучении поступательного движения твердого тела достаточно изучить движение какой-либо одной его точки, т. е. задача сводится к изучению кинематики точки. В качестве такой точки чаще всего выбирают центр масс тела (см. § 2.5).

Вращательное движение – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения (рис. 1.10). Ось вращения может находиться вне тела. Вращательное движение является *плоским движением*, при котором траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях.

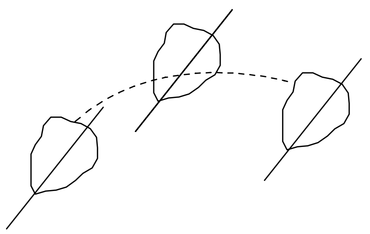


Рис. 1.9

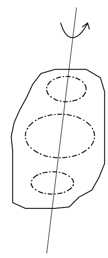


Рис. 1.10

Для описания вращения твердого тела вводят величины, относящиеся ко всему телу в целом, а не к отдельным его точкам: 1) угол поворота φ; 2) угловая скорость $\vec{\omega}$; 3) угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$.

Зависимость угла поворота от времени $\varphi = \varphi(t)$ задает *закон вращательного движения*.

Средняя угловая скорость – это величина, численно равная отношению угла поворота $\Delta\varphi$ к промежутку времени Δt, за который этот поворот произошел:

$$\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}. \tag{1.36}$$

Мгновенная угловая скорость (или просто *угловая скорость*) есть предел, к которому стремится $\omega_{ср}$ при стремлении промежутка времени Δt к нулю, т. е.

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{1.37}$$

Угловой скорости приписывают направление. По определению вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ направлен по оси вращения по правилу правого винта: направление $\vec{\omega}$ должно быть таким, чтобы глядя вдоль него мы видели поворот, совершающийся по часовой стрелке (рис. 1.11).

Вектор углового ускорения характеризует изменение угловой скорости со временем. Он численно равен изменению угловой скорости в единицу времени и определяется как первая производная от угловой скорости по времени:

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{1.38}$$

Вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в направлении вектора угловой $\vec{\omega}$ скорости, если угловая скорость возрастает (рис. 1.11, *а*), и в противоположную $\vec{\omega}$ сторону, если угловая скорость уменьшается (рис. 1.11, *б*).

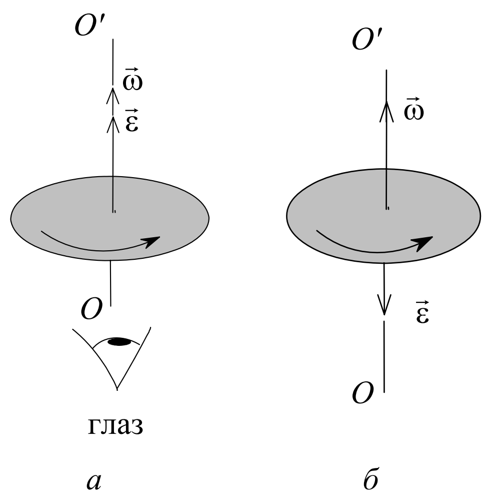


Рис. 1.11

В СИ единицами измерения угла поворота, угловой скорости и ускорения являются соответственно *радиан* (рад), *радиан в секунду* (рад/с) и *радиан на секунду в квадрате* (рад/с^2).

§ 1.4. Частные случаи вращения тела

1. *Равномерное вращение* – это вращение с постоянной угловой скоростью: $\omega = \text{const}$. Из (1.38) угловое ускорение при таком движении равно нулю: $\varepsilon = 0$. Интегрируя (1.37), найдем зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \omega t. \tag{1.39}$$

Период обращения (T) – это время, за которое тело делает один оборот. За время, равное периоду обращения ($t = T$), тело поворачивается на угол $\varphi = 2\pi$. Из (1.39) найдем связь между угловой скоростью и периодом обращения при равномерном вращении:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \tag{1.40}$$

Частотой вращения называют число оборотов в единицу времени:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{1.41}$$

2. *Равнопеременное вращение* – это вращение с постоянным по модулю угловым ускорением: $\varepsilon = \text{const}$. Интегрируя (1.38) по времени и считая, что в начальный момент времени $t = 0$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}_0$, найдем зависимость угловой скорости от времени:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \vec{\varepsilon} t. \tag{1.42}$$

В проекции на ось вращения (1.42) примет вид

$$\omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \tag{1.43}$$

где знаки плюс и минус соответствуют равноускоренному и равнозамедленному вращениям (двум возможным направлениям углового ускорения, см. рис. 1.11).

Подставим (1.43) в (1.37) и проинтегрируем получившееся уравнение, полагая, что при $t = 0$ $\varphi = 0$, найдем зависимость угла поворота от времени при этом виде вращения тела:

$$\varphi = \omega_0 t \pm \frac{\varepsilon t^2}{2}. \tag{1.44}$$

3. *Переменное вращение* – это вращение, при котором угловое ускорение зависит от времени: $\varepsilon = \varepsilon(t)$. Интегрируя (1.38), а затем (1.37), найдем угловую скорость и закон вращательного движения:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_0 + \int_0^t \vec{\varepsilon}dt\,;\ \varphi = \int_0^t \omega(t)dt\,. \qquad (1.45)$$

Заметим, что между формулами (1.21), (1.28), описывающими движение точки (или поступательное движение твердого тела), и формулами (1.37), (1.38), описывающими вращательное движение, существует прямая аналогия: дуговой координате соответствует угол поворота, скорости и тангенциальному ускорению движения соответствуют угловые скорость и ускорение. Более того, эти величины оказываются связаны между собой.

§ 1.5. Связь линейных и угловых величин

Найдем скорость $\vec{\upsilon}$ (линейную скорость) произвольной точки M твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси OO' с угловой скоростью ω (рис. 1.12). За время dt точка совершит перемещение $d\vec{r}$, по модулю равное элементарному пути ds, пройденному точкой ($|d\vec{r}| = ds$). Используя радианную меру измерения углов, получим $ds = Rd\varphi$, где R – расстояние точки от оси вращения (радиус окружности, по которой движется точка), $d\varphi$ – угол, на который повернулось тело. Тогда модуль скорости точки

$$\upsilon = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{Rd\varphi}{dt} \ \Rightarrow\ \upsilon = \omega R\,. \qquad (1.46)$$

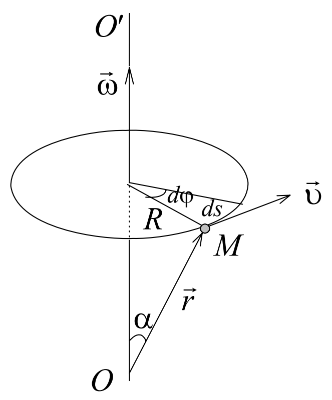


Рис. 1.12

Тангенциальное, нормальное и полное ускорения точки

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt} = R\frac{d\omega}{dt} \ \Rightarrow\ a_\tau = R\varepsilon\,;\ a_n = \frac{\upsilon^2}{R} \ \Rightarrow\ a_n = \omega^2 R; \qquad (1.47)$$

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2} \;\Rightarrow\; a=R\sqrt{\varepsilon^2+\omega^4}\,. \tag{1.48}$$

Таким образом, линейные скорости и ускорения точек твердого тела зависят от расстояния до оси вращения. Формулы (1.46)–(1.48) можно преобразовать к векторному виду, используя правило векторного умножения. Учитывая, что $R=r\sin\alpha$, где r – модуль радиуса-вектора точки, модуль скорости точки $\upsilon=\omega\, r\sin\alpha$, а вектор скорости

$$\vec{\upsilon}=\vec{\omega}\times\vec{r}. \tag{1.49}$$

Полное ускорение тела найдем, продифференцировав (1.49) по времени:

$$\vec{a}=\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \;\Rightarrow\; \vec{a}=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}+\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,. \tag{1.50}$$

Первое слагаемое в этом выражении является тангенциальным ускорением, а второе – нормальным ускорением:

$$\vec{a}_\tau=\vec{\varepsilon}\times\vec{r}\,;\; \vec{a}_n=\vec{\omega}\times\vec{\upsilon}\,. \tag{1.51}$$

Глава 2. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Динамика – раздел механики, в котором изучаются законы движения тел под действием приложенных к нему сил. *Основная задача динамики* состоит в том, чтобы определить кинематические уравнения движения тела, если известны все силы, действующие на это тело.

§ 2.1. Законы Ньютона

Движение тел под действием внешних сил подчиняется законам динамики, которые являются обобщением опытных фактов. В основе классической механики лежат три закона динамики, сформулированные И. Ньютоном.

Первый закон Ньютона (закон инерции). В кинематике, где речь идет лишь об описании движений и не затрагивается вопрос о причинах, вызывающих эти движения, никакой принципиальной разницы между различными системами отсчета нет, и все они в этом отношении равноправны. Совершенно иначе обстоит дело в динамике, при изучении законов движения. Здесь обнаруживаются существенное различие между системами отсчета и преимущества одних систем отсчета по сравнению с другими.

В принципе можно взять любую из бесчисленного множества систем отсчета. Однако законы механики в разных системах отсчета имеют, вообще говоря, различный вид, и может оказаться, что в произвольной системе отсчета законы даже совсем простых явлений будут весьма сложными. Естественно, возникает задача отыскания такой системы отсчета, в которой законы механики были бы возможно более простыми. Такая система отсчета, очевидно, наиболее удобна для описания механических явлений.

Опыт показывает, что причиной ускорения тела относительно некоторой произвольной системы отсчета могут быть как действие на данное тело других тел, так и свойство самой системы отсчета (действительно, относительно разных систем отсчета ускорение в общем случае будет различным). Однако в природе существуют такие системы отсчета, в которых ускорение тел обусловлено только действием на данное тело других тел. Тело, не подверженное действию никаких других тел, относительно такой системы отсчета будет покоиться или двигаться равномерно и прямолинейно (как говорят, по инерции). Такие системы отсчета называют *инерциальными.*

Утверждение, что инерциальные системы отсчета существуют, составляет содержание *первого закона Ньютона*.

Существование инерциальных систем отсчета подтверждается опытом. Наблюдения над ускорениями планет с очень высокой степенью точности показали инерциальность *гелиоцентрической системы отсчета*, связанной с центром Солнца, оси координат которой направлены на «неподвижные» звезды. В настоящее время инерциальность гелиоцентрической системы отсчета подтверждается всей совокупностью опытных данных.

Любая другая система отсчета, движущаяся равномерно и прямолинейно относительно гелиоцентрической системы, также является инерциальной. Таким образом, существует не одна, а бесчисленное множество инерциальных систем отсчета, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Системы отсчета, движущиеся с ускорением относительно инерциальных систем, называют *неинерциальными*.

Земля движется относительно Солнца по криволинейной траектории, имеющей форму эллипса. Криволинейное движение всегда происходит с некоторым ускорением. Кроме того, Земля совершает вращение вокруг своей оси. По этим причинам система отсчета, связанная с Землей, является неинерциальной. Однако ускорение такой системы настолько мало, что в большом числе случаев ее можно считать практически инерциальной.

Важной особенностью инерциальных систем отсчета является то, что по отношению к ним пространство и время обладают определенными свойствами. Опыт показывает, что в этих системах отсчета пространство однородно и изотропно, а время однородно.

Однородность и *изотропность пространства* заключаются в том, что свойства пространства одинаковы в различных точках (однородность), а в каждой точке одинаковы во всех направлениях (изотропность). *Однородность времени* заключается в том, что протекание физических явлений (в одних и тех же условиях) в разное время их наблюдения одинаково. Иначе говоря, различные моменты времени эквивалентны друг другу по своим физическим свойствам.

Заметим, что по отношению к неинерциальным системам отсчета пространство является неоднородным и неизотропным и время в общем случае будет неоднородным.

Второй закон Ньютона. В инерциальных системах отсчета всякое ускорение тела вызывается действием на него каких-либо других тел. Это влияние других тел, вызывающее ускорение, называют силой.

Таким образом, под *силой* в механике понимают количественную меру воздействия одного тела на другое. Сила – векторная величина. Она характеризуется численным значением и точкой приложения. За каждой силой, действующей на тело, стоит ее источник в виде того или иного конкретного тела.

Опыт показывает, что всякое тело «оказывает сопротивление» при любых попытках изменить его скорость как по модулю, так и по направлению. Это свойство, выражающее степень неподатливости тела приобретать ускорение (неподатливость к изменению скорости), называют инертностью. *Инертность* – это свойство, характеризующее способность тел приобретать ускорение. У различных тел это свойство проявляется в различной степени. Мерой инертности материальной точки служит величина, называемая *инертной массой*, или просто *массой* тела. Тела с большой массой являются более инертными, им труднее сообщить ускорение, чем более легким телам.

Согласно *второму закону Ньютона*, произведение массы материальной точки на ее ускорение равно действующей на нее силе, т. е.

$$m\vec{a} = \vec{F}. \tag{2.1}$$

Это уравнение называют *уравнением движения материальной точки*.

Если на тело действуют несколько других тел, то под силой в (2.1) надо понимать равнодействующую всех сил, действующих на данное тело:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n. \tag{2.2}$$

Заметим, что второй закон Ньютона (2.1) получает конкретное содержание только после того, как установлен вид функции $\vec{F}$ – зависимость от определяющих ее величин, или, как говорят, *закон силы*. Установление вида этой зависимости в каждом конкретном случае является одной из основных задач физической механики.

Единицей измерения силы в СИ является *ньютон* (Н). Согласно (2.1), ньютон – это такая сила, которая сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 $\text{м}/\text{с}^2$: $\text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$.

Второй закон Ньютона (2.1) полезно переписать через импульс материальной точки. *Импульсом* $\vec{p}$ материальной точки называют величину, равную произведению массы тела на его скорость:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}. \tag{2.3}$$

Т. к. ускорение тела $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$ и $m = \text{const}$, то в уравнении (2.1) массу можно поднести под знак производной, и второй закон Ньютона примет вид

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}. \tag{2.4}$$

Таким образом, изменение импульса материальной точки в единицу времени (скорость изменения импульса) равно действующей на тело силе.

Третий закон Ньютона. Всякое действие тел друг на друга носит характер *взаимодействия*: если тело *1* действует на тело *2* с силой $\vec{F}_{21}$, то и тело *2*, в свою очередь, действует на тело *1* с силой $\vec{F}_{12}$.

Третий закон Ньютона утверждает, что силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, всегда равны по модулю и направлены в противоположные стороны вдоль прямой, соединяющей эти точки (рис. 2.1), т. е.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \tag{2.5}$$

Это значит, что силы взаимодействия всегда появляются парами. Обе силы приложены к разным материальным точкам и, кроме того, являются силами одной природы.

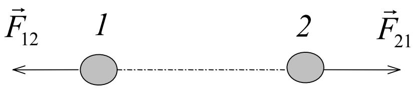


Рис. 2.1

В третьем законе Ньютона предполагается, что обе силы равны по модулю в любой момент времени независимо от движения точек. Это утверждение соответствует ньютоновскому представлению о мгновенном распространении взаимодействий – предположению, которое носит название *принципа дальнодействия* ньютоновской механики. Согласно этому принципу, взаимодействие между телами распространяется в пространстве с бесконечно большой скоростью. Если изменить положение одного тела, то сразу же можно обнаружить изменения во взаимодействующих с ним телах, как бы далеко они не находились.

В действительности это не так – существует конечная максимальная скорость распространения взаимодействий, которая равна скорости света в вакууме. Поэтому третий закон Ньютона (а также и второй) имеет определенные пределы применимости. Однако при скоростях тел, значительно меньших скорости света, с которыми имеет дело ньютоновская механика, оба закона выполняются с очень большой точностью.

Законы Ньютона являются основными законами механики. Они позволяют, в принципе, решить любую механическую задачу. Кроме того, из них могут быть выведены и все остальные законы механики.

§ 2.2. Преобразования Галилея и их следствия. Принцип относительности Галилея

Рассмотрим две инерциальные системы отсчета, двигающиеся друг относительно друга прямолинейно и равномерно. Одну из этих систем, обозначенную на рис. 2.2 буквой K, будем считать неподвижной, а вторая система K' будет двигаться с постоянной скоростью $\vec{V}$ относительно системы K. Оси координат x', y', z' K'-системы выберем параллельно соответствующим осям x, y, z K-системы так, чтобы оси x' и x совпадали между собой. Пусть система отсчета K' движется вдоль оси x системы отсчета K.

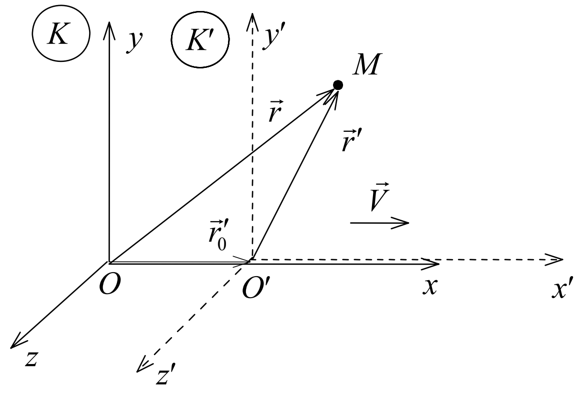


Рис. 2.2

Найдем связь между координатами x, y, z некоторой материальной точки M в системе K и координатами x', y', z' той же точки в системе K'. Считая, что в начальный момент времени начала координат O и O' совпадают, радиусы-векторы $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ точки M в K- и K'-системах отсчета связаны соотношением (рис. 2.2)

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{V}t, \tag{2.6}$$

где $\vec{r}_0 = \vec{V}t$ – радиус-вектор начала координат системы отсчета K' в K-системе. Кроме того, в классической механике время в обеих системах отсчета течет одинаковым образом, т. е.

$$t' = t. \tag{2.7}$$

Соотношения (2.6) и (2.7) представляют собой *преобразования Галилея*. Проецируя (2.6) на оси координат, получим преобразования Галилея для координат точки *M*:

$$x' = x - Vt;\ \ y' = y;\ \ z' = z;\ \ t' = t. \tag{2.8}$$

Следствия преобразований Галилея.

1. Длины отрезков (масштабы) инвариантны (неизменны) при преобразованиях Галилея.

Длина отрезка в системе отсчета K' между точками с координатами x_1', y_1', z_1' и x_2', y_2', z_2'

$$l' = \sqrt{(x_2' - x_1')^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2}\,. \tag{2.9}$$

Используя преобразования Галилея (2.8), найдем $x_1' = x_1 - Vt$, $x_2' = x_2 - Vt$, $y_1' = y_1$, $y_2' = y_2$, $z_1' = z_1$, $z_2' = z_2$. Подставив это в (2.9), найдем, что длина отрезка не изменяется, т. е. инвариантна:

$$l' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = l. \tag{2.10}$$

2. Промежутки времени между событиями инвариантны при преобразованиях Галилея.

Пусть в движущейся системе отсчета произошли два события в некоторые моменты времени t_1' и t_2'. Промежуток времени между событиями $\Delta t' = t_2' - t_1'$. В неподвижной системе координат эти события на основании (2.7) произошли в моменты времени $t_1 = t_1'$, $t_2 = t_2'$, и, следовательно, промежуток времени между событиями

$$\Delta t = t_2 - t_1 = t_2' - t_1' = \Delta t'. \tag{2.11}$$

3. Классический закон преобразования скоростей.

Продифференцировав (2.6) по времени, с учетом, что $\vec{V} = \text{const}$, найдем классический закон преобразования скорости точки при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой:

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V} \ \Rightarrow\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \tag{2.12}$$

где $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$ и $\vec{\upsilon}' = d\vec{r}'/dt$ – скорости точки в системах K и K'.

4. Инвариантность ускорения при преобразованиях Галилея.

Продифференцировав (2.12) по времени, с учетом, что $\vec{V} = \text{const}$, найдем

$$\vec{a} = \vec{a}', \tag{2.13}$$

где $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$, $\vec{a}' = d\vec{\upsilon}'/dt$ – ускорения точки в системах K и K'. Таким образом, ускорение точки одинаково во всех инерциальных системах отсчета.

Заметим, что и сила $\vec{F}$, действующая на точку, тоже не зависит от выбора системы отсчета, поскольку она определяется взаимным расположением тел и, возможно, их относительной скоростью, а эти величины в разных инерциальных системах отсчета одинаковы.

Таким образом, все три величины m, $\vec{a}$, $\vec{F}$, входящие во второй закон Ньютона (2.1), не изменяются при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, а следовательно, не изменяется и само уравнение (2.1). Другими словами, уравнение $m\vec{a} = \vec{F}$ инвариантно относительно преобразований Галилея. Этот факт является отражением *принципа относительности Галилея* – одного из важнейших принципов классической механики. Он является следствием обобщения опыта и подтверждается всем многообразием приложений классической механики.

Согласно *принципу относительности Галилея*, все инерциальные системы отсчета по своим механическим свойствам эквивалентны друг другу, соответственно все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом. Это значит, что никакими механическими опытами, проводимыми в пределах данной системы отсчета, нельзя установить, покоится ли эта система отсчета или движется. Например, находясь в вагоне поезда, движущегося прямолинейно и равномерно, не выглянув в окно, мы не сможем определить, движется вагон или покоится. Во всех инерциальных системах отсчета свойства пространства и времени одинаковы, одинаковы также и все законы механики.

§ 2.3. Силы в механике

Чтобы свести нахождение закона движения тела к чисто математической задаче, необходимо прежде всего, в соответствии с уравнением (2.1), знать действующую на тело силу, т. е. зависимость силы от определяющих ее величин. Каждая такая зависимость получена в конечном счете на основании обработки результатов опыта. В классической механике рассматриваются силы: гравитационные, упругости и трения. Два последних типа сил имеют электромагнитную природу.

Гравитационные силы. Согласно *закону всемирного тяготения*, сила гравитационного притяжения между двумя материальными точками пропорциональна произведению масс m_1 и m_2 точек, обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними и направлена по прямой, соединяющей эти точки:

$$F_{\text{г}} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}, \qquad (2.14)$$

где $G = 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2$ – гравитационная постоянная.

Закон сформулирован для материальных точек. Но по нему можно определить силу притяжения и тел конечных размеров, если предварительно разбить их на материальные точки, а затем сложить все силы взаимодействия. Это трудная математическая задача, но принципиально она разрешима. Именно таким вычислением можно доказать, что формулу (2.14) можно применить к однородным шарам, расстояние между центрами которых r.

Сила упругости. Под действием приложенных к нему сил всякое реальное тело *деформируется*, т. е. изменяет свои размеры и формы. Если после прекращения действия сил тело принимает первоначальные размеры и форму, то деформация называется *упругой*. Если деформации сохраняются после снятия нагрузки, то их называют *пластическими*.

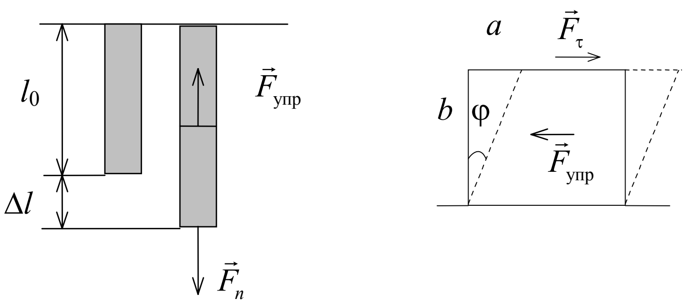
Простейшими видами деформации являются деформации растяжения-сжатия и сдвига. Все остальные реально осуществимые на практике деформации, например, кручение и изгиб, сводятся к этим простейшим деформациям.

Деформация растяжения-сжатия представлена на рис. 2.3, *а*. К образцу длиной l_0 приложена сила $\vec{F}_n$ перпендикулярно площади поперечного сечения S образца. В результате длина стержня увеличивается на величину Δl, называемую *абсолютной деформацией*. В состоянии равновесия силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$, возникающие в образце, уравновесят внешнюю силу, т. е. $\vec{F}_{\text{упр}} = -\vec{F}_n$.

По экспериментальному *закону Гука*, при небольших деформациях абсолютная деформация прямо пропорциональна растягивающей силе, так что

$$F_{\text{упр}} = k\Delta l, \tag{2.15}$$

где k – коэффициент жесткости образца.



а *б*

Рис. 2.3

Относительной деформацией называют величину

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}. \tag{2.16}$$

Нормальным напряжением, возникающем в образце, называют величину

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S}. \tag{2.17}$$

Из опыта следует, что относительная деформация прямо пропорциональна нормальному напряжению, т. е.

$$\sigma_n = E\varepsilon, \tag{2.18}$$

где E – коэффициент пропорциональности, который называют *модулем Юнга*, он характеризует упругие свойства материала. Соотношение (2.18) называют *законом Гука для относительной деформации.*

Деформация сдвига имеет место в том случае, когда плоские слои тела, параллельные некоторой плоскости, смещаются друг относительно друга под действием силы, приложенной по касательной к образцу (рис. 2.3, *б*).

Опыт показывает, что при малом сдвиге возникающая сила упругости прямо пропорциональна углу сдвига φ, т. е.

$$F_{\text{упр}} = k_{\text{сд}}\varphi. \tag{2.19}$$

В качестве характеристики деформации сдвига используется величина, называемая *относительным сдвигом*:

$$\gamma = \frac{a}{b} = \mathrm{tg}\varphi . \tag{2.20}$$

При упругих деформациях угол φ мал, так что $\mathrm{tg}\varphi \approx \varphi$ и соответственно $\gamma \approx \varphi$.

В образце при деформации сдвига возникает *тангенциальное (касательное) напряжение*

$$\tau = \frac{F_\tau}{S}, \tag{2.21}$$

где S – площадь грани.

Опыт показывает, что относительный сдвиг пропорционален тангенциальному напряжению, т. е.

$$\tau = G\gamma , \tag{2.22}$$

где коэффициент G зависит только от свойств материала и называется *модулем сдвига*.

Заметим, что одним из проявлений сил упругости являются *реакции* – силы, с которыми на данное тело действуют тела, ограничивающие его движение (например, силы реакции опоры $\vec{N}$ или подвеса $\vec{T}$).

Сила тяжести и вес тела. Все тела под действием силы притяжения Земли падают с одинаковым относительно поверхности Земли ускорением $\vec{g}$, которое называют *ускорением свободного падения*. Это означает, что в системе отсчета, связанной с Землей, на всякое тело действует сила

$$\vec{F}_\text{т} = m\vec{g} , \tag{2.23}$$

которую называют *силой тяжести*.

Заметим, что вследствие неинерциальности системы отсчета, связанной с Землей, сила тяжести несколько отличается от гравитационной силы притяжения между Землей и телом. Сила тяжести является равнодействующей гравитационной силы и центробежной силы инерции, возникающей во вращающейся системе отсчета, связанной с Землей (рис. 2.4): $\vec{F}_\text{т} = \vec{F}_\text{г} + \vec{F}_\text{цб}$.

Отличие силы тяжести от гравитационной силы невелико, т. к. центробежная сила инерции значительно меньше гравитационной силы, поэтому

$$F_т \approx F_г = G\frac{Mm}{r^2} = G\frac{Mm}{(R+h)^2}, \tag{2.24}$$

где M – масса Земли; $r = R + h$ – расстояние от центра Земли до тела; R – радиус Земли; h – расстояние от поверхности Земли до тела.

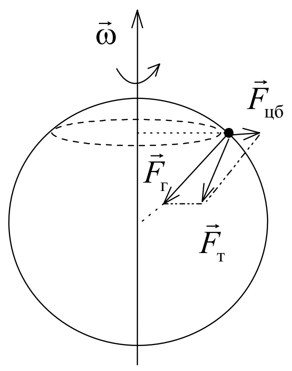


Рис. 2.4

Направление силы тяжести совпадает с направлением нити, натянутой грузом, которое называется направлением отвеса, или вертикальным направлением.

Подставляя (2.24) в (2.23), найдем ускорение свободного падения на высоте h над поверхностью Земли:

$$g = G\frac{M}{(R+h)^2}. \tag{2.25}$$

Вблизи поверхности Земли, когда $h \ll R$,

$$g = G\frac{M}{R^2} = 9{,}8\ \frac{м}{с^2}. \tag{2.26}$$

Весом называют силу $\vec{P}$, с которой тело действует на опору или подвес (рис. 2.5). По третьему закону Ньютона, $\vec{P} = -\vec{N}$.

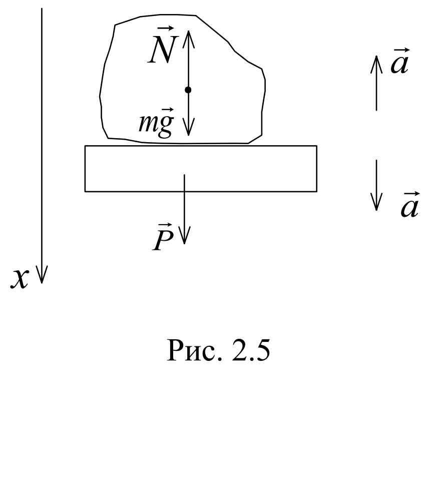


Рис. 2.5

В общем случае опора с телом может двигаться с ускорением $\vec{a}$. Тогда второй закон Ньютона для тела имеет вид

$$m\vec{a} = \vec{N} + m\vec{g}. \tag{2.27}$$

Отсюда вес тела

$$\vec{P} = -\vec{N} = m(\vec{g} - \vec{a}). \tag{2.28}$$

Если ускорение системы равно нулю ($a = 0$), то вес тела будет равен силе тяжести:

$$P = mg. \tag{2.29}$$

Если опора с телом движется вверх (ускорение направлено вверх), то, проецируя уравнение (2.28) на ось x, найдем вес тела:

$$P = m(g + a). \tag{2.30}$$

В этом случае вес тела больше силы тяжести.

При движении опоры и подвеса вниз (ускорение направлено вниз), проецируя уравнение (2.28) на ось x, найдем вес тела:

$$P = m(g - a), \tag{2.31}$$

который оказывается меньше силы тяжести. При свободном падении опоры с телом $\vec{a} = \vec{g}$, согласно (2.28), вес будет равен нулю, т. е. наступает состояние *невесомости*. Космический корабль, летящий вокруг Земли с выключенными двигателями, движется, как и свободно падающая опора, с ускорением $\vec{g}$, вследствие чего тела внутри корабля находятся в состоянии невесомости – они не оказывают давления на соприкасающиеся с ними тела.

Силы трения. Это силы, возникающие при соприкосновении поверхностей тел и препятствующие их относительному движению.

Различают трение двух видов: 1) внешнее (сухое) и 2) внутреннее (вязкое).

Внешним трением называют трение между поверхностями двух твердых тел при отсутствии какой-либо прослойки, например, смазки, между ними.

Внутренним трением называют трение между твердым телом и жидкой или газообразной средой, а также между слоями такой среды.

Различают три вида внешнего трения: силы трения покоя, скольжения и качения.

Сила трения покоя возникает при попытке вызвать скольжение одного тела по другому. При значениях внешней силы $0 < F < F_0$ тело остается в покое. Сила трения покоя по модулю равна силе, пытающейся сдвинуть тело, и направлена в противоположную сторону (рис. 2.6). Максимальная сила трения покоя F_0 пропорциональна силе нормального давления F_n, которая по модулю равна силе реакции опоры $(F_n = N)$, т. е.

$$F_{\text{тр. п.}}^{\max} = \mu_0 N, \tag{2.32}$$

где μ_0 – *коэффициент трения покоя*, он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей.

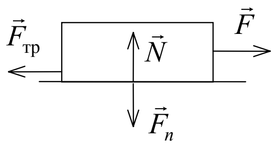


Рис. 2.6

Если внешняя сила превзойдет по модулю F_0, тело начинает скользить по поверхности, возникает *сила трения скольжения*, которая также пропорциональна силе нормального давления:

$$F_{\text{тр. ск.}} = \mu N, \tag{2.33}$$

где μ – *коэффициент трения скольжения*, он зависит от природы и состояния трущихся поверхностей, а также от скорости относительного движения тел.

Сила трения качения действует со стороны опоры на катящееся по ней тело. Она также пропорциональна силе нормального давления, но коэффициент пропорциональности значительно меньше коэффициента трения скольжения и зависит от радиуса катящегося тела:

$$F_{\text{тр. к.}} = \frac{\mu_{\text{к}}}{r} N, \tag{2.34}$$

где $\mu_{\text{к}}$ – *коэффициент трения качения*; r – радиус тела.

Силы *внутреннего (вязкого) трения* зависят от скорости движения тела в среде. При небольших скоростях движения сила линейно возрастает с увеличением скорости и направлена в противоположную сторону движения:

$$\vec{F}_{\text{тр}} = -k\vec{\upsilon}, \tag{2.35}$$

где коэффициент k зависит от формы и размеров тела, состояния его поверхности, а также от свойства среды, называемого вязкостью.

§ 2.4. Система материальных точек. Закон сохранения импульса

Механической системой называют совокупность конечного числа взаимодействующих материальных точек или тел. Силы взаимодействия между материальными точками механической системы называют *внутренними* $\vec{F}^i$. Силы, с которыми на материальные точки системы действуют тела, не входящие в систему, называют *внешними* $\vec{F}^e$.

Импульсом системы материальных точек называют векторную сумму импульсов ее отдельных частиц:

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{\upsilon}_k = m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 + ... + m_n\vec{\upsilon}_n, \tag{2.36}$$

где $\vec{p}_k = m_k\vec{\upsilon}_k$ – импульс k-й частицы.

Найдем физическую величину, которая определяет изменение импульса системы. Для этого продифференцируем (2.36) по времени:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{p}_k}{dt}. \tag{2.37}$$

Импульс каждой материальной точки будет изменяться под действием как внешних, так и внутренних сил. Согласно (2.2), (2.4),

$$\frac{d\vec{p}_k}{dt} = \vec{F}_k^e + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{F}_{kj}^i, \tag{2.38}$$

где $\vec{F}_k^e$ – внешняя сила, действующая на k-ю частицу; $\sum \vec{F}_{kj}^i$ – сумма внутренних сил, действующих на k-ю частицу со стороны всех остальных частиц системы ($j \neq k$, т. к. частица не действует сама на себя).

Подставив (2.38) в (2.37), получим

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{F}_{kj}^i. \tag{2.39}$$

Двойная сумма справа – это сумма всех внутренних сил. Поскольку внутренние силы входят в эту сумму парами и, по третьему закону Ньютона (2.5), $\vec{F}_{kj}^i = -\vec{F}_{jk}^i$, то результирующая сила в каждой паре взаимодействия равна нулю, а значит, равна нулю векторная сумма всех внутренних сил. В результате последнее уравнение принимает следующий вид:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^e, \tag{2.40}$$

где $\vec{F}^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e$ – суммарная внешняя сила, действующая на систему.

Данное выражение определяет изменение импульса системы. Из (2.40) следует, что приращение импульса системы за конечный промежуток времени t

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = \int_0^t \vec{F}^e dt. \tag{2.41}$$

Согласно (2.41), изменение импульса системы определяется только внешними силами, действующими на систему.

Для *замкнутой* (*изолированной*) системы, когда на систему не действуют никакие посторонние тела или их действие компенсируется,

$$\vec{F}^e = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k^e = 0, \tag{2.42}$$

из (2.40) вытекает, что импульс системы $\vec{p}$ постоянен:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p} = \sum_{k=1}^{n} \vec{p}_k = \text{const}. \tag{2.43}$$

Это утверждение составляет содержание *закона сохранения импульса*, который формулируется следующим образом: импульс замкнутой системы материальных точек остается постоянным.

Заметим, что импульсы отдельных материальных точек замкнутой системы могут изменяться со временем, однако эти изменения происходят так, что приращение импульса одной точки равно убыли импульса оставшейся части системы.

У незамкнутой системы может сохраняться не сам импульс $\vec{p}$, а его проекция p_x на некоторое направление x. Это имеет место, когда проекция внешних сил на данное направление равна нулю. Действительно, проецируя (2.40) на направление x, получим

$$\frac{dp_x}{dt} = F_x^e = \sum_{k=1}^{n} F_{k_x}^e = 0 \Rightarrow p_x = \text{const}. \tag{2.44}$$

Закон сохранения импульса представляет собой фундаментальный закон природы, не знающий никаких исключений. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства − его однородности (одинаковость свойств пространства во всех его точках).

§ 2.5. Движение центра масс системы

При описании движения механической системы удобно использовать понятие центра масс (или центра инерции).

Центром масс системы называется точка C (рис. 2.7), положение которой задается радиусом-вектором $\vec{r}_c$, определяемым следующим образом:

$$\vec{r}_c = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + \ldots + m_n\vec{r}_n}{m} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\vec{r}_k}{m}, \tag{2.45}$$

где m_k и $\vec{r}_k$ − масса и радиус-вектор k-й точки системы; $m = \sum\limits_{k=1}^{n} m_k$ − масса всей системы.

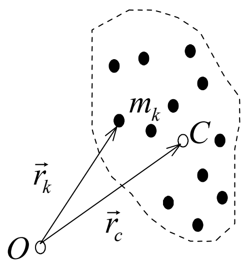


Рис. 2.7

Найдем скорость центра масс системы. Продифференцировав (2.45) по времени, найдем

$$\vec{\upsilon}_c = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k \dfrac{d\vec{r}_k}{dt}}{m} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\vec{\upsilon}_k}{m} = \frac{\vec{p}}{m}. \tag{2.46}$$

Отсюда следует, что импульс системы равен произведению массы системы на скорость ее центра масс:

$$\vec{p} = m\vec{\upsilon}_c. \tag{2.47}$$

Подставляя импульс системы (2.47) в формулу (2.40), получим *уравнение движения центра масс*:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt}=\vec{F}^e. \tag{2.48}$$

Согласно этому уравнению, центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе системы и на которую действует сила, равная векторной сумме внешних сил, приложенных к системе.

Для замкнутой системы $\vec{p}=m\vec{\upsilon}_c=\text{const}$, отсюда следует, что центр масс системы движется прямолинейно и равномерно $(\vec{\upsilon}_c=\text{const})$ или остается в состоянии покоя.

§ 2.6. Уравнение моментов. Закон сохранения момента импульса

Действие силы на тело, имеющее ось вращения, зависит не только от значения силы, но и от точки ее приложения относительно оси. Мерой действия силы при вращательном движении является момент силы.

Моментом силы $\vec{M}$ *относительно неподвижной точки О* называется физическая величина, равная векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$, проведенного из точки *О* в точку приложения силы, на силу $\vec{F}$ (рис. 2.8):

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}. \tag{2.49}$$

Момент силы $\vec{M}$ характеризует способность силы вращать тело вокруг точки, относительно которой он берется.

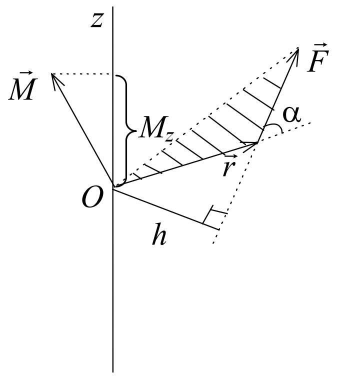


Рис. 2.8

Согласно правилу векторного умножения, вектор $\vec{M}$ перпендикулярен векторам $\vec{r}$, $\vec{F}$ и тройка векторов $\vec{M}$, $\vec{r}$, $\vec{F}$ является правой (рис. 2.8). Модуль момента силы

$$M = rF\sin\alpha = Fh, \tag{2.50}$$

где $h = r\sin\alpha$ – *плечо силы*, кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой *O*; α – угол между $\vec{r}$ и $\vec{F}$.

Проекция M_z вектора $\vec{M}$ на некоторую ось *z*, проходящую через точку *O*, относительно которой определен $\vec{M}$, называется *моментом силы относительно данной оси*. Он не зависит от выбора точки *O* на оси и характеризует способность силы $\vec{F}$ вращать тело вокруг этой оси.

Моментом импульса $\vec{L}$ материальной точки относительно точки O называют физическую величину, равную векторному произведению радиуса-вектора $\vec{r}$ материальной точки относительно точки *O* на ее импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{\upsilon}. \tag{2.51}$$

Моментом импульса системы материальных точек называют сумму моментов импульса материальных точек системы:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{n} \vec{L}_k = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{p}_k. \tag{2.52}$$

Проекция вектора $\vec{L}$ на некоторую ось *z*, проходящую через точку *O*, относительно которой определен $\vec{L}$, называется *моментом импульса L_z относительно данной оси*. Он не зависит от выбора точки *O* на оси.

Продифференцируем уравнение (2.51) по времени:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{\upsilon} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{F}, \tag{2.53}$$

где учтено, что $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$ – скорость материальной точки и, согласно второму закону Ньютона (2.4), $\vec{F} = d\vec{p}/dt$ – сила, действующая на нее. Т. к. скорость $\vec{\upsilon}$ и импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ имеют одно направление, то $\vec{\upsilon} \times \vec{p} = 0$, и учитывая, что $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ – момент силы (2.49), действующий на тело, получим

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \qquad (2.54)$$

Согласно (2.54), момент силы, действующий на материальную точку, определяет изменение момента импульса со временем. Уравнение (2.54) называют *уравнением моментов*.

Из уравнения моментов следует, что если $\vec{M} = 0$, то $\vec{L} = \text{const}$. Другими словами, если относительно некоторой точки O выбранной системы отсчета момент всех сил, действующих на тело, равен нулю в течение интересующего нас промежутка времени, то момент импульса тела относительно этой точки остается постоянным в течение этого времени.

Для системы материальных точек момент импульса $\vec{L}_k$ каждой материальной точки будет изменяться как под действием момента внешних сил $\vec{M}_k^e$, действующих на точку, так и под действием моментов внутренних сил $\vec{M}_{kj}^i$, действующих со стороны тел, входящих в систему. Уравнение моментов (2.54) для каждой материальной точки имеет вид

$$\frac{d\vec{L}_k}{dt} = \vec{M}_k^e + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{M}_{kj}^i . \qquad (2.55)$$

Продифференцировав (2.52) по времени и учитывая (2.55), найдем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \frac{d\vec{L}_k}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}_k^e + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \vec{M}_{kj}^i . \qquad (2.56)$$

Второе слагаемое в (2.56) представляет суммарный момент внутренних сил в системе. По третьему закону Ньютона (2.5), внутренние силы попарно одинаковы по модулю, противоположны по направлению и лежат на одной прямой ($\vec{F}_{kj}^i = -\vec{F}_{jk}^i$), т. е. имеют одинаковое плечо (см. рис. 2.9).

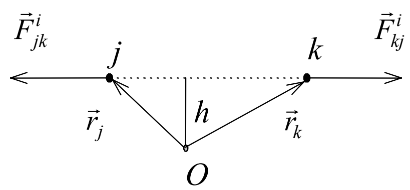


Рис. 2.9

Поэтому моменты сил каждой пары взаимодействия равны по модулю и противоположны по направлению: $\vec{M}^{i}_{kj} = -\vec{M}^{i}_{jk}$, т. е. уравновешивают друг друга, и значит, суммарный момент внутренних сил в (2.56) равен нулю.

В результате (2.56) примет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}^{e}_{k} = \vec{M}^{e}. \tag{2.57}$$

Согласно (2.57), изменение момента импульса $\vec{L}$ системы определяется суммарным моментом внешних сил $\vec{M}^{e} = \sum_{k=1}^{n} \vec{M}^{e}_{k}$, действующих на систему. Из (2.57) следует, что приращение момента импульса системы за конечный промежуток времени t

$$\vec{L}_2 - \vec{L}_1 = \int_0^t \vec{M}^{e} dt. \tag{2.58}$$

Из (2.57) вытекает *закон сохранения момента импульса системы*: момент импульса замкнутой системы, когда $\vec{M}^{e} = 0$, остается постоянным, т. е. не меняется со временем:

$$\vec{L} = \sum_{k=1}^{n} \vec{L}_k = \mathrm{const}. \tag{2.59}$$

У незамкнутых систем может сохраняться не сам момент импульса $\vec{L}$, а его проекция на некоторую неподвижную ось z. Это имеет место, когда проекция суммарного момента внешних сил на данную ось равна нулю: $M^{e}_{z} = 0$. Действительно, проецируя уравнение (2.57) на ось z, получим

$$\frac{dL_z}{dt} = M^{e}_{z} = 0 \;\Rightarrow\; L_z = \sum_{k=1}^{n} L_{k_z} = \mathrm{const}. \tag{2.60}$$

Закон сохранения момента импульса, как и закон сохранения импульса, представляет собой фундаментальный закон природы. Он является следствием определенного свойства симметрии пространства – его изотропности (одинаковость свойств пространства во всех его направлениях).

Глава 3. ДИНАМИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА

§ 3.1. Уравнения движения. Условия равновесия

Абсолютно твердое тело можно рассматривать как систему частиц (материальных точек) с неизменным расстоянием между ними. Для любой системы материальных точек справедливо уравнение движения центра масс (2.48) и уравнение моментов (2.57):

$$m\frac{d\vec{\upsilon}_c}{dt} = \vec{F}^e; \ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^e, \tag{3.1}$$

где $\vec{F}^e$ и $\vec{M}^e$ – результирующие сил и моментов сил, действующих на тело.

Зная законы действующих внешних сил, точки их приложения и начальные условия, с помощью этих уравнений можно найти как скорость, так и положение каждой точки твердого тела в произвольный момент времени, т. е. полностью решить задачу о движении тела. Однако, несмотря на кажущуюся простоту уравнений, решение их в общем случае представляет собой весьма трудную задачу.

Выясним условия равновесия твердого тела. Тело будет оставаться в состоянии покоя, если нет причин, вызывающих его движение. Согласно уравнениям (3.1), для этого необходимо выполнение двух условий:

1) сумма всех внешних сил, приложенных к телу, должна быть равна нулю: $\vec{F}^e = 0$;

2) суммарный момент внешних сил должен быть равен нулю: $\vec{M}^e = 0$.

§ 3.2. Основное уравнение динамики вращательного движения

Рассмотрим вращение твердого тела вокруг неподвижной оси (рис. 3.1). Найдем сначала выражение для момента импульса твердого тела относительно оси вращения.

Каждая отдельная точка тела массой m_k движется по окружности радиуса r_k со скоростью $\vec{\upsilon}_k$. Момент импульса точки относительно оси вращения

$$L_{k_z} = m_k r_k \upsilon_k = m_k r_k^2 \omega, \tag{3.2}$$

где была учтена связь линейной скорости с угловой: $\upsilon_k = \omega r_k$. Тогда момент импульса системы точек относительно оси вращения, учитывая, что угловая скорость одинакова для каждой точки твердого тела,

$$L_z = \sum_{k=1}^{n} L_{k_z} = \omega \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2. \tag{3.3}$$

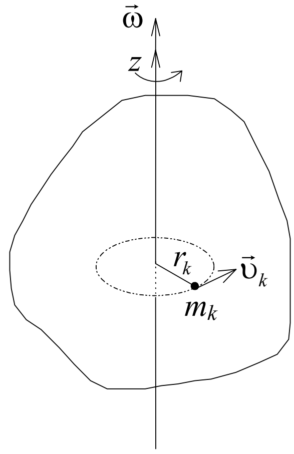


Рис. 3.1

Величину I_z, равную сумме произведений масс тел системы на квадраты их расстояний от оси вращения, называют *моментом инерции системы* относительно данной оси:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2. \tag{3.4}$$

Таким образом, момент импульса твердого тела относительно оси вращения тела определяется соотношением

$$L_z = I_z \omega. \tag{3.5}$$

Момент инерции тела (3.4) зависит от распределения массы относительно интересующей нас оси. Распределение массы тела характеризуется с помощью величины, называемой плотностью ρ тела. Заменяя в (3.4) массу m_k материальной точки на массу $dm = \rho dV$ элементарного объема dV тела и переходя в (3.4) от суммирования к интегрированию, получим формулу, которую используют для вычисления момента инерции твердого тела:

$$I_z = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV, \tag{3.6}$$

где интегрирование проводится по всему объему V тела.

Из второго уравнения (3.1) следует, что

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e. \tag{3.7}$$

Подставив сюда выражение (3.5) для L_z и учитывая, что момент инерции I_z для твердого тела не зависит от времени, придем к уравнению

$$I_z \varepsilon = M_z^e. \tag{3.8}$$

где $\varepsilon = d\omega/dt$ – угловое ускорение. Уравнение (3.8) называют *основным уравнением динамики вращательного движения*. Из этого уравнения видно, что момент инерции I_z тела является мерой инертности тела при вращательном движении: при одном и том же значении момента внешних сил M_z^e тело с большим моментом инерции приобретает меньшее угловое ускорение ε.

§ 3.3. Способы вычисления момента инерции

Моменты инерции системы материальных точек и твердого тела определяются соотношениями

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^2 ; \tag{3.9}$$

$$I_z = \int r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV. \tag{3.10}$$

Если вычислить сумму (3.9) или интеграл (3.10), то момент инерции любого тела можно выразить через массу тела, его геометрические размеры и положение относительно оси вращения.

Во многих случаях расчеты существенно упрощаются при использовании двух свойств момента инерции, которые следуют из определения этой величины:

1. Первое свойство (*свойство аддитивности*). Момент инерции системы относительно некоторой оси равен сумме моментов инерции тел или всех частей системы относительно этой оси:

$$I_z = \sum_{k=1}^{n} I_{k_z} , \; I_z = \int dI_z , \tag{3.11}$$

где I_{k_z} – моменты инерции тел, входящих в систему ($k = \overline{1,n}$); dI_z – момент инерции малого элемента объема dV тела.

2. Второе свойство (*теорема Штейнера*). Момент инерции I_z тела относительно произвольной оси *z* равен сумме момента инерции I_c относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела *C*, и произведения массы *m* тела на квадрат расстояния *d* между осями (рис. 3.2):

$$I_z = I_c + md^2. \qquad (3.12)$$

Эта теорема сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Рассмотрим несколько примеров вычисления моментов инерции тел, имеющих простую форму.

1. *Момент инерции однородного диска (цилиндра)*. Определим момент инерции диска радиуса *R* относительно оси *z*, проходящей через центр масс перпендикулярно плоскости диска (рис. 3.3).

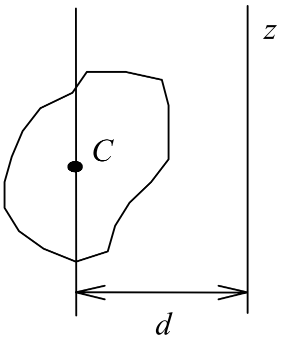


Рис. 3.2

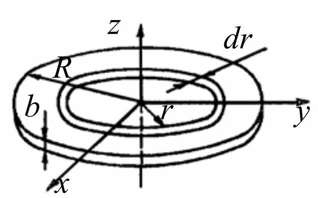


Рис. 3.3

Выделим бесконечно малый элемент объема диска шириной *dr* радиуса *r*: $dV = 2\pi r dr b$, где *b* – толщина диска. Момент инерции выделенного объема

$$dI_z = r^2 \rho dV = 2\pi\rho b r^3 dr. \qquad (3.13)$$

Момент инерции диска определим, используя (3.10) или свойство аддитивности (3.11):

$$I_z = \int dI_z = 2\pi\rho b \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi\rho b R^4}{2}. \qquad (3.14)$$

Учитывая, что масса диска $m = \rho V = \rho\pi R^2 b$, найдем

$$I_z = \frac{mR^2}{2}. \tag{3.15}$$

2. *Момент инерции однородного тонкого стержня.* Определим момент инерции стержня длиной l относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину (рис. 3.4).

Выделим на стержне бесконечно малый элемент объема длиной dx: $dV = Sdx$, где S – площадь поперечного сечения стержня, расположенного на расстоянии x от оси. Момент инерции выделенного объема

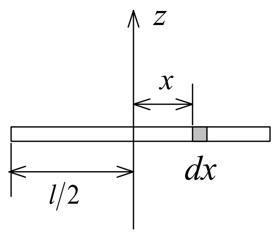


Рис. 3.4

$$dI_z = x^2 \rho dV = x^2 \rho S dx. \tag{3.16}$$

Тогда момент инерции диска

$$I_z = \int dI_z = \rho S \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \left.\frac{\rho S x^3}{3}\right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{\rho S l^3}{12}. \tag{3.17}$$

Учитывая, что масса стержня $m = \rho V = \rho S l$, найдем

$$I_z = \frac{ml^2}{12}. \tag{3.18}$$

Найдем момент инерции стержня относительно оси, проходящей через один из его концов (рис. 3.5). Воспользуемся теоремой Штейнера, учитывая, что расстояние между осями $d = l/2$. Так что

$$I_z = I_c + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}. \tag{3.19}$$

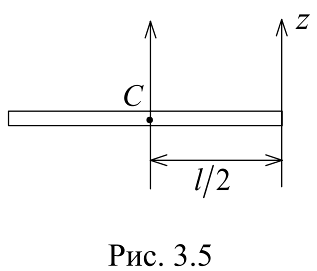
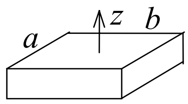


Рис. 3.5

В таблице приведены формулы моментов инерции однородных тел простейшей формы.

Моменты инерции однородных тел простейшей формы

Тело	Положение оси	Момент инерции
1. Материальная точка	На расстоянии r от оси	$I_z = mr^2$
2. Полый тонкостенный цилиндр (или кольцо) радиуса R и массой m	Ось симметрии	$I_z = mR^2$
3. Диск (или цилиндр) радиуса R и массой m	Ось симметрии	$I_z = \frac{1}{2}mR^2$
4. Тонкий стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$I_z = \frac{1}{3}ml^2$
5. Стержень длиной l и массой m	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$I_z = \frac{1}{12}ml^2$
6. Шар радиуса R и массой m	Ось проходит через центр шара	$I_z = \frac{2}{5}mR^2$
7. Параллелепипед		$I_z = \frac{m}{12}(a^2 + b^2)$

Глава 4. РАБОТА И МЕХАНИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

§ 4.1. Работа силы. Мощность

Работа. Если сила, действующая на материальную точку, перемещает его на некоторое расстояние, то говорят, что эта сила совершает работу. *Элементарной работой* δA силы $\vec{F}$ при элементарном (бесконечно малом) перемещении $d\vec{r}$ называют скалярное произведение силы на перемещение:

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F\cos\alpha\,|\,d\vec{r}\,| = F_s ds, \tag{4.1}$$

где α – угол между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$; $F_s = F\cos\alpha$ – проекция вектора $\vec{F}$ на вектор перемещения $d\vec{r}$; $ds = |\,d\vec{r}\,|$ – элементарный путь (рис. 4.1).

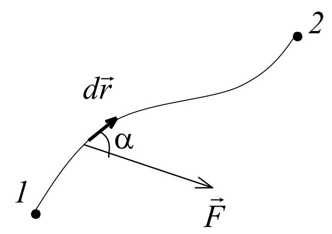


Рис. 4.1

Величина δA – алгебраическая: в зависимости от угла между векторами $\vec{F}$ и $d\vec{r}$ (или от знака проекции F_s вектора $\vec{F}$ на вектор $d\vec{r}$) она может быть как положительной, так и отрицательной и, в частности, равной нулю (если $\vec{F} \perp d\vec{r}$, т. е. $F_s = 0$). Если $0 < \alpha < \pi/2$, то $\delta A > 0$ – в этом случае сила является движущей; если $\alpha > \pi/2$, то $\delta A < 0$ – силу $\vec{F}$ называют силой сопротивления; если $\alpha = \pi/2$, то $\delta A = 0$ – сила работы не совершает.

Суммируя (интегрируя) выражение (4.1) по всем элементарным участкам пути от точки *1* до точки *2*, найдем работу силы на этом участке пути:

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F_s ds. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) справедлива не только для материальной точки, но и вообще для любого тела. Надо только иметь в виду, что под $d\vec{r}$ (или ds) следует понимать перемещение точки приложения силы.

Если тело движется прямолинейно и на него действует постоянная сила $\vec{F} = \text{const}$, то из (4.2) следует, что работа этой силы

$$A_{12} = F\,|\Delta\vec{r}\,|\cos\alpha = Fs\cos\alpha, \tag{4.3}$$

где $|\Delta\vec{r}\,|$ – модуль перемещения при прямолинейном движении, численно равный пути, пройденному телом ($|\Delta\vec{r}\,| = s$); α – угол между силой и перемещением.

Если на тело в процессе движения действует несколько сил, результирующая которых $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n$, то работа результирующей силы равна алгебраической сумме работ, совершаемых каждой из сил в отдельности. Действительно,

$$A = \int \vec{F}d\vec{r} = \int (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n)d\vec{r} =$$

$$= \int \vec{F}_1 d\vec{r} + \int \vec{F}_2 d\vec{r} + \ldots + \int \vec{F}_n d\vec{r} = A_1 + A_2 + \ldots + A_n. \tag{4.4}$$

Найдем работу силы при вращательном движении вокруг оси z. Воспользуемся тем, что скорость точки $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$ при вращательном движении связана с угловой скоростью вращения $\vec{\omega}$ соотношением (1.49): $\vec{\upsilon} = \vec{\omega}\times\vec{r}$. Тогда элементарное перемещение $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt = \vec{\omega}\times\vec{r}dt$ и элементарная работа

$$\delta A = \vec{F}d\vec{r} = \vec{F}(\vec{\omega}\times\vec{r})dt. \tag{4.5}$$

Учитывая, что смешанное произведение векторов допускает их циклическую перестановку ($\vec{F}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}(\vec{r}\times\vec{F})$) и что $\vec{M} = \vec{r}\times\vec{F}$ – момент силы, действующей на тело, получим

$$\delta A = \vec{\omega}\vec{M}dt. \tag{4.6}$$

Т. к. угловая скорость $\vec{\omega}$ направлена вдоль оси вращения z, то скалярное произведение векторов $\vec{\omega}\vec{M} = \omega M\cos\beta = \omega M_z$, где $M_z = M\cos\beta$ – проекция вектора $\vec{M}$ на ось z. Учитывая, что $\omega = d\varphi/dt$, окончательно найдем

$$\delta A = M_z d\varphi. \tag{4.7}$$

Работа силы при повороте тела на конечный угол φ равна

$$A = \int_0^{\varphi} M_z d\varphi. \tag{4.8}$$

В случае, если $M_z = \text{const}$, последнее выражение упрощается: $A = M_z \varphi$.

Единицей измерения работы в СИ является *джоуль* (Дж). Согласно (4.3), джоуль – это работа силы в 1 Н на пути в 1 м (при условии, что направление силы совпадает с перемещением), т. е. 1 Дж $= 1$ Н $\cdot$ м.

Мощность. Для характеристики скорости, с которой совершается работа, вводят величину, называемую мощностью. *Мощность P* – это работа, совершаемая силой за единицу времени. За время dt сила совершит работу δA, так что

$$P = \frac{\delta A}{dt}. \tag{4.9}$$

Используя выражение (4.1) для элементарной работы и учитывая, что $\vec{\upsilon} = d\vec{r}/dt$ – мгновенная скорость тела, получим выражение для мощности силы

$$P = \vec{F}\vec{\upsilon} = F\upsilon\cos\alpha. \tag{4.10}$$

При вращательном движении мощность силы определяется моментом этой силы и угловой скоростью. Действительно, подставляя в (4.9) соотношение для элементарной работы при вращательном движении (4.7), найдем

$$P = M_z\omega = \vec{M}\vec{\omega}, \tag{4.11}$$

где $\omega = d\varphi/dt$ – угловая скорость тела.

Единицей измерения мощности в СИ является *ватт* (Вт). Согласно (4.9), 1 Вт = 1 Дж/с.

§ 4.2. Кинетическая энергия

Кинетическая энергия тела или системы тел – это энергия, которой обладает тело или система вследствие своего движения. *Кинетическая энергия материальной точки* массой *m*, движущейся со скоростью υ, определяется соотношением

$$T = \frac{m\upsilon^2}{2}. \tag{4.12}$$

Кинетическая энергия системы материальных точек равна сумме кинетических энергий этих точек, т. е. кинетическая энергия является аддитивной величиной:

$$T = \sum_{k=1}^{n} T_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}. \tag{4.13}$$

Найдем кинетическую энергию твердого тела при поступательном и вращательном движениях. Считая твердое тело системой материальных точек, можно определить его кинетическую энергию соотношением

$$T = \sum_{k} \frac{m_k \upsilon_k^2}{2}. \tag{4.14}$$

При поступательном движении все точки твердого тела имеют одинаковые скорости, равные скорости центра масс, т. е. $\upsilon_k = \upsilon_c$. Тогда кинетическая энергия тела при поступательном движении

$$T = \sum_{k} \frac{m_k \upsilon_c^2}{2} = \frac{\upsilon_c^2}{2} \sum_{k} m_k \;\Rightarrow\; T = \frac{m \upsilon_c^2}{2}, \tag{4.15}$$

где $m = \sum\limits_{k} m_k$ – масса тела.

При вращательном движении тела скорости точек тела связаны с угловой скоростью вращения соотношением $\upsilon_k = \omega r_k$, где r_k – расстояние от точек тела до оси вращения. Тогда кинетическая энергия тела при вращательном движении

$$T = \sum_{k} \frac{m_k \omega^2 r_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum_{k} m_k r_k^2 \;\Rightarrow\; T = \frac{I_z \omega^2}{2}, \tag{4.16}$$

где $I_z = \sum\limits_{k} m_k r_k^2$ – момент инерции тела относительно оси вращения.

Любое движение твердого тела может быть представлено как наложение поступательного и вращательного движений. Так, например, плоское движение твердого тела, т. е. движение, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях, может быть представлено как наложение двух движений – поступательного со скоростью центра масс и вращательного вокруг оси, проходящей через центр масс. Как следствие, *кинетическая энергия плоского движения тела* будет слагаться из кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, т. е.

$$T = \frac{m \upsilon_c^2}{2} + \frac{I_c \omega^2}{2}, \tag{4.17}$$

где I_c – момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс.

Если на тело действует сила $\vec{F}$, кинетическая энергия не остается постоянной, т. к. под действием силы начинает изменяться скорость тела. Согласно второму закону Ньютона, $\vec{F} = m\,d\vec{\upsilon}/dt$. Умножим левую и правую части этого уравнения скалярно на вектор перемещения $d\vec{r}$, получим

$$\vec{F}d\vec{r} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}d\vec{r} \;\Rightarrow\; \vec{F}d\vec{r} = m\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = d\left(\frac{m\upsilon^2}{2}\right) \Rightarrow \vec{F}d\vec{r} = dT. \quad (4.18)$$

Учитывая, что $\delta A = \vec{F}d\vec{r}$ – элементарная работа силы на перемещении $d\vec{r}$, получим, что изменение кинетической энергии при бесконечно малом перемещении определяется элементарной работой:

$$dT = \delta A. \quad (4.19)$$

Изменение кинетической энергии при конечном перемещении из точки *1* в точку *2* траектории (рис. 4.1) найдем интегрированием последнего выражения:

$$\int_1^2 dT = \int_1^2 \delta A \;\Rightarrow\; T_2 - T_1 = A_{12}. \quad (4.20)$$

Таким образом, изменение кинетической энергии на конечном перемещении равно работе силы, действующей на тело. Данное выражение иногда называют *законом изменения кинетической энергии*.

Для системы материальных точек кинетическая энергия каждой точки будет изменяться под действием как внешних, так и внутренних сил. Поэтому закон изменения кинетической энергии (4.20) для каждой материальной точки имеет вид

$$T_{2_k} - T_{1_k} = A_k^e + A_k^i,\; \overline{k = 1, n}, \quad (4.21)$$

где A_k^e и A_k^i – работы внешних и внутренних сил, действующих на k-ю материальную точку.

Суммируя (4.21) от 1 до n, получим *закон изменения кинетической энергии для системы материальных точек*:

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e + \sum_{k=1}^{n} A_k^i, \quad (4.22)$$

где $T_1 = \sum_{k=1}^{n} T_{1_k}$ и $T_2 = \sum_{k=1}^{n} T_{2_k}$ – кинетические энергии системы в начальном и конечном состояниях. Таким образом, приращение кинетической энергии системы определяется работой как внешних, так и внутренних сил. Причем сумма работ внутренних сил в общем случае не равна нулю.

Закон изменения кинетической энергии твердого тела имеет вид, аналогичный закону изменения кинетической энергии системы материальных точек, с учетом того, что внутренние силы в этом случае работы не совершают, т. е.

$$T_2 - T_1 = \sum_{k=1}^{n} A_k^e = A^e, \tag{4.23}$$

где A^e – работа внешних сил, действующих на тело.

Кинетическая энергия имеет размерность работы, т. е. в СИ единицей измерения кинетической энергии является *джоуль* (Дж).

§ 4.3. Консервативные силы. Потенциальная энергия

Все силы, встречающиеся в механике материальных точек, принято разделять на консервативные и неконсервативные.

Консервативными называются силы, работа которых не зависит от пути, по которому двигается тело, а определяется только координатами начального и конечного положений тела. Из независимости работы консервативных сил от пути вытекает, что работа таких сил на замкнутом пути равна нулю. Примерами консервативных сил являются гравитационная сила, сила упругости, сила тяжести и др.

Все силы, не являющиеся консервативными, называют *неконсервативными*. К числу неконсервативных сил относятся, например, *диссипативные* силы, работа которых при любых движениях всегда отрицательна и зависит от пути, пройденного телом. К диссипативным силам относят силы трения и сопротивления.

Если на тело или систему тел действуют только консервативные силы, то для этого тела или системы тел можно ввести понятие потенциальной энергии.

Если на тело в каждом месте пространства действует сила $\vec{F}$, то говорят, что это тело находится в *поле сил*. Поле сил называется *потенциальным*, если его можно описать некоторой функцией $U = U(x, y, z, t)$, зависящей от координат и времени, такой, что ее частные производные по координатам определяют проекции силы $\vec{F}$ на декартовы оси координат:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x};\ F_y = -\frac{\partial U}{\partial y};\ F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}. \tag{4.24}$$

Функцию U называют *потенциальной функцией*.

В векторном виде выражение для силы $\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$ примет вид

$$\vec{F} = -\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} - \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k} \Rightarrow \vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\vec{\nabla}U, \tag{4.25}$$

где $\vec{\nabla}$ называют *оператором Гамильтона* (*набла*), или градиентом,

$$\vec{\nabla} = \mathrm{grad} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}. \tag{4.26}$$

Когда поле консервативных сил является стационарным (не зависит от времени), потенциальная функция U зависит только от пространственных координат $U = U(x, y, z)$. В этом случае элементарная работа консервативных сил представляет собой полный дифференциал dU, взятый с обратным знаком. Действительно, принимая во внимание выражение для скалярного произведения векторов в декартовой системе координат $\delta A = \vec{F}d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz$ и учитывая (4.24), получим

$$\delta A = -\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy - \frac{\partial U}{\partial z}dz \Rightarrow \delta A = -dU. \tag{4.27}$$

Интегрируя (4.27), найдем работу консервативных сил при перемещении из точки *1* в точку *2* поля:

$$A_{12} = U_1 - U_2. \tag{4.28}$$

Функцию $U = U(x, y, z)$ в этом случае называют *потенциальной энергией тела*. Согласно (4.28), работа консервативных сил оказывается равной убыли потенциальной энергии. Потенциальная энергия имеет размерность работы, т. е. в СИ единицей измерения потенциальной энергии является *джоуль* (Дж).

Заметим, что потенциальную энергию следует относить не к отдельному телу, а к системе взаимодействующих между собой данного тела и тела, создающего силовое поле. Таким образом, потенциальная энергия – это энергия взаимодействия тел, зависящая от взаимного расположения тел.

Потенциальная энергия определена с точностью до прибавления некоторой произвольной постоянной. Если вместо потенциальной энергии U взять другую: $U' = U + C$, где C – произвольная постоянная, то от этого силы не изменяются. Однако это не отражается на физических законах, т. к. в них входит либо разность потенциальных энергий в двух положениях тела, либо производная потенциальной энергии по координатам. Пользуясь имеющимся произволом в выборе потенциальной энергии, можно положить ее равной любому наперед заданному значению в некоторой точке пространства. Тогда во всех остальных точках ее значение будет фиксировано однозначно. Эта процедура придания потенциальной энергии однозначности называется *нормировкой*.

Рассмотрим несколько примеров нахождения потенциальной энергии.

Гравитационная сила. Найдем потенциальную энергию тела массы m, находящегося в гравитационном поле Земли. На тело действует гравитационная сила притяжения (2.14), направленная к центру Земли (рис. 4.2). Учитывая направление силы, ее вектор можно записать в виде

$$\vec{F} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{r}, \tag{4.29}$$

где M – масса Земли; $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный от центра Земли к телу.

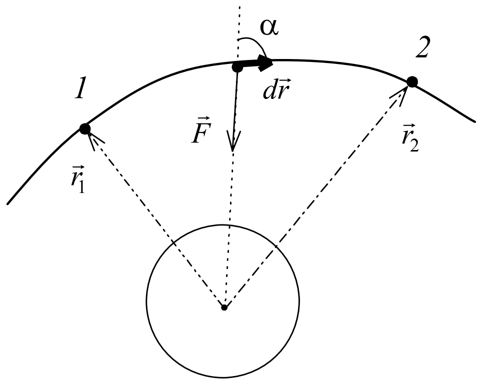


Рис. 4.2

Пусть тело перемещается по произвольному пути от точки *1* до точки *2*. Работа гравитационной силы по перемещению тела

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = -GmM \int_1^2 \frac{\vec{r} d\vec{r}}{r^3} = -GmM \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} =$$

$$= -GmM \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = -\frac{GmM}{r_1} - \left(-\frac{GmM}{r_2} \right), \qquad (4.30)$$

где учтено, что $\vec{r} d\vec{r} = r \,|\, d\vec{r} \,|\cos\alpha = r dr$.

Из (4.30) видно, что гравитационная сила является консервативной, потому что работа зависит только от расстояний r_1 и r_2 от центра Земли и не зависит от пути, соединяющего эти точки. Ясно, что работа силы по замкнутому пути равна нулю, как и должно быть для консервативных сил.

Сравнивая формулу (4.30) с формулой (4.28), находим потенциальную энергию U тела массой m:

$$U = -G \frac{mM}{r} + C, \qquad (4.31)$$

где C – произвольная постоянная. Нормируя потенциальную энергию на ноль в бесконечности, т. е. полагая $U = 0$ при $r \to \infty$, найдем, что $C = 0$ и потенциальная энергия равна

$$U = -G \frac{mM}{r}. \qquad (4.32)$$

Сила упругости. Найдем потенциальную энергию упруго деформированного тела (пружины). Для этого рассмотрим колебания пружины вдоль оси x и вычислим работу силы упругости при деформации пружины от x_1 до x_2. С учетом, что сила упругости направлена в сторону, противоположную деформации, элементарная работа силы упругости

$$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = F_x dx = -kx dx, \qquad (4.33)$$

где $F_x = -kx$ – проекция силы упругости на ось x. Тогда искомая работа

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{kx_2^2}{2}. \qquad (4.34)$$

Сила упругости является консервативной, т. к. ее работа зависит только от начальной и конечной деформации. Сравнивая это соотношение с (4.28) и нормируя потенциальную энергию на ноль при отсутствии деформации (x = 0), найдем потенциальную энергию упруго деформированной пружины:

$$U = \frac{kx^2}{2}. \tag{4.35}$$

Сила тяжести. Найдем потенциальную энергию тела, находящегося в поле силы тяжести Земли. Работа силы тяжести ($\vec{F} = m\vec{g}$) по перемещению тела из точки *1* в точку *2* (рис. 4.3)

$$A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 m\vec{g} d\vec{r} = -mg \int_{h_1}^{h_2} dh = mgh_1 - mgh_2. \tag{4.36}$$

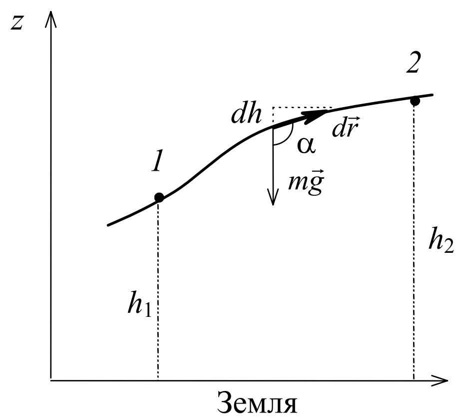


Рис. 4.3

Из (4.36) следует, что сила тяжести является консервативной. Сравнивая это соотношение с (4.28) и нормируя потенциальную энергию на ноль на поверхности Земли, найдем потенциальную энергию тела в поле силы тяжести:

$$U = mgh, \tag{4.37}$$

где h – высота тела над поверхностью Земли.

Заметим, что соотношение (4.37) можно также получить из (4.31), нормируя потенциальную энергию на ноль на поверхности Земли и принимая во внимание, что $h \ll R$, где R – радиус Земли.

§ 4.4. Закон сохранения механической энергии

Согласно закону изменения кинетической энергии (4.23), приращение кинетической энергии тела равно работе результирующей силы, действующей на тело. По своей природе силы, действующие на тело, могут быть консервативными и неконсервативными. Поэтому работа равнодействующей силы на участке пути может быть представлена в виде

$$A_{12} = A_{\text{конс.}} + A_{\text{неконс.}}, \tag{4.38}$$

где $A_{\text{конс.}}$ и $A_{\text{неконс.}}$ – работы консервативных и неконсервативных сил на данном участке пути.

Работа консервативных сил равна убыли потенциальной энергии (4.28): $A_{\text{конс.}} = U_1 - U_2$, так что закон изменения кинетической энергии (4.23) примет вид

$$T_2 - T_1 = U_1 - U_2 + A_{\text{неконс.}}. \tag{4.39}$$

Перенося потенциальные энергии влево, получим

$$(T_2 + U_2) - (T_1 + U_1) = A_{\text{неконс.}} \Rightarrow E_2 - E_1 = A_{\text{неконс.}}, \tag{4.40}$$

где введены обозначения $E_1 = T_1 + U_1$, $E_2 = T_2 + U_2$. Величину E, равную сумме кинетической и потенциальной энергий ($E = T + U$), называют *механической энергией*. Таким образом, E_1 и E_2 – механические энергии тела в положениях *1* и *2*.

Соотношение (4.40) показывает, что изменение механической энергии тела определяется работой неконсервативных сил, действующих на тело.

Из (4.40) вытекает *закон сохранения механической энергии*: если на тело действуют только консервативные силы ($A_{\text{неконс.}} = 0$), то $E_1 = E_2$, т. е. полная механическая энергия сохраняется (не изменяется со временем):

$$E = T + U = \text{const}. \tag{4.41}$$

Уже в такой простейшей форме закон сохранения механической энергии позволяет достаточно легко получать ответы на ряд важных вопросов без привлечения уравнений движения, что часто сопряжено с проведением громоздких расчетов. Заметим, что подобный закон будет справедлив и для системы тел с учетом того, что потенциальная энергия будет включать также энергию взаимодействия между телами.

§ 4.5. Гравитационное поле

Гравитационное взаимодействие между телами осуществляется через материального посредника – *гравитационное поле*. Считают, что в каждой точке пространства вокруг тел (источников поля) создаются такие условия, при которых тела, помещенные в эти точки, испытывают действие силы, т. е. тела вокруг себя создают гравитационное поле, которое непосредственно действует на другие тела. Причем считают, что поле существует безотносительно к тому, есть ли в нем другие тела или нет. Поле есть физическая реальность, которая имеет глубокий физический смысл.

Гравитационное поле характеризуется напряженностью и потенциалом гравитационного поля.

Напряженность гравитационного поля $\vec{G}_0$ равна силе, с которой это поле действует на тело единичной массы:

$$\vec{G}_0 = \frac{\vec{F}}{m}, \tag{4.42}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на тело массой m. Напряженность $\vec{G}_0$ является силовой характеристикой поля, т. к. она определяет силу, действующую на тело: $\vec{F} = m\vec{G}_0$.

Используя формулу (4.29) для гравитационной силы, найдем

$$\vec{G}_0 = -G\frac{M}{r^3}\vec{r}, \tag{4.43}$$

где M – масса тела, создающего поле. Формула (4.43) справедлива для материальной точки, а также однородного тела сферической формы.

Потенциалом гравитационного поля φ называют величину, численно равную потенциальной энергии тела единичной массы, помещенного в точку поля:

$$\varphi = \frac{U}{m}, \tag{4.44}$$

где U – потенциальная энергия тела массой m. Потенциал является энергетической характеристикой поля, т. к. он определяет потенциальную энергию тела, помещенного в поле: $U = m\varphi$.

Используя формулу (4.32) для потенциальной энергии, найдем

$$\varphi = -G\frac{M}{r}. \tag{4.45}$$

Условия применимости формулы (4.45) точно такие же, как и у формулы (4.43).

Зная потенциал поля, можно вычислить работу, совершаемую над телом массой m силами поля при перемещении его из положения *1* в положение *2*. Согласно формулам (4.28) и (4.44), эта работа будет равна

$$A_{12} = U_1 - U_2 = m(\varphi_1 - \varphi_2), \tag{4.46}$$

где φ_1 и φ_2 – потенциалы точек *1* и *2* поля.

Отсюда, учитывая, что $\vec{F} = m\vec{G}_0$, найдем разность потенциалов между двумя точками поля:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{m} = \frac{\int_1^2 \vec{F} d\vec{r}}{m} \Rightarrow \varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{G}_0 d\vec{r}. \tag{4.47}$$

Используя формулу (4.25) ($\vec{F} = -\vec{\nabla} U$), связывающую силу с потенциальной энергией, и выражения для силы и потенциальной энергии $\vec{F} = m\vec{G}_0$, $U = m\varphi$, найдем связь между напряженностью и потенциалом:

$$\vec{G}_0 = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\vec{k} \right). \tag{4.48}$$

Одно из важнейших свойств полей заключается в том, что поле, образованное несколькими источниками, равно сумме полей, созданных каждым из них. При этом напряженность $\vec{G}_0$ результирующего поля равна векторной сумме напряженностей $\vec{G}_{0_i}$ накладываемых полей:

$$\vec{G}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{G}_{0_i}. \tag{4.49}$$

Формула (4.49) выражает так называемый *принцип суперпозиции* (или наложения) полей.

Из (4.49) с учетом (4.48) нетрудно получить принцип суперпозиции для потенциалов. Результирующий потенциал φ равен сумме потенциалов φ_i накладываемых в данной точке полей:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i. \tag{4.50}$$

Концепция передачи взаимодействия посредством промежуточной среды (поля), передающей такие взаимодействия от точки к точке с конечной скоростью, получила название *близкодействия*.

§ 4.6. Космические скорости

Для запуска ракет в космическое пространство надо в зависимости от поставленных целей сообщать им определенные начальные скорости.

Первой космической скоростью υ_1 называют минимальную скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться по круговой орбите вокруг Земли, т. е. превратиться в искусственный спутник Земли. На спутник действует сила тяготения $F = GmM/R^2$, где m и M – массы спутника и Земли, R – радиус Земли (спутник движется на высотах нескольких сотен километров, так что $h \ll R = 6371$ км). Эта сила сообщает спутнику центростремительное ускорение $a = \upsilon_1^2/R$. Из второго закона Ньютона найдем υ_1:

$$m\frac{\upsilon_1^2}{R} = G\frac{mM}{R^2} \;\Rightarrow\; \upsilon_1 = \sqrt{gR} = 7{,}9 \text{ км/с}, \qquad (4.51)$$

где учтено, что $g = GM/R^2$ – ускорение свободного падения.

Второй космической скоростью υ_2 называют скорость, которую необходимо сообщить телу на поверхности Земли, чтобы преодолеть силу притяжения к Земле. Пренебрегая силой сопротивления воздуха, ее можно найти из закона сохранения механической энергии (4.41): $T_1 + U_1 = T_2 + U_2$, где $T_1 = m\upsilon_2^2/2$ и $U_1 = -GmM/R$ – кинетическая и потенциальная энергии тела на поверхности Земли, $T_2 = 0$ и $U_2 = 0$ – кинетическая и потенциальная энергии тела после того, как оно преодолеет силу притяжения Земли. Отсюда найдем υ_2:

$$\frac{m\upsilon_2^2}{2} = G\frac{mM}{R} \;\Rightarrow\; \upsilon_2 = \sqrt{2gR} = \sqrt{2}\upsilon_1 = 11{,}2 \text{ км/с}. \qquad (4.52)$$

Третьей космической скоростью υ_3 называют скорость, которая необходима телу, удаленному от Солнца на расстояние радиуса земной орбиты $R_з$, для того, чтобы преодолеть силу притяжения Солнца. Она также может быть найдена из закона сохранения механической энергии:

$$\frac{m\upsilon_3^2}{2} = G\frac{mM_с}{R_з} \;\Rightarrow\; \upsilon_3 = \sqrt{\frac{2GM_с}{R_з}} = 42 \text{ км/с}, \qquad (4.53)$$

где $M_с$ – масса Солнца.

Для сообщения спутнику необходимой скорости желательно использовать линейную скорость вращения Земли. Поэтому энергетически более выгодно запускать спутник в направлении вращения Земли, т. е. с запада на восток. Линейная скорость точек экватора около 500 м/с. Отсюда можно заключить, что, выбрав нужное направление (восточное) при запуске искусственных спутников, можно получить выигрыш в скорости в несколько процентов. Типичная траектория полета к Луне и обратно к Земле показана на рис. 4.4, причем для ясности рисунка не принято во внимание движение Луны в процессе ее облета. Как видно на рисунке, при таком плане полета полностью используется линейная скорость вращения Земли: при запуске она складывается со скоростью ракеты, а при возвращении за счет нее уменьшается относительная скорость поверхности Земли и возвратившегося после полета космического аппарата.

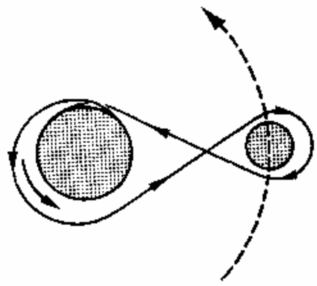


Рис. 4.4

При полете к дальним планетам, например, Юпитеру, Урану и т. д., после преодоления притяжения Земли необходимо иметь еще примерно третью космическую скорость. Это очень большая скорость. Однако, учитывая, что Земля движется по орбите вокруг Солнца со скоростью примерно 30 км/с, ракету запускают в направлении движения Земли вокруг Солнца, и тогда ей сообщают дополнительную скорость 12 км/с.

§ 4.7. Законы столкновения тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой тела обладали перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Под внутренней энергией понимают кинетическую энергию и энергию взаимодействия атомов и молекул, из которых состоят тела. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры.

Различают три типа столкновения тел: абсолютно неупругое, абсолютно упругое и промежуточный случай – неупругое.

Абсолютно неупругое столкновение – это такое столкновение, в результате которого оба тела «слипаются» и далее движутся как единое целое. Кинетическая энергия тел частично или полностью переходит во внутреннюю энергию тел. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса, который для двух сталкивающихся тел с массами m_1, m_2 и скоростями $\vec{\upsilon}_1$, $\vec{\upsilon}_2$ имеет вид

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = (m_1 + m_2)\vec{\upsilon}. \tag{4.54}$$

Отсюда скорость тел после удара

$$\vec{\upsilon} = \frac{m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2}. \tag{4.55}$$

Абсолютно упругое столкновение – это столкновение тел, при котором их внутренняя энергия не изменяется. Как следствие, не будет изменяться кинетическая энергия системы. При этом виде столкновения выполняются законы сохранения кинетической энергии и импульса, которые для двух сталкивающихся тел имеют вид

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}; \tag{4.56}$$

$$m_1\vec{\upsilon}_1 + m_2\vec{\upsilon}_2 = m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2, \tag{4.57}$$

где $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ – скорости тел после удара.

Рассмотрим *центральное* (*лобовое*) столкновение двух тел, при котором скорости тел до удара направлены вдоль линии, проходящей через центры сталкивающихся тел. При таком столкновении скорости тел после удара будут направлены вдоль той же прямой. Из закона сохранения кинетической энергии следует:

$$m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2); \tag{4.58}$$

$$m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}_1)(\vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{\upsilon}_2)(\vec{u}_2 + \vec{\upsilon}_2). \tag{4.59}$$

Из закона сохранения импульса (4.57) найдем

$$m_1(\vec{\upsilon}_1 - \vec{u}_1) = m_2(\vec{u}_2 - \vec{\upsilon}_2). \tag{4.60}$$

Т. к. все скорости тел направлены вдоль одной прямой, то из (4.59) и (4.60) найдем, что сумма скоростей тел до и после соударения одинакова:

$$\vec{\upsilon}_1 + \vec{u}_1 = \vec{u}_2 + \vec{\upsilon}_2. \tag{4.61}$$

Выражая из формулы (4.61) $\vec{u}_1$ или $\vec{u}_2$ и подставляя в закон сохранения импульса (4.57), найдем скорости тел после столкновения:

$$\vec{u}_1 = \frac{(m_1 - m_2)\vec{\upsilon}_1 + 2m_2\vec{\upsilon}_2}{m_1 + m_2};\ \vec{u}_2 = \frac{(m_2 - m_1)\vec{\upsilon}_2 + 2m_1\vec{\upsilon}_1}{m_1 + m_2}. \tag{4.62}$$

В частности, если массы тел одинаковы, то из (4.62) следует, что $\vec{u}_1 = \vec{\upsilon}_2$ и $\vec{u}_2 = \vec{\upsilon}_1$, т. е. тела после столкновения обмениваются скоростями.

С помощью (4.62) можно определить скорость тела после упругого столкновения о неподвижную стенку, которую можно рассматривать как тело бесконечно большой массы. Считая стенку неподвижной ($\vec{\upsilon}_2 = 0$) и переходя в (4.62) к пределу при $m_2 \to \infty$, найдем $\vec{u}_1 = -\vec{\upsilon}_1$ и $\vec{u}_2 = 0$. Таким образом, при упругом столкновении о стенку тело изменяет свое направление на противоположное без изменения модуля скорости.

Сохранение энергии при абсолютно упругом столкновении тел предполагает, что возникающие в момент соударения деформации после столкновения полностью исчезают.

Абсолютно упругое и неупругое столкновения – это два предельных вида столкновения. В реальных столкновениях тел происходят небольшие деформации, которые не исчезают после столкновения. Тела нагреваются, т. е. изменяется их внутренняя энергия. После столкновения тела приобретают неравные скорости, которые отличаются от первоначальных. Такие столкновения называются *неупругими*.

Для характеристики неупругих столкновений вводят *коэффициент восстановления скорости* $k_{\text{с}}$:

$$k_{\text{с}} = \frac{u_{2x} - u_{1x}}{\upsilon_{1x} - \upsilon_{2x}}, \tag{4.63}$$

где υ_{1x}, υ_{2x} – проекции начальных скоростей тел на линию, соединяющую их центры масс, u_{1x}, u_{2x} – проекции конечных скоростей тел на эту линию. Для абсолютно неупругого столкновения $k_{\text{с}} = 0$, т. к.

$u_{1x} = u_{2x}$, для абсолютно упругого столкновения $k_с = 1$ (это следует из (4.61)), для неупругих столкновений $0 < k_с < 1$. Таким образом, данный коэффициент можно рассматривать как меру упругости столкновения. Чем коэффициент $k_с$ ближе к единице, тем столкновение ближе к абсолютно упругому.

Для учета потерь кинетической энергии вводят *коэффициент восстановления энергии* $k_э$

$$k_э = \frac{T'}{T}, \qquad (4.64)$$

где T и T' – кинетические энергии системы до и после столкновения

$$T = \frac{m_1 \upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2 \upsilon_2^2}{2}; \; T' = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \qquad (4.65)$$

При абсолютно упругом столкновении $T' = T$ и $k_э = 1$, при неупругом столкновении $k_э < 1$.

Глава 5. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

§ 5.1. Гармонические колебания и их характеристики

Колебанием, или *колебательным движением*, в физике называют всякий периодический, т. е. повторяемый с течением времени, или почти периодический процесс, в котором какая-либо физическая величина принимает одинаковые значения через равные промежутки времени. Колебания возникают в тех случаях, когда системе, способной совершать колебательные движения (называемой поэтому *осциллятором*), сообщается энергия. Если колебания совершаются в системе за счет первоначально сообщенной энергии и без внешних воздействий, то их называют *свободными*, или *собственными*, колебаниями.

Важнейшим среди колебательных движений является *гармоническое колебание*, при котором смещение x тела от положения равновесия происходит по закону косинуса или синуса:

$$x = A\cos(\omega t + \alpha) = A\sin(\omega t + \alpha_1), \tag{5.1}$$

где A – *амплитуда колебаний* (максимальное отклонение тела от положения равновесия); $\omega t + \alpha$ (или $\omega t + \alpha_1$) – *фаза колебаний*; ω – *угловая,* или *циклическая*, *частота* колебаний; α ($\alpha_1 = \alpha + \pi/2$) – *начальная фаза колебаний* (фаза колебаний в момент времени t = 0).

Период колебаний T – это время одного полного колебания. Из уравнения колебания (5.1) следует, что

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{5.2}$$

Частота колебаний ν – это число колебаний в единицу времени. За время, равное периоду колебаний, совершается одно колебание, поэтому

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \tag{5.3}$$

Единица измерения в СИ периода колебаний – *секунда* (с), частоты и циклической частоты колебаний – *герц* (Гц = $с^{-1}$).

Скорость и ускорение гармонически колеблющегося тела также будут изменяться по гармоническому закону. Действительно, скорость – это первая производная от координаты по времени:

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) = A\omega\cos(\omega t + \alpha + \frac{\pi}{2}). \tag{5.4}$$

Ускорение – это вторая производная от координаты по времени:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -A\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = A\omega^2\cos(\omega t + \alpha + \pi). \qquad (5.5)$$

Из выражений (5.4), (5.5) амплитудные значения скорости и ускорения: $A_\upsilon = A\omega$ и $A_a = A\omega^2$. На рис. 5.1 показаны зависимости смещения, скорости и ускорения от времени. Т. к. фазы скорости и ускорения опережают фазу смещения на $\pi/2$ и π, то это означает, что графики скорости и ускорения сдвинуты в отрицательном направлении оси времени на четверть $T/4$ и полпериода $T/2$ соответственно.

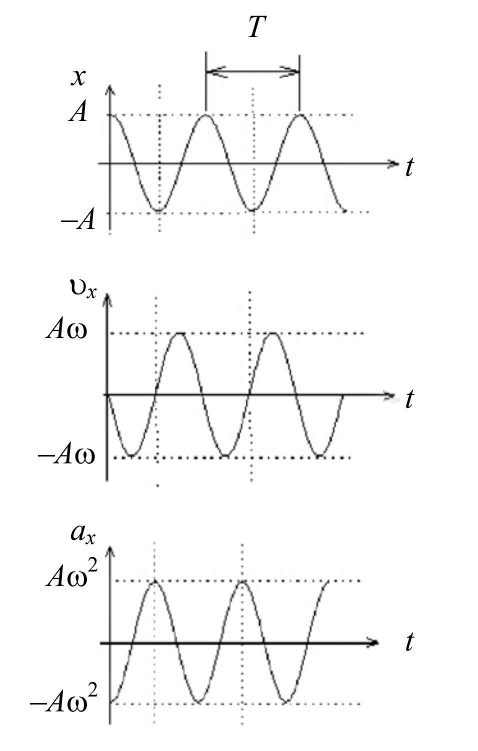


Рис. 5.1

Силу, действующую на колеблющееся тело, определим с помощью второго закона Ньютона (2.1):

$$F_x = ma_x = -mA\omega^2\cos(\omega t + \alpha) = -m\omega^2 x = -kx. \qquad (5.6)$$

Согласно (5.6), сила F пропорциональна смещению x и направлена в сторону, противоположную этому смещению, т. е. к положению равновесия при $x = 0$. Коэффициент пропорциональности $k = m\omega^2$. Это значит, что такая сила все время стремится вернуть тело в положение равновесия, поэтому данную силу называют *возвращающей силой*.

Из (5.6) следует дифференциальное уравнение, решением которого является гармоническое колебание (5.1):

$$ma_x = -kx \;\Rightarrow\; \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{5.7}$$

где $\ddot{x} = a_x$ и $\omega = \sqrt{k/m}$. Такого рода уравнение получается при рассмотрении многих физических явлений. Оно справедливо для малых отклонений величины от положения равновесия, и его называют *уравнением гармонических колебаний*.

Возвращающая сила (5.6) является консервативной. Поэтому полная энергия гармонического колебания должна оставаться постоянной. Кинетическая и потенциальная энергии при гармоническом колебании, соласно (5.1) и (5.4), определяются соотношениями

$$T = \frac{m\upsilon_x^2}{2} = \frac{mA^2\omega^2}{2}\sin^2(\omega t + \alpha) = \frac{mA^2\omega^2}{4}(1 - \cos 2(\omega t + \alpha)); \tag{5.8}$$

$$U = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t + \alpha) = \frac{mA^2\omega^2}{4}(1 + \cos 2(\omega t + \alpha)). \tag{5.9}$$

Полная механическая энергия

$$E = T + U = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \text{const}. \tag{5.10}$$

Таким образом, кинетическая и потенциальная энергии являются периодическими функциями времени, изменяющимися со временем с частотой, в два раза превышающей частоту гармонического колебания. Полная энергия (5.10) действительно оказывается постоянной.

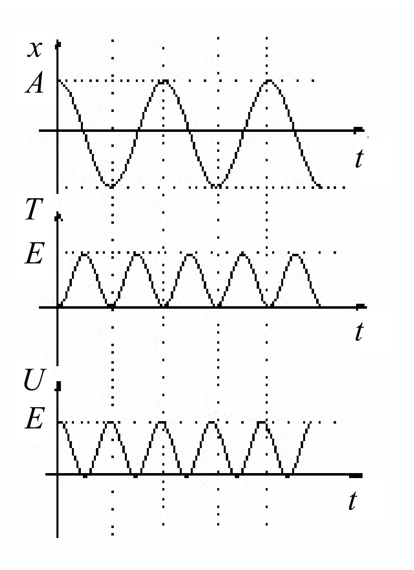


Рис. 5.2

На рис. 5.2 показаны графики зависимостей $x(t)$, $T(t)$, $U(t)$. В процессе колебаний происходит превращение кинетической энергии в потенциальную и наоборот. Процесс перехода из одного вида в другой является периодическим. В момент наибольшего смещения ($x = \pm A$) кинетическая энергия обращается в ноль и механическая энергия равна потенциальной. При прохождении телом положения равновесия ($x = 0$) потенциальная энергия равна нулю и механическая энергия равна кинетической энергии, принимающей в этот момент максимальное значение.

Учитывая, что среднее значение по времени квадрата синуса и квадрата косинуса за период колебаний равно $1/2$, средние значения кинетической $<T>$ и потенциальной $<U>$ энергий равны половине полной энергии:

$$<T> \ = \ <U> \ = \ \frac{E}{2}. \tag{5.11}$$

§ 5.2. Простые колебательные системы

1. Физический маятник. *Физический маятник* – это твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси, проходящей через точку *O*, не совпадающую с центром масс *C* тела (рис. 5.3).

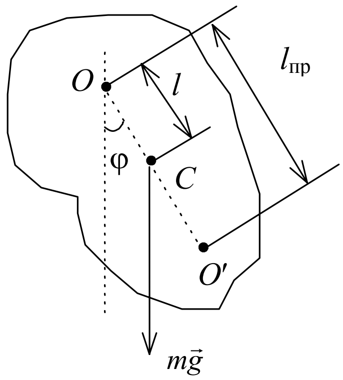


Рис. 5.3

При отклонении маятника от положения равновесия на угол φ возникает вращательный момент силы тяжести, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия. Этот момент относительно оси колебаний равен

$$M_z = -mgl \sin\varphi, \tag{5.12}$$

где m – масса маятника; l – расстояние между точкой подвеса *O* и центром масс *C* маятника.

Обозначим угловое ускорение через $\varepsilon = d^2\varphi/dt^2 = \ddot{\varphi}$ и момент инерции маятника относительно оси вращения через I_z. Тогда основное уравнение динамики вращательного движения ($I_z\varepsilon = M_z$) примет вид

$$I_z\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi. \tag{5.13}$$

Ограничимся рассмотрением малых колебаний. В этом случае можно положить $\sin\varphi \approx \varphi$. В результате придем к уравнению, которое идентично (5.7):

$$\ddot{\varphi} + \omega^2\varphi = 0, \tag{5.14}$$

где введено обозначение

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{I_z}}. \tag{5.15}$$

Его решение имеет вид

$$\varphi = A\cos(\omega t + \alpha). \tag{5.16}$$

Таким образом, физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой ω. В соответствии с (5.2), период колебаний физического маятника определяется выражением

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{I_z}{mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{\text{пр}}}{g}}, \tag{5.17}$$

где величину $l_{\text{пр}} = I_z/ml$ называют *приведенной длиной* физического маятника. Она численно равна длине такого математического маятника (см. ниже), период колебаний которого совпадает с периодом данного физического маятника.

Точка на прямой, соединяющей точку подвеса O с центром масс C, лежащая на расстоянии приведенной длины от оси, называется *центром качания* физического маятника (точка O' на рис. 5.3). Можно показать, что при подвешивании маятника в центре качания приведенная длина, а значит, и период колебаний будут теми же, что и вначале. Следовательно, точка подвеса и центр качания обладают свойством взаимности: при переносе точки подвеса в центр качания прежняя точка подвеса становится новым центром качания.

2. Математический маятник. *Математический маятник* – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой m, подвешенной на невесомой и нерастяжимой нити и колеблющейся под действием силы тяжести (рис. 5.4).

Малые колебания математического маятника будут описываться уравнением (5.14), решением которого являются гармонические колебания (5.16). С учетом того, что момент инерции материальной точки относительно оси колебаний $I_z = ml^2$, согласно (5.15), циклическая частота колебаний маятника определяется соотношением

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \tag{5.18}$$

где l – длина нити.

Период колебаний математического маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{5.19}$$

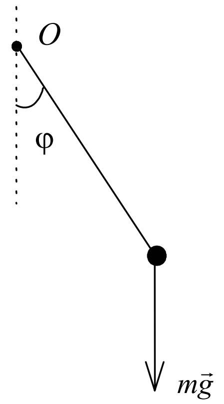


Рис. 5.4

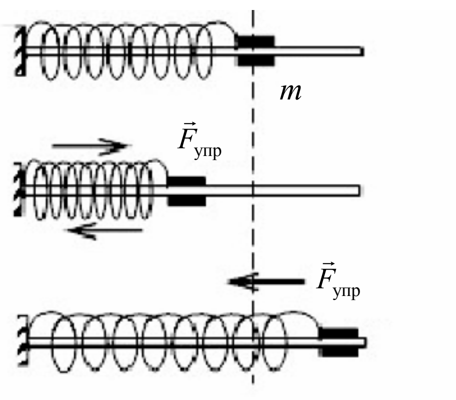


Рис. 5.5

3. Пружинный маятник. *Пружинный маятник* – это материальная точка массой m, подвешенная (или расположенная горизонтально) на пружине жесткостью k и совершающая колебания под действием силы упругости $F_{упр} = -kx$ (которая является возвращающей силой), k – жесткость пружины, x – смещение тела от положения равновесия (рис. 5.5). Тело будет совершать гармонические колебания, которые описываются дифференциальным уравнением (5.7). Циклическая частота колебаний $\omega = \sqrt{k/m}$, период колебаний маятника

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{5.20}$$

§ 5.3. Сложение гармонических колебаний

1. Сложение колебаний одинакового направления (метод векторных диаграмм). Пусть даны два гармонических колебания, происходящих вдоль одного направления, с одинаковой частотой ω:

$$x_1 = A_1\cos(\omega t+\alpha_1);\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\alpha_2). \qquad (5.21)$$

Требуется найти суммарное колебание $x = x_1 + x_2$.

Воспользуемся методом векторных диаграмм. Согласно этому методу, гармоническое колебание $x = A\cos(\omega t+\alpha)$ представляют в виде вектора $\vec{A}$, модуль которого равен амплитуде колебаний $|\vec{A}| = A$ и который направлен под углом α к оси x (см. рис. 5.6). Если этот вектор привести во вращение с угловой скоростью, равной циклической частоте колебаний ω, то проекция этого вектора на ось x будет изменяться по заданному гармоническому закону.

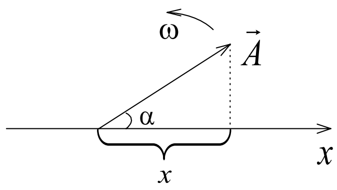


Рис. 5.6

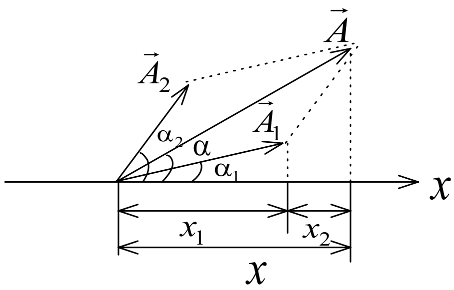


Рис. 5.7

Представим колебания (5.21) с помощью векторов $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ (рис. 5.7). По правилам сложения векторов построим результирующий вектор $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2$. Легко заметить, что проекция этого вектора на ось x равна сумме проекций слагаемых векторов: $x = x_1 + x_2$. Следовательно, вектор $\vec{A}$ представляет собой результирующее колебание. Этот вектор вращается с той же угловой скоростью ω, что и векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$, так что результирующее движение будет гармоническим колебанием с частотой ω, амплитудой A и начальной фазой α:

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\alpha). \qquad (5.22)$$

Из построения (рис. 5.7) видно, что

$$A = \sqrt{A_1 + A_2 + 2A_1A_2\cos(\alpha_2-\alpha_1)};\ \mathrm{tg}\alpha = \frac{A_1\sin\alpha_1 + A_2\sin\alpha_2}{A_1\cos\alpha_1 + A_2\cos\alpha_2}. \qquad (5.23)$$

Если частоты колебаний x_1 и x_2 неодинаковы, векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ будут вращаться с различной скоростью. Следовательно, в этом случае результирующим движением будет не гармоническое колебание, а более сложный колебательный процесс.

2. Сложение взаимно перпендикулярных колебаний. Рассмотрим результат сложения двух гармонических колебаний одинаковой частоты ω, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях вдоль осей x и y. Выберем начала отсчета времени так, чтобы начальная фаза первого колебания была равна нулю. Тогда уравнения колебаний имеют вид

$$x = A\cos\omega t; \quad y = B\cos(\omega t + \alpha), \tag{5.24}$$

где α – разность фаз этих колебаний. Данные уравнения представляют собой заданное в параметрической форме уравнение траектории, по которой движется тело, участвующее одновременно в двух колебаниях. Чтобы получить уравнение траектории в обычном виде, нужно исключить из уравнений параметр время t.

Из первого уравнения следует, что

$$\cos\omega t = \frac{x}{A} \;\Rightarrow\; \sin\omega t = \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}. \tag{5.25}$$

Из второго уравнения, используя формулу для косинуса суммы и с учетом (5.25), найдем

$$\frac{y}{B} = \cos(\omega t + \alpha) = \cos\omega t \cdot \cos\alpha - \sin\omega t \cdot \sin\alpha;$$

$$\frac{y}{B} = \frac{x}{A}\cos\alpha \mp \sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\alpha \;\Rightarrow\; \frac{y}{B} - \frac{x}{A}\cos\alpha = \mp\sqrt{1 - \frac{x^2}{A^2}}\sin\alpha.$$

Возведя левую и правую части последнего уравнения в квадрат, найдем уравнение траектории в общем виде:

$$\frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos\alpha + \frac{x^2}{A^2} = \sin^2\alpha. \tag{5.26}$$

Данное уравнение является уравнением эллипса, оси которого повернуты относительно координатных осей x и y. Ориентация эллипса и величина его полуосей довольно сложным образом зависят от амплитуд A и B и разности фаз α.

Определим форму траектории для некоторых частных случаев.

1. Разность фаз колебаний $\alpha = 0$. В этом случае уравнение траектории (5.26) примет вид

$$\left(\frac{y}{B} - \frac{x}{A}\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{B}{A}x. \tag{5.27}$$

Таким образом, уравнение траектории представляет собой участок прямой линии (рис. 5.8). Результирующее движение является гармоническим колебанием вдоль этой прямой с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$.

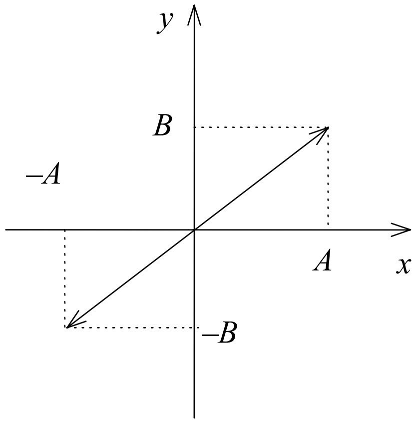


Рис. 5.8

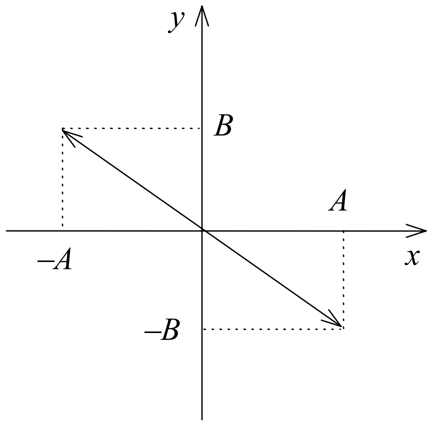


Рис. 5.9

2. Разность фаз колебаний $\alpha = \pm\pi$. Уравнение траектории (5.26) примет вид

$$\left(\frac{y}{B} + \frac{x}{A}\right)^2 = 0 \;\Rightarrow\; y = -\frac{B}{A}x. \tag{5.28}$$

Результирующее движение представляет собой гармоническое колебание вдоль данной прямой (рис. 5.9) с частотой ω и амплитудой $\sqrt{A^2 + B^2}$.

3. Разность фаз колебаний $\alpha = \pm\pi/2$. Уравнение траектории (5.26) примет вид

$$\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1. \tag{5.29}$$

Это уравнение эллипса, оси которого совпадают с осями координат (рис. 5.10). При $A = B$ эллипс примет форму окружности. Причем нетрудно выяснить, что $\alpha = +\pi/2$ соответствует движению по часовой стрелке, а $\alpha = -\pi/2$ – движению в противоположную сторону.

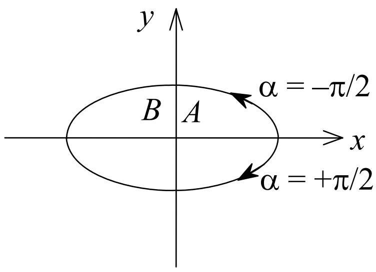


Рис. 5.10

§ 5.4. Затухающие колебания

В реальных физических системах, участвующих в колебательном движении, всегда присутствуют силы сопротивления (силы трения, сопротивления среды и т. п.), действие которых уменьшает энергию системы. Уменьшение энергии проявляется в том, что колебания затухают. *Затухающими колебаниями* называют колебания, амплитуда которых непрерывно уменьшается вследствие потерь механической энергии.

Кроме возвращающей силы (5.6) $F_x = -kx$ в системе действует сила сопротивления, пропорциональная скорости движения тела: $F_{c_x} = -\mu\upsilon = -\mu\dot{x}$ $(\upsilon = \dot{x})$. Учитывая, что ускорение тела $a_x = \ddot{x}$, второй закон Ньютона для данной системы имеет вид

$$m\ddot{x} = -kx - \mu\dot{x}. \qquad (5.30)$$

Отсюда дифференциальное уравнение затухающих колебаний

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (5.31)$$

где $\beta = \mu/2m$ – *коэффициент затухания*; $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота свободных колебаний под действием только возвращающей силы.

При не слишком сильном затухании $(\beta < \omega)$ решение уравнения (5.31) имеет вид

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega_з t + \alpha),\ \omega_з = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}, \qquad (5.32)$$

где $\omega_з$ – *частота затухающих колебаний*, A_0 и α – постоянные, которые определяются начальными условиями. На рис. 5.11 приведен график функции (5.32).

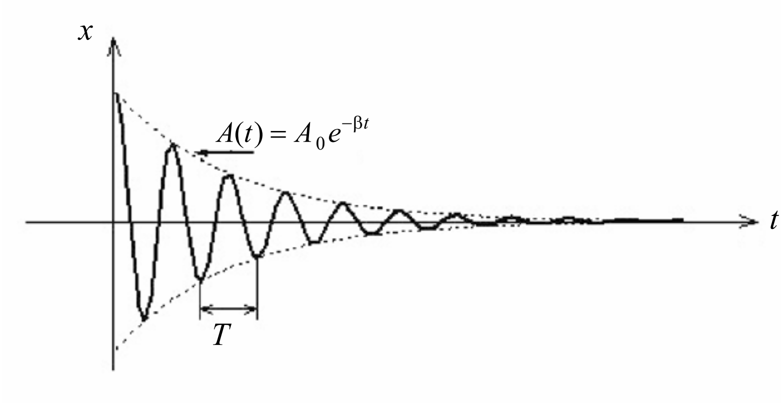


Рис. 5.11

В соответствии с видом функции $x(t)$, движение можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой $\omega_з$ и с амплитудой, уменьшающейся по закону

$$A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \tag{5.33}$$

Коэффициент затухания β характеризует степень затухания колебаний.

Затухающие колебания характеризуются периодом, декрементом затухания, логарифмическим декрементом, временем релаксации, добротностью.

Периодом затухающих колебаний называют величину

$$T = \frac{2\pi}{\omega_з} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \tag{5.34}$$

При малом затухании ($\beta \ll \omega$) период затухающих колебаний равен периоду свободных колебаний.

Декрементом затухания называют отношение амплитуд колебаний в моменты времени, отличающиеся на период колебаний T:

$$\eta = \frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}. \tag{5.35}$$

Логарифмическим декрементом затухания называют величину

$$\lambda = \ln \eta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln e^{\beta T} = \beta T. \tag{5.36}$$

Временем релаксации τ называют промежуток времени, в течение которого амплитуда колебаний уменьшается в $e = 2{,}72$ раза, т. е.

$$e = \frac{A(t)}{A(t+\tau)} = e^{\beta\tau} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\beta}. \qquad (5.37)$$

Число колебаний N_τ за время релаксации определяется логарифмическим декрементом затухания λ:

$$N_\tau = \frac{\tau}{T} = \frac{1}{\beta T} = \frac{1}{\lambda}. \qquad (5.38)$$

Добротностью Q системы называют величину, характеризующую изменение полной энергии ΔE системы по формуле

$$\Delta E = -\frac{2\pi E}{Q}, \qquad (5.39)$$

где знак минус показывает, что энергия уменьшается. Большим значениям Q соответствует слабое затухание колебаний. Добротность пропорциональна числу колебаний за время релаксации N_τ и обратно пропорциональна логарифмическому декременту затухания λ:

$$Q = \pi N_\tau = \frac{\pi}{\lambda}. \qquad (5.40)$$

§ 5.5. Вынужденные колебания. Резонанс

Чтобы в реальной колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии в системе. Такая компенсация возможна с помощью внешней периодической силы

$$F_{\text{в}} = F_0 \cos\omega_{\text{в}} t, \qquad (5.41)$$

где F_0 – амплитудное значение силы; $\omega_{\text{в}}$ – циклическая частота внешней силы.

Колебания под действием внешней периодической силы называют *вынужденными*. Второй закон Ньютона для тела, совершающего вынужденные колебания, имеет вид

$$ma_x = F_x + F_{\text{c}_x} + F_{\text{в}_x}, \qquad (5.42)$$

где $F_x = -kx$ – возвращающая сила; $F_{\text{c}_x} = -\mu\upsilon = -\mu\dot{x}$ – сила сопротивления; $F_{\text{в}_x} = F_{\text{в}}$ – вынуждающая сила (5.41). С учетом, что ускорение $a_x = \ddot{x}$, из (5.42) следует *дифференциальное уравнение вынужденных колебаний*:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega^2 x = f_0 \cos\omega_в t, \qquad (5.43)$$

где $\beta = \mu/2m$ – коэффициент затухания; $\omega = \sqrt{k/m}$ – частота свободных колебаний; $f_0 = F_0/m$.

Решение уравнения (5.43), отвечающее установившимся вынужденным колебаниям, имеет вид

$$x = A\cos(\omega_в t - \alpha), \qquad (5.44)$$

где амплитуда A и начальная фаза колебаний α зависят от частоты вынуждающей силы $\omega_в$. Определим их, используя метод векторных диаграмм.

Найдем производные функции (5.44):

$$\dot{x} = -A\omega_в \sin(\omega_в t - \alpha) = A\omega_в \cos(\omega_в t - \alpha + \frac{\pi}{2}); \qquad (5.45)$$

$$\ddot{x} = -A\omega_в^2 \cos(\omega_в t - \alpha) = A\omega_в^2 \cos(\omega_в t - \alpha + \pi). \qquad (5.46)$$

Подставим их в уравнение (5.43):

$$A\omega_в^2 \cos(\omega_в t - \alpha + \pi) + 2\beta A\omega_в \cos(\omega_в t - \alpha + \frac{\pi}{2}) +$$

$$+\omega^2 A\cos(\omega_в t - \alpha) = f_0 \cos\omega_в \mathrm{t}. \qquad (5.47)$$

Левая часть этого уравнения представляет собой сумму трех гармонических колебаний, которая равна также гармоническому колебанию. Согласно методу векторных диаграмм, каждому гармоническому колебанию ставится в соответствие вектор. Сумма трех векторов, представляющих колебания в левой части, должна быть равна вектору, соответствующему колебанию в правой части уравнения:

$$\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \vec{A}_0, \qquad (5.48)$$

где модули векторов

$$|\vec{A}_1| = A\omega_в^2;\ |\vec{A}_2| = 2\beta A\omega_в;\ |\vec{A}_3| = \omega^2 A;\ |\vec{A}_0| = f_0. \qquad (5.49)$$

Пусть вектор $\vec{A}_3$ направлен слева направо (рис. 5.12), тогда, учитывая начальные фазы колебаний, вектор $\vec{A}_1$ будет повернут на угол π, вектор $\vec{A}_2$ – на угол $\pi/2$, вектор $\vec{A}_0$ – на угол α относительно вектора $\vec{A}_3$.

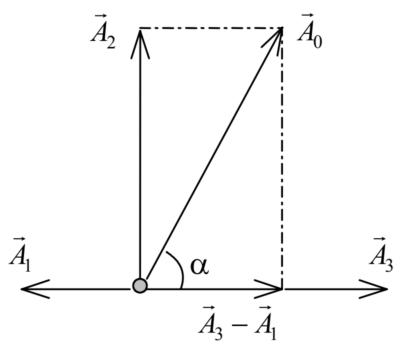


Рис. 5.12

Из рис. 5.12 следует, что

$$|\vec{A}_0|^2 = |\vec{A}_2|^2 + (|\vec{A}_3| - |\vec{A}_1|)^2; \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{|\vec{A}_2|}{|\vec{A}_3| - |\vec{A}_1|}. \quad (5.50)$$

Подставляя в (5.50) модули векторов (5.49), найдем амплитуду A вынужденного колебания и значение α, которое представляет собой величину отставания по фазе вынужденного колебания (5.44) от вынуждающей силы (5.41):

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{4\beta^2\omega_{\text{в}}^2 + (\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2)^2}}; \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{2\beta\omega_{\text{в}}}{\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2}. \quad (5.51)$$

Зависимость $A(\omega_{\text{в}})$ амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (5.51) приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте $\omega_{\text{в}} = \omega_{\text{рез}}$ амплитуда колебаний достигает максимального значения: $A_{\text{рез}} = A(\omega_{\text{рез}})$. Явление возрастания амплитуды вынужденных колебаний до максимального значения при изменении частоты вынуждающей силы называют *резонансом*, а соответствующую частоту $\omega_{\text{рез}}$ – *резонансной частотой*.

Амплитуда колебаний $A(\omega_{\text{в}})$ (5.51) имеет максимум, если знаменатель минимален. Определим $\omega_{\text{рез}}$ из условия минимальности этого знаменателя. Продифференцируем знаменатель по $\omega_{\text{в}}$ и приравняем его к нулю, получим

$$8\beta^2\omega_{\text{в}} - 4(\omega^2 - \omega_{\text{в}}^2)\omega_{\text{в}} = 0. \quad (5.52)$$

Данное уравнение имеет три решения: $\omega_{\text{в}} = 0$ и $\omega_{\text{в}} = \pm\sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}$. Решение, равное нулю, соответствует максимуму знаменателя. Отрицательное решение должно быть отброшено как не имеющее физического смысла. Таким образом, для резонансной частоты получим одно значение:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega^2 - 2\beta^2}. \tag{5.53}$$

Подставляя $\omega_{рез}$ в формулу (5.51) для $A(\omega_в)$, найдем

$$A_{рез} = A(\omega_{рез}) = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega^2 - \beta^2}}. \tag{5.54}$$

Из (5.54) следует, что при отсутствии сопротивления среды ($\beta \to 0$) амплитуда при резонансе обращается в бесконечность. На рис. 5.13 приведен график зависимости $A(\omega_в)$ для различных значений коэффициента затухания β.

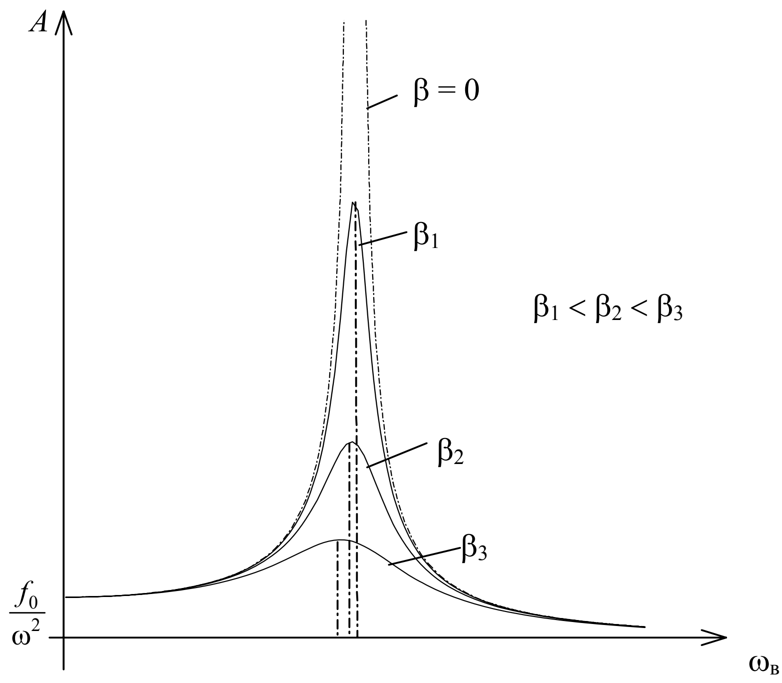


Рис. 5.13

При $\omega_в = 0$ все кривые приходят к одному и тому же значению $A(0) = f_0/\omega^2 = F_0/k$, где $k = m\omega^2$. Это значение представляет собой смещение из положения равновесия под действием постоянной силы величиной F_0. При стремлении $\omega_в$ к бесконечности все кривые асимптотически стремятся к нулю, т. к. при большой частоте сила так быстро изменяет свое направление, что система не успевает заметно сместиться из положения равновесия.

При малом затухании ($\beta \ll \omega$) отношение резонансной амплитуды к амплитуде при $\omega_в = 0$ определяется добротностью Q колебательной системы. Действительно, используя (5.54) и $A(0) = f_0 / \omega^2$, найдем

$$\frac{A_{рез}}{A(0)} \approx \frac{\omega}{2\beta} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{\pi}{\lambda} = Q. \qquad (5.55)$$

Величина отставания по фазе α вынужденных колебаний от вынуждающей силы, определенная в (5.51), является возрастающей функцией $\omega_в$ и лежит в пределах от 0 до π. При $\omega_в = \omega$ $\alpha = \pi/2$. Т. к. $\omega_{рез} < \omega$, то при резонансе $\alpha < \pi/2$. При слабом затухании $\beta \ll \omega$ и $\omega_{рез} \approx \omega$, так что значение α можно считать равным $\pi/2$.

Явление резонанса часто оказывается полезным, особенно в акустике и радиотехнике. Однако в большинстве механических устройств оно играет отрицательную роль. В ряде случаев резонанс может привести к разрушению механизмов, совершающих вынужденные колебания. Для предотвращения резонанса необходимо устранять периодически действующую силу или добиваться большой разности между собственной частотой колебаний и частотой возмущающей силы.

§ 5.6. Волновые процессы. Классификация волн

Колебания, возбужденные в какой-либо точке упругой среды, представляющей собой большое число связанных между собой частиц, начинают распространяться в ней с конечной скоростью, зависящей от свойств среды, передаваясь от одной точки среды к другой. Колебания частиц среды, которые распространяются в пространстве с течением времени, называют *волновым процессом*, или *волной*. Основным свойством всех волн, независимо от их природы, является перенос энергии без переноса вещества.

Направление распространения волны характеризуют с помощью понятия луча. *Лучом* называют линию, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением скорости распространения волны. *Фронтом волны* называют геометрическое место точек, до которых к некоторому моменту времени распространилось колебательное движение. *Волновой поверхностью* называют геометрическое место точек среды, колеблющихся в одинаковой фазе. Волновые поверхности перпендикулярны лучу.

Продольными называют волны, в которых частицы среды колеблются в направлении распространения волны, т. е. вдоль луча. *Поперечными* называют волны, в которых частицы среды колеблются в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, т. е. перпендикулярно лучу. Продольные волны могут возбуждаться в средах, в которых возникают упругие силы при деформации растяжения и сжатия, т. е. в твердых, жидких и газообразных средах. Поперечные волны могут возбуждаться в среде, в которой упругие силы возникают при деформации сдвига, т. е. только в твердых телах.

Длиной волны λ называют расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний T:

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}, \tag{5.56}$$

где υ – *фазовая скорость*, т. е. скорость, с которой распространяется определенное значение фазы волны; ν – частота колебаний.

Важными примерами волн являются сферические и плоские волны. *Сферические* волны возникают от точечного источника в пространстве, волновые поверхности представляют собой сферы, а лучи направлены радиально (вдоль радиусов волновых поверхностей, рис. 5.14). *Плоские* волны возникают от плоского или удаленного точечного источника, волновые поверхности представляют собой параллельные плоскости, а лучи перпендикулярны этим плоскостям (рис. 5.15).

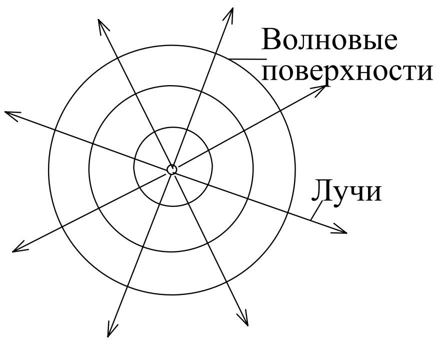


Рис. 5.14

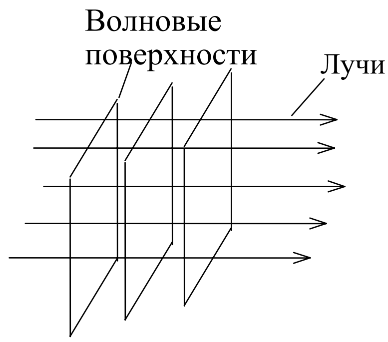


Рис. 5.15

§ 5.7. Уравнение бегущей волны. Волновое уравнение

Бегущими называют волны, которые переносят в пространстве энергию. Рассмотрим плоскую волну, предполагая, что колебания носят гармонический характер, а ось x совпадает с направлением распространения волны. В данном случае волновые поверхности перпендикулярны оси x, а т. к. все точки волновой поверхности колеблются одинаково, то смещение s частиц среды от положения равновесия будет зависеть только от координаты x и времени t, т. е. $s = s(x,\ t)$.

Если колебания точек, лежащих в плоскости $x = 0$, описываются функцией

$$s(0,\ t) = A\cos\omega t, \tag{5.57}$$

то на расстоянии x от начала координат частицы будут колебаться по этому же закону, но их колебания будут отставать по времени на величину $\tau = x/\upsilon$ – время прохождения волной расстояния x. Тогда уравнение колебаний частиц, лежащих в плоскости x, имеет вид

$$s(x,\ t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)\right). \tag{5.58}$$

Формула (5.58) является *уравнением плоской волны*, распространяющейся в положительном направлении оси x в непоглощающей упругой среде.

Уравнение (5.58) показывает, что колебания являются периодичными не только во времени, но и в пространстве. Для описания периодичности в пространстве вводят понятие *волнового числа*:

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} = \frac{2\pi}{\lambda}. \tag{5.59}$$

Используя (5.59), уравнение плоской волны (5.58) можно переписать в виде

$$s = A\cos(\omega t - kx). \tag{5.60}$$

Уравнение сферической волны, распространяющейся в изотропной среде без поглощения энергии, имеет вид

$$s(r,\ t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr), \tag{5.61}$$

где r – расстояние от точечного источника до рассматриваемой точки среды. Амплитуда сферической волны $A = A_0/r$ даже в среде, не поглощающей энергию, убывает с расстоянием.

Распространение волн в однородной изотропной среде в общем случае описывается *волновым уравнением* – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad \text{или} \quad \Delta s=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}, \qquad (5.62)$$

где $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

Волновое уравнение играет весьма важную роль в теории волновых процессов. Если мы, исходя из законов динамики, при изучении некоторого явления придем к уравнению вида (5.62), то сразу можно утверждать, что имеет место волновой процесс, скорость распространения которого легко найти из сопоставления полученного уравнения с (5.62). Решением этого уравнения являются, в частности, уравнения плоской (5.60) и сферической (5.61) волн.

§ 5.8. Энергия волны. Вектор Умова

Полная энергия E участка среды, принимающего участие в волновом процессе, равна сумме его кинетической T и потенциальной U энергий. Для гармонической волны (5.60) кинетическая и потенциальная энергии оказываются равны между собой: $T=U$, так что

$$E=T+U=2T. \qquad (5.63)$$

Учитывая, что кинетическая энергия $T=m\upsilon^2/2$, масса участка среды $m=\rho V$, где ρ – плотность среды, V – объем участка, $\upsilon=ds/dt=-A\omega\sin(\omega t-kx)$ – скорость точек среды из формулы (5.60), найдем

$$E=\rho VA^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx). \qquad (5.64)$$

Согласно (5.64), энергия волны распространяется с той же скоростью, что и волна, т. е. она не локализована в данном объеме, а передается от частицы к частице.

Тогда объемная плотность энергии

$$\varpi=\frac{E}{V}=\rho A^2\omega^2\sin^2(\omega t-kx). \qquad (5.65)$$

Среднее значение плотности энергии за период колебаний (или за время, значительно большее периода колебаний)

$$<\varpi>=\frac{1}{T}\int_0^T \varpi dt=\frac{\rho A^2\omega^2}{2}, \qquad (5.66)$$

где было учтено, что среднее значение от квадрата синуса $<\sin^2(\omega t - kx)> = 1/2$.

Т. к. энергия перемещается в среде вместе с возмущением, то вводят понятие *потока энергии* – количества энергии, переносимого волной через определенную поверхность в единицу времени:

$$\Phi = \frac{E}{\Delta t}, \tag{5.67}$$

где E – энергия, переносимая через поверхность за время Δt.

Плотность потока энергии – это энергия, переносимая в единицу времени через единицу площади, расположенной перпендикулярно направлению распространения волны:

$$j = \frac{E}{\Delta t \Delta S_\perp}. \tag{5.68}$$

За время Δt через площадь $\Delta S_\perp$ пройдет энергия $E = \varpi \upsilon \Delta t \Delta S_\perp$ (рис. 5.16). Тогда

$$j = \varpi \upsilon. \tag{5.69}$$

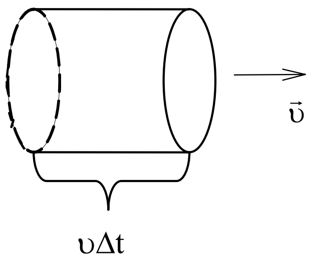


Рис. 5.16

Для определения плотности потока и направления переноса энергии вводят *вектор Умова*:

$$\vec{j} = \varpi \vec{\upsilon}. \tag{5.70}$$

Этот вектор численно равен плотности потока (5.69) и по направлению совпадает с направлением переноса энергии.

Среднее по времени значение плотности потока энергии называют *интенсивностью волны* I. Используя (5.66), найдем

$$I = < j > = <\varpi> \upsilon = \frac{\rho A^2 \omega^2 \upsilon}{2}. \tag{5.71}$$

§ 5.9. Стоячие волны

При распространении в среде одновременно нескольких волн возникает их наложение, причем волны не возмущают друг друга: колебания частиц среды оказываются суммой колебаний, которые совершали бы частицы при распространении каждой из волн в отдельности. Это называют *принципом суперпозиции* (наложения) волн.

Рассмотрим важный в практическом отношении случай, когда две гармонические плоские волны с одинаковой частотой ω и амплитудой A распространяются в противоположных направлениях оси x и накладываются друг на друга. Уравнение волны, распространяющейся в положительном направлении оси x, имеет вид (5.60)

$$s_1 = A\cos(\omega t - kx). \tag{5.72}$$

Уравнение волны, распространяющейся в противоположном направлении,

$$s_2 = A\cos(\omega t + kx). \tag{5.73}$$

Согласно принципу суперпозиции, результирующее смещение точек среды при суперпозиции этих волн

$$s = s_1 + s_2 = A\cos(\omega t - kx) + A\cos(\omega t + kx). \tag{5.74}$$

С учетом тригонометрической формулы для суммы косинусов

$$s = 2A\cos kx \cos\omega t. \tag{5.75}$$

Это и есть *уравнение стоячей волны*. В каждой точке колебания происходят с частотой, равной частоте ω складываемых волн. Амплитуда стоячей волны (5.75), в отличие от амплитуды бегущей волны, является функцией координаты x:

$$A_{\text{с}}(x) = 2A\,|\cos kx|. \tag{5.76}$$

Точки, в которых амплитуда (5.76) равна нулю, называют *узлами* стоячей волны. Встречные бегущие волны приходят в эти точки в противофазе и взаимно погашаются. Координаты узлов определим из (5.76):

$$A_{\text{с}}(x) = 0 \;\Rightarrow\; |\cos kx^{\text{уз}}| = 0 \;\Rightarrow\; kx^{\text{уз}} = \pm(2m+1)\frac{\pi}{2},\; m = 0,\ 1,\ 2,\ ...$$

Учитывая, что $k = 2\pi/\lambda$, найдем

$$x^{\text{уз}} = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{4},\; m = 0,\ 1,\ 2,\ ... \tag{5.77}$$

Точки, в которых амплитуда (5.76) максимальна и равна $2A$, называют *пучностями*. Встречные бегущие волны в пучностях имеют одинаковые фазы и усиливают друг друга. Координаты пучностей определим из условия

$$\cos kx^{\text{п}} = \pm 1 \;\Rightarrow\; kx^{\text{п}} = \pm m\pi,\; m = 0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Отсюда

$$x^{\text{п}} = \pm m\frac{\lambda}{2},\; m = 0,\ 1,\ 2, \ldots \tag{5.78}$$

Длиной стоячей волны называют расстояние между соседними пучностями (или узлами):

$$\Delta = x^{\text{п}}(m+1) - x^{\text{п}}(m) = (m+1)\frac{\lambda}{2} - m\frac{\lambda}{2} = \frac{\lambda}{2}. \tag{5.79}$$

На рис. 5.17 показаны крайние смещения s через половину периода. Между двумя соседними узлами все точки среды колеблются синфазно (с одинаковыми фазами). При переходе же через узел фаза изменяется на π (знак амплитуды изменяется на противоположный), т. е. колебания по разные стороны от узла в пределах полуволны происходят в противофазе. Узлы как бы разделяют среду на автономные области, в которых гармонические колебания совершаются независимо. Никакой передачи движения из одной области к другой, а значит, и перетекания энергии через узлы не происходит. Лишь в пределах расстояний, равных половине длины волны, происходят взаимные превращения кинетической и потенциальной энергий. Другими словами, нет никакого распространения возмущения вдоль оси x. Именно поэтому возмущение, описываемое (5.75), называют стоячей волной.

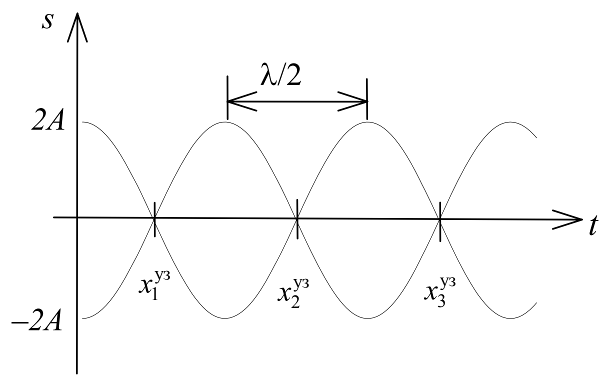


Рис. 5.17

Глава 6. МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

§ 6.1. Давление в жидкостях и газах. Закон Паскаля

Механические свойства жидкостей и газов во многом сходны между собой. При сжатии жидкости или газа в них возникают силы упругости, которые уравновешивают внешние силы. Причем при изменении формы жидкости или газа силы упругости не возникают. Эти силы возникают при изменении их объема, т. е. жидкость и газ обладают объемной упругостью. Упругие свойства жидкостей и газов проявляются в том, что отдельные части их действуют друг на друга или на соприкасающиеся с ними тела с силой, зависящей от степени сжатия жидкости или газа. Это воздействие характеризуют величиной, называемой давлением. *Давление* – величина, равная отношению силы F, действующей по нормали к некоторой поверхности, к площади S этой поверхности, т. е. это сила, приходящаяся на единицу площади:

$$p = \frac{F}{S}. \qquad (6.1)$$

Единицей измерения давления в СИ является *паскаль* (Па). Согласно (6.1), один паскаль – это давление, производимое силой 1 Н, действующей на нормальную к ней поверхность площадью 1 м^2: $1\ \text{Па} = 1\ \text{Н/м}^2$.

При равновесии жидкостей (газов) справедлив *закон Паскаля*: давление не зависит от ориентации площадки, на которую оно действует. В соответствии с этим законом, жидкости (газы) передают оказываемое на них давление равномерно по всем направлениям.

В жидкости, находящейся в поле силы тяжести, существует давление, обусловленное ее весом. Это давление называется *гидростатическим давлением*. Вес столба жидкости высотой h и поперечным сечением S равен $P = mg = \rho Shg$, где $m = \rho V = \rho Sh$ – масса столба жидкости, ρ – плотность жидкости. Тогда гидростатическое давление, т. е. давление жидкости на нижнее основание такого столба,

$$p = \frac{P}{S} = \rho gh. \qquad (6.2)$$

Учитывая, что на поверхность жидкости действует атмосферное давление p_0, согласно закону Паскаля, давление на произвольной глубине жидкости определяется формулой

$$p = p_0 + \rho g h. \qquad (6.3)$$

Согласно (6.3), давление на нижние слои жидкости будет больше, чем на верхние, поэтому на тело, погруженное в жидкость, действует сила, направленная вверх, равная весу вытесненной телом жидкости (*Закон Архимеда*):

$$F_{\text{А}} = \rho g V, \qquad (6.3)$$

где V – объем погруженного в жидкость тела. Формула (6.4) справедлива также для газов.

§ 6.2. Поток жидкости. Уравнение неразрывности

Движение жидкостей называют *течением*, а совокупность частиц движущейся жидкости – *потоком*. Для наглядности характеристики потока жидкости вводят понятие линий тока. Под *линиями тока* понимают линии, проведенные в жидкости, касательные к которым в каждой их точке совпадают с направлениями скорости частиц, проходящих через точку касания (рис. 6.1).

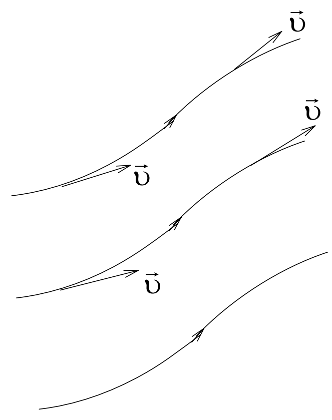


Рис. 6.1

Поскольку величина и направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ в каждой точке могут меняться со временем, то и картина линий тока может непрерывно изменяться. Если вектор скорости в каждой точке пространства остается постоянным, то течение называется *стационарным*, или *установившимся*. При стационарном течении любая частица жидкости проходит данную точку пространства с одним и тем же значением скорости. Картина линий тока при стационарном течении остается неизменной, и линии тока в этом случае совпадают с траекториями частиц.

Часть жидкости, ограниченная линиями тока, называется *трубкой тока*. При течении жидкости ее частицы не могут пересекать боковую поверхность трубки тока, т. к. скорости частиц направлены по касательной к ней. При стационарном течении форма трубки тока не изменяется со временем.

Рассмотрим какую-либо трубку тока стационарно текущей жидкости (рис. 6.2).

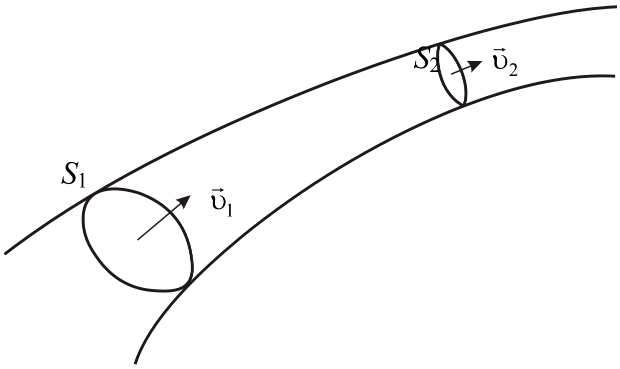


Рис. 6.2

Предположим, что скорость движения частиц жидкости одинакова во всех точках поперечного сечения трубки. Тогда за одно и то же время Δt через различные сечения трубки пройдет одинаковая масса жидкости, т. е. $m_1 = m_2$, где $m_1 = \rho_1\upsilon_1 S_1\Delta t$ и $m_2 = \rho_2\upsilon_2 S_2\Delta t$ – массы жидкости, прошедшие через поперечные сечения S_1 и S_2 трубки, υ_1 и υ_2 – скорости жидкости в этих сечениях. Считая жидкость *несжимаемой* (плотность ее всюду одинакова и не изменяется со временем: $\rho_1 = \rho_2$), найдем

$$\upsilon_1 S_1 = \upsilon_2 S_2 \;\Rightarrow\; \upsilon S = \text{const}. \tag{6.5}$$

Данное соотношение называют *уравнением неразрывности* для несжимаемой жидкости. Согласно (6.5), в сужающейся части трубки тока скорость течения возрастает, а в расширяющейся – уменьшается. Следовательно, жидкость на этих участках движется с ускорением. Причем давление со стороны широкой части трубки тока больше, чем давление со стороны узкой части.

§ 6.3. Уравнение Бернулли

При движении жидкостей во многих случаях можно считать, что перемещение одних частей жидкости относительно других не связано с возникновением сил трения. Жидкость, в которой внутреннее трение (вязкость) между слоями жидкости полностью отсутствует, называется *идеальной*.

Выделим в стационарно текущей идеальной несжимаемой жидкости трубку тока (рис. 6.3).

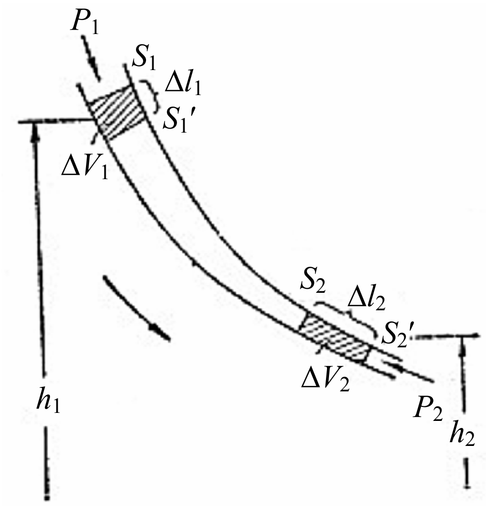


Рис. 6.3

Рассмотрим объем жидкости, ограниченный стенками трубки тока и перпендикулярными к линиям тока сечениями S_1 и S_2. За время Δt этот объем переместится вдоль трубки тока, причем сечение S_1 переместится в положение S_1', пройдя путь Δl_1, а сечение S_2 переместится в положение S_2', пройдя путь Δl_2. Энергия каждой частицы жидкости слагается из ее кинетической и потенциальной энергий в поле сил земного притяжения. Полная энергия данного объема равна сумме энергий каждой частицы жидкости. Т. к. течение жидкости стационарно, то приращение полной энергии ΔE всего рассматриваемого объема можно вычислить как разность энергий заштрихованных на рисунке объемов ΔV_1 и ΔV_2:

$$E_1 = \frac{\Delta m_1 \upsilon_1^2}{2} + \Delta m_1 g h_1;\ E_2 = \frac{\Delta m_2 \upsilon_2^2}{2} + \Delta m_2 g h_2, \qquad (6.6)$$

где $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1$ и $\Delta m_2 = \rho_2 \Delta V_2$ – массы данных объемов. Учтем, что $\Delta V_1 = S_1 \Delta l_1 = S_1 \upsilon_1 \Delta t$ и $\Delta V_2 = S_2 \Delta l_2 = S_2 \upsilon_2 \Delta t$, тогда, согласно уравнению неразрывности (6.5), $\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V$. Т. к. жидкость несжимаема, то плотность жидкости постоянна: $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Тогда приращение полной энергии всего объема

$$\Delta E = E_2 - E_1 = \left(\frac{\rho \upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2 - \frac{\rho \upsilon_1^2}{2} - \rho g h_1 \right) \Delta V. \qquad (6.7)$$

В идеальной жидкости силы трения отсутствуют, поэтому приращение энергии (6.7) равно работе, совершаемой над выделенным объемом силами давления. Силы давления на боковую поверхность трубки тока перпендикулярны в каждой точке к направлению перемещения частиц. Вследствие чего они работы не совершают. Отлична от нуля лишь работа сил, приложенных к сечениям S_1 и S_2. Эта работа равна

$$A = F_1\Delta l_1 - F_2\Delta l_2 = p_1 S_1 \Delta l_1 - p_2 S_2 \Delta l_2 = (p_1 - p_2)\Delta V, \tag{6.8}$$

где $F_1 = p_1 S_1$ и $F_2 = p_2 S_2$ – силы, действующие на сечения S_1 и S_2, p_1 и p_2 – оказываемые на сечения давления.

Приравняв (6.7) и (6.8) ($\Delta E = A$), сократив на ΔV и перенеся члены с одинаковыми индексами в одну часть равенства, получим

$$p_1 + \frac{\rho\upsilon_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho\upsilon_2^2}{2} + \rho g h_2. \tag{6.9}$$

Т. к. сечения S_1 и S_2 были выбраны совершенно произвольно, то можно утверждать, что в любом сечении трубки тока стационарно текущей идеальной жидкости выполняется условие

$$\frac{\rho\upsilon^2}{2} + \rho g h + p = \text{const}. \tag{6.10}$$

Уравнение (6.10) или равнозначное ему уравнение (6.9) называются *уравнением Бернулли*. Оно достаточно хорошо выполняется для реальных жидкостей, внутреннее трение в которых не очень велико. В формуле (6.10) $\rho\upsilon^2/2$ называют *динамическим давлением*, $\rho g h$ – *гидростатическим давлением*, p – *статическим давлением*.

Применим уравнение Бернулли к случаю истечения жидкости из небольшого отверстия в широком открытом сосуде (рис. 6.4). Выделим в жидкости трубку тока, имеющую своим сечением с одной стороны открытую поверхность жидкости в сосуде площадью S_1, а с другой стороны – отверстие, через которое жидкость вытекает и площадь которого S_2. Т. к. давления на уровнях h_1 и h_2 равны атмосферному ($p_1 = p_2 = p_{\text{атм}}$), то уравнение Бернулли (6.9) примет вид

$$\frac{\upsilon_1^2}{2} + g h_1 = \frac{\upsilon_2^2}{2} + g h_2, \tag{6.11}$$

где υ_1 – скорость перемещения открытой поверхности в широком сосуде; υ_2 – скорость истечения жидкости из отверстия.

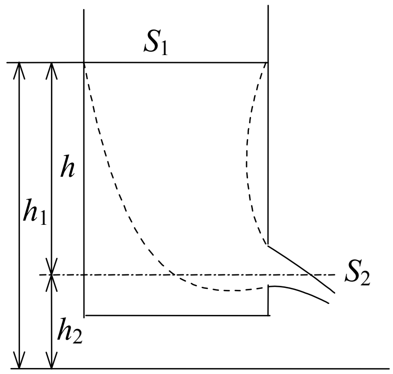


Рис. 6.4

Из уравнения неразрывности (6.5) следует, что $\upsilon_2/\upsilon_1 = S_1/S_2$. Если $S_1 \gg S_2$, то $\upsilon_2 \gg \upsilon_1$, и слагаемым $\upsilon_1^2/2$ в (6.11) можно пренебречь. Тогда

$$\upsilon_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh. \tag{6.12}$$

Отсюда скорость истечения жидкости из отверстия $\upsilon = \upsilon_2$

$$\upsilon = \sqrt{2gh}. \tag{6.13}$$

Эта формула называется *формулой Торричелли*. Она получена для идеальной жидкости. Для реальных жидкостей скорость истечения будет меньше, причем тем сильнее будет отличаться от (6.13), чем больше вязкость жидкости.

§ 6.4. Вязкость. Ламинарное и турбулентное течения

Вязкость (*внутреннее трение*) – это свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление движению одной части жидкости относительно другой.

Для жидкостей (газов) справедлив *закон Ньютона для внутреннего трения*. Согласно этому закону, при движении слоев жидкости (газа) с различными скоростями между ними возникает сила внутреннего трения, пропорциональная площади S соприкасающихся слоев и градиенту скорости слоев $d\upsilon/dz$, в направлении, перпендикулярном скорости движения жидкости:

$$F_{\text{тр}} = \eta\left|\frac{d\upsilon}{dz}\right|S, \tag{6.14}$$

где η – коэффициент пропорциональности, зависящий от природы и состояния жидкости (например, температуры), который называют *коэффициентом динамической вязкости*, или просто *вязкостью*. Он численно равен силе трения между слоями, если площадь их соприкосновения и градиент скорости равны единице. Единицей измерения коэффициента динамической вязкости в СИ является *паскаль на секунду* ($\text{Па} \cdot \text{с}$).

Сила внутреннего трения направлена по касательной к поверхности движущихся слоев. Действие этой силы сводится к тому, что она старается замедлить более быстро движущийся слой и ускорить медленнее движущийся слой (см. рис. 6.5, где показаны два слоя, движущихся с различными скоростями, и силы трения, действующие на них).

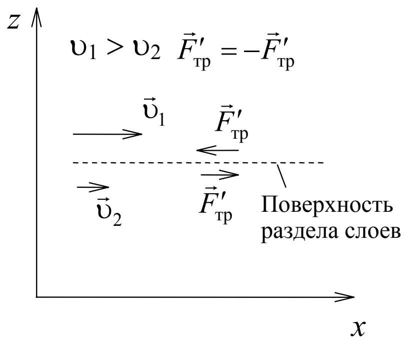


Рис. 6.5

Наблюдается два вида течения жидкости (или газа). Течение называют *ламинарным* (*слоистым*), если жидкость может быть представлена в виде слоев, которые скользят относительно друг друга, не перемешиваясь. Такое течение стационарно и наблюдается при небольших скоростях и поперечных размерах потока.

При увеличении скорости или поперечных размеров потока характер течения существенно изменяется. Возникает энергичное перемешивание жидкости. Такое течение называют *турбулентным*. При таком течении скорость частиц в каждом данном месте все время изменяется беспорядочным образом – течение нестационарно.

Характер течения зависит от безразмерной величины, называемой *числом Рейнольдса*:

$$\text{Re} = \frac{\rho \upsilon l}{\eta} = \frac{\upsilon l}{\nu}, \tag{6.15}$$

где ρ – плотность жидкости (газа); υ – средняя по сечению потока скорость; l – характерный для поперечного сечения размер (например, радиус при круглом сечении); η – коэффициент динамической вязкости жидкости (газа); $\nu = \eta/\rho$ – коэффициент кинематической вязкости.

При малых значениях числа Рейнольдса наблюдается ламинарное течение. Начиная с некоторого определенного значения $\mathrm{Re} = \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, называемого критическим, течение приобретает турбулентный характер. Например, для цилиндрической трубы критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} \approx 1000$.

§ 6.5. Течение жидкости в цилиндрической трубе. Формула Пуазейля

Рассмотрим ламинарное течение жидкости по цилиндрической трубе радиусом R и длиной l (рис. 6.6). Внешний слой жидкости, примыкающий к трубе, из-за сил молекулярного сцепления прилипает к трубе и остается неподвижным. Скорости последующих слоев тем больше, чем больше их расстояние до поверхности трубы. Максимальной скоростью обладает слой, двигающийся вдоль оси трубы.

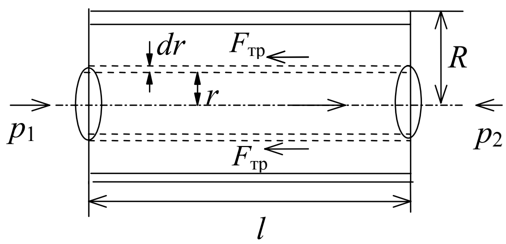


Рис. 6.6

В жидкости мысленно выделим цилиндрический слой радиусом r и толщиной dr. Согласно закону Ньютона для внутреннего трения (6.14), модуль силы внутреннего трения, действующей на боковую поверхность этого слоя,

$$F_{\text{тр}} = -\eta \frac{d\upsilon}{dr} S = -\eta 2\pi r l \frac{d\upsilon}{dr}, \tag{6.16}$$

где $S = 2\pi r l$ – площадь поверхности бокового слоя, знак минус означает, что при увеличении радиуса скорость уменьшается: $d\upsilon/dr < 0$.

На основания рассматриваемого цилиндрического объема действуют силы давления, сумма которых равна $(p_1 - p_2)\pi r^2$. Для стационарного течения жидкости сила внутреннего трения, действующая на боковую поверхность цилиндра, должна быть равна суммарной силе, действующей на основания цилиндра, т. е.

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = F_{\text{тр}} \;\Rightarrow\; \frac{d\upsilon}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2\eta l} r. \tag{6.17}$$

Интегрируя уравнение (6.17), найдем

$$\upsilon = -\frac{p_1 - p_2}{4\eta l} r^2 + C, \tag{6.18}$$

где C – постоянная интегрирования. Т. к. при $r = R$ на стенках трубы $\upsilon = 0$, то

$$C = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2. \tag{6.19}$$

Подставляя (6.19) в (6.18), получим

$$\upsilon(r) = \upsilon_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \qquad \upsilon_0 = \frac{p_1 - p_2}{4\eta l} R^2, \tag{6.20}$$

где $\upsilon_0 = \upsilon(0)$ – значение скорости на оси трубы. Согласно (6.20), скорость изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону (см. рис. 6.7).

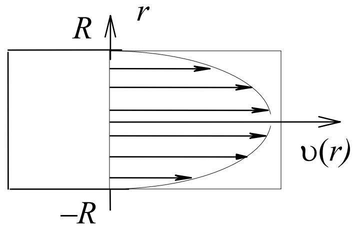


Рис. 6.7

За время t через кольцо площадью $dS = 2\pi r dr$ (см. рис. 6.8) вытечет жидкость, объем которой $dV = \upsilon(r) t dS = \upsilon(r) t 2\pi r dr$. Учитывая (6.20), объем жидкости, который вытечет из трубы за это время, найдем интегрированием:

$$V = \int_0^R \upsilon(r) t 2\pi r dr = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2) t}{8\eta l}. \tag{6.21}$$

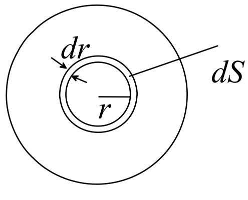


Рис. 6.8

Тогда поток жидкости Q, т. е. объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубы за единицу времени,

$$Q = \frac{\pi R^4 (p_1 - p_2)}{8\eta l}. \tag{6.22}$$

Эта формула называется *формулой Пуазейля*. Ее используют для определения вязкостей жидкостей (газов). Пропуская жидкость через капилляр известного радиуса и длины, измеряя перепад давления на концах капилляра и поток Q, можно найти коэффициент η.

§ 6.6. Движение тел в жидкостях и газах

При движении тела в жидкости или газе на него действуют силы, равнодействующую $\vec{F}$ которых разложим на две составляющие (см. рис. 6.9): $\vec{F} = \vec{F}_с + \vec{F}_п$. Одна из них $\vec{F}_с$ направлена в сторону, противоположную движению. Ее называют *лобовым сопротивлением*. Вторая сила $\vec{F}_п$ перпендикулярна скорости движения. Ее называют *подъемной силой.*

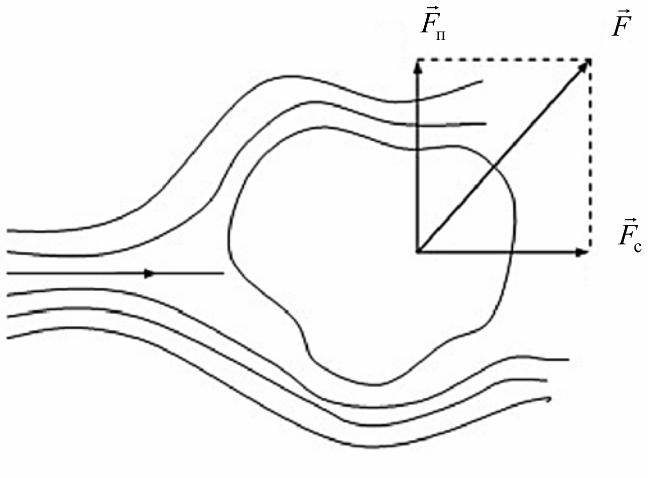


Рис. 6.9

Как показывают расчеты, при равномерном движении тела в идеальной жидкости лобовое сопротивление равно нулю: $F_{\text{с}} = 0$. Поэтому, не обладая вязкостью, идеальная жидкость должна свободно скользить по поверхности тела, полностью обтекая его. В реальных жидкостях, обладающих вязкостью, сила лобового сопротивления отлична от нуля. В этом случае очень тонкий слой жидкости прилипает к поверхности тела и движется с ним как одно целое, увлекая за собой из-за трения последующие слои жидкости. По мере удаления от поверхности тела скорость слоев становится все меньше, и на некотором расстоянии от поверхности жидкость оказывается практически не возмущенной движением тела. Кроме того, наличие слоев жидкости, движущихся с различными скоростями, приводит к тому, что полное обтекание становится невозможным, поток отрывается от поверхности тела, в результате чего позади тела возникают вихри, которые уносятся потоком и постепенно затухают вследствие трения. Давление в образующейся за телом вихревой области оказывается пониженным, поэтому результирующая сил давления отлична от нуля. Таким образом, лобовое сопротивление складывается из сопротивления трения и сопротивления давления на переднюю и заднюю поверхности тела. При данных поперечных размерах тела лобовое сопротивление зависит от формы тела. Наименьшим сопротивлением обладают тела с хорошо обтекаемой каплевидной формой. Такую форму стремятся придать фюзеляжу и крыльям самолетов, автомобилям и т. п.

При малых числах Рейнольдса (6.15), т. е. при небольших скоростях движения и поперечных размерах l тела, сила лобового сопротивления обусловлена практически только силами трения и оказывается прямо пропорциональной скорости движения: $F_{\text{с}} = \mu\upsilon$, где μ зависит от вязкости η и размера тела. Так, для тела шарообразной формы сила лобового сопротивления определяется *формулой Стокса*

$$F_{\text{с}} = 6\pi\eta R\upsilon, \tag{6.23}$$

где R – радиус шара.

Подъемная сила определяется соотношением

$$F_{\text{п}} = k\frac{\rho\upsilon^2}{2}S, \tag{6.24}$$

где k – коэффициент подъемной силы; ρ – плотность жидкости (газа); S – площадь наибольшего поперечного сечения тела в плоскости, перпендикулярной направлению потока.

Часть II. ЭЛЕМЕНТЫ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Глава 7. ОСНОВЫ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ МЕХАНИКИ

Релятивистская механика, или *специальная теория относительности* (*СТО*), изучает движения тел со скоростями, сравнимыми со скоростью света ($\upsilon \simeq c = 3 \cdot 10^8$ м/с).

§ 7.1. Постулаты Эйнштейна

В основу релятивистской механики положены два постулата, сформулированных А. Эйнштейном и являющихся обобщением многочисленных опытных данных.

Первый постулат представляет собой обобщение принципа относительности Галилея (см. § 2.2) на любые физические явления: *все физические явления протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета*. Другими словами, все инерциальные системы отсчета являются эквивалентными (неразличимыми) по своим физическим свойствам. Никаким опытом нельзя в принципе выделить ни одну из них как предпочтительную. Уравнения, являющиеся математическим выражением законов природы, должны быть инвариантными (т. е. не изменять свой вид) по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Второй постулат утверждает, что *скорость света в вакууме одинакова во всех инерциальных системах отсчета*. Это означает, что скорость света не зависит от движения источников и приемников света. Таким образом, скорость света занимает особое положение в природе. В отличие от всех других скоростей, меняющихся при переходе от одной системы отсчета к другой, скорость света в вакууме является инвариантной величиной. Наличие такой скорости существенно изменяет представления о пространстве и времени.

Из постулатов Эйнштейна следует, что скорость света в вакууме является предельной скоростью: никакой сигнал, никакое воздействие одного тела на другое не может быть передано со скоростью, превышающей скорость света в вакууме. Именно предельный характер этой скорости и объясняет одинаковость скорости света во всех системах отсчета, в противном случае эти системы отсчета можно было бы отличить друг от друга.

Все содержание специальной теории относительности вытекает из этих двух ее постулатов. В настоящее время оба постулата Эйнштейна, как и все следствия из них, убедительно подтверждаются всей совокупностью накопленного экспериментального материала.

§ 7.2. Преобразования Лоренца и их следствия

В классической механике переход от координат и времени одной инерциальной системы отсчета к координатам и времени другой инерциальной системы отсчета осуществляется с помощью преобразований Галилея (2.8). Из этих преобразований вытекает классический закон сложения скоростей (2.12):

$$\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}, \tag{7.1}$$

где $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\upsilon}'$ – скорости тел в системах отсчета, двигающихся друг относительно друга со скоростью $\vec{V}$.

Этот закон находится в противоречии с принципом постоянства скорости света в различных инерциальных системах отсчета (со вторым постулатом Эйнштейна). Поэтому следует признать, что преобразования Галилея оказываются несправедливыми в случае движения тел с большими скоростями, близкими к скорости света в вакууме.

В релятивистской механике преобразования координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой осуществляются с помощью *преобразований Лоренца*. В случае, когда две инерциальные системы отсчета K и K' двигаются друг относительно друга вдоль оси x со скоростью $\vec{V}$ (рис. 7.1), с учетом, что в начальный момент времени начала координат O и O' совпадают, преобразования Лоренца имеют вид

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \; y' = y; \; z' = z; \; t' = \frac{t - Vx/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.2}$$

В случае обратного перехода от K'- к K-системе

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \; y = y'; \; z = z'; \; t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.3}$$

В предельном случае малых скоростей, много меньших скорости света в вакууме $V \ll c$, преобразования Лоренца (7.2) переходят в преобразования Галилея (2.8). Таким образом, преобразования Галилея являются частным случаем преобразований Лоренца и справедливы при $V \ll c$.

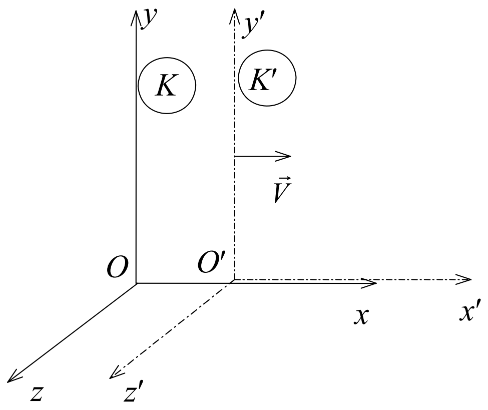


Рис. 7.1

Из преобразований Лоренца (7.2) видно, что при $V > c$ подкоренное выражение становится отрицательным, и формулы теряют физический смысл. Это соответствует тому факту, что движение тел со скоростью, большей скорости света в вакууме, невозможно. Нельзя даже пользоваться системой отсчета, движущейся со скоростью $V = c$, т. к. при этом подкоренные выражения обращаются в ноль, и формулы также теряют физический смысл. Это значит, что система отсчета принципиально не может быть связана со светом. Иначе говоря, не существует такой системы отсчета, в которой свет был бы неподвижным.

Заметим, что в формулу преобразования времени входит пространственная координата. Это важное обстоятельство указывает на неразрывную связь между пространством и временем. Другими словами, речь должна идти не отдельно о пространстве и времени, а о едином пространстве-времени, в котором протекают физические явления.

Следствия преобразований Лоренца.

1. Сокращение размеров тел в направлении их движения.

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси x' и покоящийся относительно системы K' (рис. 7.2), т. е. стержень двигается со скоростью $\vec{V}$ относительно системы отсчета *K*. Длиной тела в некоторой системе отсчета по определению называют расстояние между двумя точками системы координат, с которыми совпадают начало и конец тела в один и тот же момент времени по часам данной системы отсчета. В собственной системе отсчета, в которой движущийся объект покоится, длина тела

$$l_0 = x'_2 - x'_1. \tag{7.4}$$

В системе отсчета, относительно которой тело движется со скоростью $\vec{V}$, длина тела

$$l = x_2 - x_1. \tag{7.5}$$

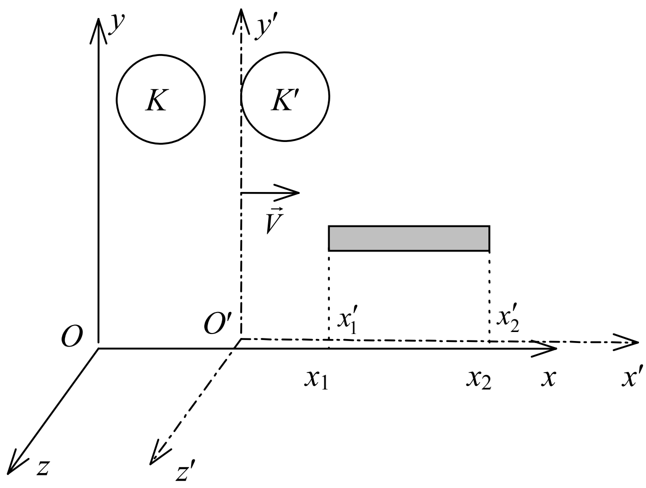


Рис. 7.2

Используя преобразования Лоренца (7.2), найдем

$$x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{x_1 - Vt}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.6}$$

Отсюда, учитывая (7.4), (7.5), придем к соотношению для длины двигающегося стержня

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}. \tag{7.7}$$

Из (7.7) следует, что линейные размеры тел сокращаются в направлении их движения. Заметим, что поперечные размеры тела в направлении осей y и z при этом не изменяются.

2. Замедление темпа хода времени движущихся часов.

Пусть в некоторой точке движущейся системы координат происходят последовательно два события в моменты времени t'_1 и t'_2. В неподвижной системе координат эти события происходят в разных точках в моменты времени t_1 и t_2. Интервал времени между этими событиями в движущейся системе координат равен $\Delta t' = t_2' - t_1'$, а в покоящейся – $\Delta t = t_2 - t_1$.

На основании обратных преобразований Лоренца (7.3)

$$t_1 = \frac{t_1' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}; \ t_2 = \frac{t_2' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.8}$$

Отсюда найдем

$$t_2 - t_1 = \frac{t_2' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} - \frac{t_1' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.9}$$

Так что

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.10}$$

Т. к. $\Delta t > \Delta t'$, то темп хода времени движущихся часов замедлен относительно неподвижных.

3. Относительность одновременности.

Пусть в K-системе отсчета в точках с координатами x_1 и x_2 в моменты времени t_1 и t_2 происходят два события. Промежуток времени между этими событиями в K'-системе отсчета найдем, используя преобразования Лоренца (7.2). Согласно формуле для преобразования времени, искомый промежуток времени

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - V(x_2 - x_1)/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}. \tag{7.11}$$

Два события называются одновременными, если они происходят в один и тот же момент времени. Из (7.11) следует, что если события являются одновременными в K-системе отсчета ($t_1 = t_2$), то в K'-системе эти события будут неодновременными ($t_1' \neq t_2'$). Таким образом, понятие одновременности является относительным. Относительность одновременности не нарушает причинно-следственных связей в том смысле, что физические следствия всегда имеют место после причины, их породившей.

Пусть событие, происходящее в момент времени t_1 с координатой x_1, является причиной события, происходящего в момент времени t_2 с координатой x_2, так что $t_2 > t_1$. Т. к. максимальная скорость передачи взаимодействия равна скорости света, то значение $x_2 - x_1$ не может быть больше, чем путь, пройденный световым сигналом за время $\Delta t = t_2 - t_1$, т. е.

$$x_2 - x_1 \le c(t_2 - t_1). \tag{7.12}$$

Учитывая это соотношение в (7.11), получим

$$t_2' - t_1' \ge \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\left(1 - \frac{V}{c}\right). \tag{7.13}$$

Т. к. $t_2 > t_1$ и $V < c$, то отсюда следует, что $t_2' > t_1'$. Это означает, что следствие происходит после причины в K'-системе отсчета. Таким образом, причинно-следственные связи носят абсолютный характер.

4. Инвариантность интервала между двумя событиями.

Пространственные расстояния и промежутки времени между какими-либо событиями зависят от выбора системы отсчета в релятивистской механике, т. е. носят относительный характер (см. первое и второе следствия). Одна из задач, которые ставит перед собой теория относительности, заключается в нахождении таких величин (и законов), которые не зависели бы от выбора инерциальной системы отсчета. Одной из таких величин является скорость света в вакууме. Другой весьма важной инвариантной величиной является *интервал* s_{12} между двумя событиями, который определяется соотношением

$$s_{12} = \sqrt{c^2 \Delta t^2 - l_{12}^2}, \tag{7.14}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ – промежуток времени между двумя событиями; l_{12} – расстояние между двумя точками пространства, в которых происходят данные события ($l_{12}^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$).

В инвариантности интервала можно убедиться, воспользовавшись преобразованиями Лоренца (7.3):

$$\Delta t = \frac{t_2' - t_1' + V(x_2' - x_1')/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \tag{7.15}$$

$$l_{12}^2 = \left(\frac{x_2' - x_1' + V(t_2' - t_1')}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}\right)^2 + (y_2' - y_1')^2 + (z_2' - z_1')^2. \tag{7.16}$$

Подставляя (7.15), (7.16) в (7.14), найдем, что

$$s_{12} = s'_{12}, \qquad (7.17)$$

где $s'_{12} = \sqrt{c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2}$ – интервал в системе отсчета K'.

Таким образом, утверждение, что два события разделены интервалом s_{12}, имеет абсолютный характер – оно справедливо во всех инерциальных системах отсчета.

В зависимости от того, какая составляющая преобладает в интервале, временная или пространственная, соответствующие интервалы называют: *времениподобными* ($c\Delta t > l_{12}$), *пространственноподобными* ($l_{12} > c\Delta t$), *светоподобными* ($c\Delta t = l_{12}$).

Если события разделены времениподобным интервалом, то всегда существует такая система отсчета, в которой эти события пространственно совмещены ($l_{12} = 0$), но не существует такой системы отсчета, в которой эти события происходят одновременно ($\Delta t = 0$). Если же интервал между событиями пространственноподобный, то всегда можно найти систему отсчета, в которой они одновременны, и не существует системы отсчета, в которой они пространственно совмещены.

В случае пространственноподобных интервалов события не могут оказать влияния друг на друга, даже если бы связь между событиями осуществлялась с помощью скорости света. События, разделенные времениподобными или светоподобными интервалами, могут быть причинно связанными друг с другом.

§ 7.3. Преобразование скорости

Найдем формулы, связывающие скорость движущегося тела в одной системе отсчета со скоростью того же тела в другой системе отсчета.

Проекции скорости тела на оси координат в K-системе отсчета

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt};\ \upsilon_y = \frac{dy}{dt};\ \upsilon_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (7.18)$$

В K'-системе отсчета, двигающейся относительно K-системы со скоростью $\vec{V}$ вдоль оси x, компоненты скорости этого же тела

$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'};\ \upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'};\ \upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'}. \qquad (7.19)$$

Вычисление компонентов скорости (7.19) проведем по следующей схеме:

$$\upsilon'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'/dt}{dt'/dt};\ \upsilon'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{dy'/dt}{dt'/dt};\ \upsilon'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{dz'/dt}{dt'/dt}. \qquad (7.20)$$

Дифференцируя преобразования Лоренца (7.2) по времени, найдем

$$\frac{dx'}{dt} = \frac{\upsilon_x - V}{\sqrt{1 - V^2/c^2}};\ \frac{dy'}{dt} = \frac{dy}{dt} = \upsilon_y;\ \frac{dz'}{dt} = \frac{dz}{dt} = \upsilon_z;\ \frac{dt'}{dt} = \frac{1 - V\upsilon_x/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}.$$

Данные производные подставим в (7.20), получим преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - V}{1 - V\upsilon_x/c^2};\ \upsilon'_y = \frac{\upsilon_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2};\ \upsilon'_z = \frac{\upsilon_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - V\upsilon_x/c^2}. \qquad (7.21)$$

Эти формулы выражают *закон преобразования скорости* в релятивистской механике. При малых скоростях ($V \ll c$, $\upsilon_x \ll c$) они переходят в формулы преобразования скорости классической механики:

$$\upsilon'_x = \upsilon_x - V;\ \upsilon'_y = \upsilon_y;\ \upsilon'_z = \upsilon_z, \qquad (7.22)$$

или в векторном виде

$$\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon} - \vec{V} \ \Rightarrow\ \vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}' + \vec{V}. \qquad (7.23)$$

В частном случае движения тела параллельно оси x $\upsilon_x = \upsilon$, $\upsilon_y = \upsilon_z = 0$, закон преобразования скорости (7.21) имеет вид

$$\upsilon' = \upsilon'_x = \frac{\upsilon - V}{1 - V\upsilon/c^2};\ \upsilon'_y = \upsilon'_z = 0. \qquad (7.24)$$

В случае распространения света ($\upsilon = c$) из (7.24) следует, что $\upsilon' = c$. Таким образом, релятивистские формулы преобразования скоростей соответствуют утверждению второго постулата Эйнштейна относительно неизменности скорости света во всех инерциальных системах отсчета.

§ 7.4. Релятивистский импульс. Основное уравнение релятивистской динамики

Импульсом в релятивистской механике называют следующую величину:

$$\vec{p} = \frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \qquad (7.25)$$

где $\vec{\upsilon}$ – скорость движения тела. Величину

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} \tag{7.26}$$

называют релятивистской массой тела; m_0 – масса покоящегося тела, которую называют *массой покоя* тела.

Опыт показывает, что именно так определенный импульс подчиняется закону сохранения импульса независимо от выбора инерциальной системы отсчета. При $\upsilon \ll c$ из (7.25) следует классическое определение импульса $\vec{p} = m_0\vec{\upsilon}$.

Согласно принципу относительности Эйнштейна (первому постулату), все законы природы должны быть инвариантны по отношению к инерциальным системам отсчета. Математические формулировки этих законов должны иметь один и тот же вид во всех системах, т. е. должны быть инвариантны при преобразованиях Лоренца. Основное уравнение классической механики $\vec{F} = m\vec{a}$ (второй закон Ньютона) не удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна. Преобразования Лоренца при переходе к другой инерциальной системе отсчета придают ему совершенно иную форму. Чтобы удовлетворить принципу относительности, основное уравнение динамики должно иметь другой вид и при $\upsilon \ll c$ переходить в классическое уравнение. Этим требованиям, как доказывается в теории относительности, удовлетворяет уравнение

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \tag{7.27}$$

где $\vec{F}$ – сила, действующая на частицу. Данное уравнение по виду совпадает с уравнением (2.4) классической механики. Однако слева в этом уравнении стоит производная от релятивистского импульса (7.25). Подставляя (7.25) в (7.27), запишем последнее уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{\upsilon}}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}\right) = \vec{F}. \tag{7.28}$$

Это и есть *основное уравнение релятивистской динамики*.

Именно в таком виде уравнение динамики приводит к сохранению импульса тела и переходит при $\upsilon \ll c$ в уравнение классической динамики. Кроме того, именно в таком виде основное уравнение динамики оказывается инвариантным по отношению к преобразованиям

Лоренца и, следовательно, удовлетворяет принципу относительности Эйнштейна.

Из основного уравнения релятивистской динамики следует, что вектор ускорения $\vec{a}$ тела не совпадает по направлению с вектором силы $\vec{F}$. Чтобы это показать, запишем уравнение (7.28) в виде

$$\frac{d(m\vec{\upsilon})}{dt} = \vec{F}, \qquad (7.29)$$

где m – релятивистская масса. Выполнив дифференцирование по времени, получим

$$\frac{dm}{dt}\vec{\upsilon} + m\vec{a} = \vec{F}, \qquad (7.30)$$

где $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$ – ускорение тела. Из (7.30) видно, что вектор ускорения не совпадает по направлению с вектором силы.

Основное уравнение релятивистской динамики позволяет найти, с одной стороны, закон действующей на тело силы, если известна зависимость релятивистского импульса от времени, а с другой стороны, уравнение движения частицы по известным начальному положению и начальной скорости частицы.

§ 7.5. Энергия в релятивистской механике. Закон взаимосвязи массы и энергии

Найдем выражение для кинетической энергии в релятивистской механике. Приращение кинетической энергии dT на элементарном перемещении $d\vec{r}$ равно работе силы на этом перемещении:

$$dT = \delta A = \vec{F}d\vec{r}. \qquad (7.31)$$

Учитывая, что $d\vec{r} = \vec{\upsilon}dt$, и используя уравнение (7.29) для силы, получим

$$dT = \frac{d}{dt}\left(m\vec{\upsilon}\right)\vec{\upsilon}dt = \vec{\upsilon}d\left(m\vec{\upsilon}\right) = \upsilon^2 dm + \frac{md(\upsilon^2)}{2}. \qquad (7.32)$$

где учтено, что $\vec{\upsilon}d\vec{\upsilon} = d(\upsilon^2)/2$ и $\vec{\upsilon}\vec{\upsilon} = \upsilon^2$. Используя (7.26), найдем дифференциал релятивистской массы:

$$dm = d\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}\right) = \frac{md(\upsilon^2)}{2c^2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)}. \qquad (7.33)$$

Учитывая (7.33) в (7.32), получим

$$dT = \frac{md(\upsilon^2)}{2\left(1-\upsilon^2/c^2\right)} = c^2 dm. \tag{7.34}$$

Таким образом, приращение кинетической энергии тела определяется приращением его массы. Проинтегрировав (7.34), найдем кинетическую энергию:

$$T = mc^2 + C = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} + C, \tag{7.35}$$

где C – постоянная интегрирования.

По смыслу кинетической энергии она должна обращаться в ноль при $\upsilon = 0$. Отсюда следует, что постоянная интегрирования $C = -m_0 c^2$. Учтем это в (7.35), тогда формула для релятивистской энергии тела примет вид

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1 \right). \tag{7.36}$$

Учитывая разложение функции в ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 1 + \frac{1}{2}\frac{\upsilon^2}{c^2} + \frac{3}{8}\frac{\upsilon^4}{c^4} + \ldots \tag{7.37}$$

и ограничиваясь при $\upsilon \ll c$ первыми двумя членами ряда, из (7.36) получим классическое выражение для кинетической энергии:

$$T = \frac{m_0 \upsilon^2}{2}. \tag{7.38}$$

Т. к. изменение кинетической энергии определяется работой силы ($dT = \delta A$), то, учитывая (7.34), получим $\delta A = c^2 dm$. Отсюда интегрированием найдем, что работа силы, равная изменению кинетической энергии, определяется приращением массы:

$$A = T_2 - T_1 = (m_2 - m_1)c^2 = \Delta m c^2. \tag{7.39}$$

Известно, что при протекании различных процессов в природе одни виды энергии могут преобразовываться в другие. Например, кинетическая энергия сталкивающихся тел может частично или полностью преобразоваться во внутреннюю энергию образовавшегося тела.

Поэтому естественно ожидать, что масса тела будет возрастать не только при сообщении ему кинетической энергии, но и вообще при любом увеличении общего запаса энергии тела независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение происходит. Отсюда А. Эйнштейн пришел к следующему фундаментальному выводу: общая энергия тела, из каких бы видов энергии она не состояла (кинетической, электрической, химической и т. д.), связана с массой этого тела соотношением

$$E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}}. \tag{7.40}$$

Эта формула выражает один из наиболее фундаментальных законов природы – *закон взаимосвязи массы и полной энергии*. Отсюда следует, что покоящееся тело также обладает энергией, которую называют *энергией покоя*:

$$E_0 = m_0 c^2. \tag{7.41}$$

Найдем взаимосвязь между энергией и релятивистским импульсом. Из сопоставления формул для энергии (7.40) и импульса (7.25) следует

$$\vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{\upsilon}. \tag{7.42}$$

Возводя данное соотношение в квадрат и учитывая соотношение для релятивистского импульса (7.25), найдем

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2 c^2}. \tag{7.43}$$

Отсюда импульс тела

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - m_0^2 c^4} = \frac{1}{c}\sqrt{(E - m_0 c^2)(E + m_0 c^2)}. \tag{7.44}$$

Учитывая, что $T = E - m_0 c^2$, найдем связь между импульсом и кинетической энергией тела:

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T + 2m_0 c^2)}. \tag{7.45}$$

Если частица движется со скоростью $\upsilon = c$, то, согласно (7.42), ее энергия

$$E = pc. \tag{7.46}$$

Из формул (7.43), (7.46) следует, что масса покоя такой частицы должна быть равна нулю: $m_0 = 0$. Таким образом, с точки зрения теории относительности, существование частиц с нулевой массой покоя возможно, причем эти частицы могут двигаться только со скоростью света. Это движение не есть результат предшествующего ускорения, а вообще единственное состояние, в котором такие частицы могут существовать. Остановка такой частицы равносильна ее поглощению (исчезновению). Как сейчас известно, такими частицами являются фотон (квант света) и, по-видимому, нейтрино.

Глава 8. ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Квантовая механика – теория физических явлений и процессов микромира. Под микромиром понимают объекты, линейные размеры которых порядка $10^{-13} \div 10^{-6}$ см. Квантовая механика описывает свойства атомов и молекул, механизмы излучения и поглощения электромагнитных волн и другие явления. Принципы, лежащие в основе квантовой механики, являются обобщением экспериментальных фактов о квантовании, т. е. дискретности значений некоторых физических величин, характеризующих свойства объектов микромира.

§ 8.1. Волновые свойства частиц. Гипотеза де-Бройля

Как известно, свет (электромагнитное излучение) обнаруживает как корпускулярные (квантовые), так и волновые свойства. В одних явлениях свет ведет себя как поток частиц (корпускул), в других явлениях свет проявляет волновые свойства. Двойственная природа света получила название *корпускулярно-волнового дуализма* и явилась исходным пунктом для становления квантовой механики.

В начале прошлого века Луи де-Бройль, опираясь на представления о симметрии свойств в природе, выдвинул и развил идею о том, что любые объекты микромира (электрон, протон, атом, молекула и т. д.) наряду с корпускулярными свойствами должны обладать и волновыми свойствами. Таким образом, с каждым микрообъектом связывается волновой процесс, который получил название *волны де-Бройля*. С каждым объектом связаны, с одной стороны, корпускулярные характеристики – энергия E, импульс p, а с другой стороны, волновые характеристики – частота ν, длина волны λ. Согласно де-Бройлю, количественные соотношения, связывающие корпускулярные и волновые характеристики частиц, такие же, как для света. Энергия частицы E прямо пропорциональна частоте волнового процесса ν:

$$E = h\nu, \tag{8.1}$$

где $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж $\cdot$ с – постоянная Планка. Из формулы (7.46) импульс фотона (кванта света), а значит и любой частицы, определяется соотношением

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}, \tag{8.2}$$

где $\lambda = c/\nu$ – длина волны волнового процесса, которую называют *длиной волны де-Бройля*; c – скорость света в вакууме.

Гипотеза де-Бройля была подтверждена в экспериментах К. Дэвиссона и Л. Джермера, Г. Томсона, П. С. Тарковского и др., наблюдавших дифракционную картину при рассеянии пучка частиц на кристаллах. Таким образом, экспериментально было доказано, что волновые свойства являются универсальным свойством всех частиц. Они не обусловлены какими-то особенностями внутреннего строения той или иной частицы, а отражают их общий закон движения.

Волновые и корпускулярные представления о свойствах объекта микромира дополняют друг друга. Связь между волнами и частицами может быть истолкована только статистически.

§ 8.2. Соотношения неопределенностей Гейзенберга

В. Гейзенберг, учитывая волновые свойства микрообъектов и связанные с волновыми свойствами ограничения в их поведении, пришел к выводу, что объекты микромира невозможно одновременно с любой наперед заданной точностью характеризовать координатой и импульсом. Физическая причина этого заключается в том, что измерительный прибор привносит неконтролируемое воздействие на микрообъект. Нельзя точно предсказать состояние физической системы после процесса измерения. Известна лишь вероятность того, что система находится в некоторых динамических состояниях, соответствующих тем или иным значениям ее параметров. Точность измерения координаты и импульса определяется соотношениями неопределенностей Гейзенберга:

$$\Delta x \Delta p_x \gtrsim \hbar; \quad \Delta y \Delta p_y \gtrsim \hbar; \quad \Delta z \Delta p_z \gtrsim \hbar, \qquad (8.3)$$

где Δx, Δy, Δz – неопределенности пространственных координат; Δp_x, Δp_y, Δp_z – неопределенности проекций импульса микрообъекта на координатные оси. Неопределенности Δx, Δy, Δz и Δp_x, Δp_y, Δp_z не являются обычными ошибками измерений, источник которых – несовершенство измерительных приборов и методик измерений, не позволяющее с идеальной точностью фиксировать измеряемые величины. Эти отклонения обусловлены квантово-механической природой микрообъектов.

Из соотношения неопределенностей следует, что если частица находится в состоянии с точным значением координаты ($\Delta x = 0$), то в этом состоянии соответствующая проекция ее импульса оказывается совершенно неопределенной ($\Delta p_x \to \infty$), и наоборот. Таким образом, для микрочастицы не существует состояний, в которых ее координаты и импульс имели бы одновременно точные значения. Как следствие, в квантовой механике теряет смысл понятие траектории движения частицы, т. к. движение по траектории характеризуется в любой момент времени определенными значениями координат и скорости. Учитывая, что неопределенность импульса связана с неопределенностью скорости $\Delta \upsilon_x$ соотношением $\Delta p_x = m\Delta \upsilon_x$, из (8.3) найдем

$$\Delta x \Delta \upsilon_x \succcurlyeq \frac{\hbar}{m}. \tag{8.4}$$

Из этого соотношения следует, что чем больше масса частицы, тем меньше неопределенности координаты и скорости и, следовательно, с тем большей точностью можно применять к этой частице понятие траектории.

В квантовой механике рассматривается также соотношение неопределенностей для энергии и времени, которые удовлетворяют условию

$$\Delta E \Delta t \succcurlyeq \hbar, \tag{8.5}$$

где ΔE – неопределенность энергии некоторого состояния; Δt – промежуток времени, в течение которого оно существует. Следовательно, система, имеющая среднее время жизни Δt, не может быть охарактеризована определенным значением энергии.

§ 8.3. Волновая функция и ее статистический смысл

В квантовой механике задача состоит не в точном предсказании событий, а в определении вероятностей этих событий. По значениям вероятности, используя определенные правила, можно найти средние значения случайных физических величин, которые доступны измерению.

В квантовой механике состояния микрочастиц описываются с помощью *волновой функции* $\psi(x, y, z, t)$, которая является основным носителем информации об их корпускулярных и волновых свойствах. Волновая функция является комплексной величиной и позволяет находить все вероятности в квантовой механике.

Например, вероятность нахождения частицы в объеме dV в момент времени t определяется как

$$dP = |\psi|^2 \, dV = \psi\psi^* dV, \tag{8.6}$$

где ψ^* – комплексно-сопряженная функция. Тогда плотность вероятности, т. е. вероятность нахождения частицы в единице объема,

$$f = \frac{dP}{dV} = |\psi|^2 = \psi\psi^*. \tag{8.7}$$

Эта величина является экспериментально наблюдаемой, в то время как сама волновая функция ψ, будучи комплексной, недоступна наблюдению.

Волновая функция, вообще говоря, определяется с точностью до произвольного постоянного множителя. Это не влияет на состояние частицы, которое она описывает. Волновую функцию выбирают так, чтобы она удовлетворяла условию нормировки

$$\int |\psi|^2 \, dV = \int \psi\psi^* dV = 1, \tag{8.8}$$

где интеграл берется по всему пространству. Условие нормировки (8.8) означает, что вероятность найти частицу во всем пространстве равна единице, т. е. представляет собой достоверное событие. Волновую функцию, удовлетворяющую условию (8.8), называют *нормированной*.

Волновая функция удовлетворяет *принципу суперпозиции*: если система может находиться в различных состояниях, описываемых волновыми функциями ψ_1, ψ_2, …, ψ_n, то она также может находиться в состоянии ψ, описываемом линейной комбинацией этих функций:

$$\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_n\psi_n, \tag{8.9}$$

где c_1, c_2, …, c_n – некоторые постоянные комплексные коэффициенты.

Волновая функция, являясь основной характеристикой микрообъекта, позволяет в квантовой механике вычислять средние значения физических величин, характеризующих данный микрообъект. Например, среднее расстояние электрона от ядра в атоме определяется по формуле

$$\langle r \rangle = \int r |\psi|^2 \, dV = \int r\psi\psi^* dV, \tag{8.10}$$

где ψ – волновая функция электрона в атоме.

§ 8.4. Уравнение Шредингера

Основное уравнение нерелятивистской квантовой механики, которое управляет изменением состояния системы, т. е. изменением волновой функции, сформулировано Шредингером. Это уравнение, как и все основные уравнения физики (например, уравнение Ньютона в классической механике), не выводится, а постулируется. Правильность этого уравнения подтверждается согласием с опытом, получаемыми с его помощью результатами, что, в свою очередь, придает ему характер закона природы. Уравнение Шредингера имеет следующий вид:

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi+U(x,\,y,\,z)\psi, \tag{8.11}$$

где $i=\sqrt{-1}$ – мнимая единица; $\hbar=h/2\pi$ – постоянная Планка; m – масса частицы; $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2+\partial^2/\partial z^2$ – оператор Лапласа; $U(x,\,y,\,z)$ – потенциальная энергия частицы в силовом поле, в котором она движется. Данное уравнение называют *временным уравнением Шредингера*.

Особую роль в квантовой теории играют *стационарные состояния* – состояния, в которых все наблюдаемые физические величины не меняются с течением времени. В стационарных состояниях волновая функция имеет вид

$$\psi(x,\,y,\,z,\,t)=\varphi(x,\,y,\,z)e^{-i\omega t},\ \omega=\frac{E}{\hbar}, \tag{8.12}$$

где E – полная энергия частицы, постоянная в случае стационарного состояния.

При таком виде волновой функции плотность вероятности (8.7) остается постоянной. В самом деле,

$$f=\psi\psi^*=\varphi(x,\,y,\,z)\varphi^*(x,\,y,\,z). \tag{8.13}$$

Для нахождения функции $\varphi(x,\,y,\,z)$ в стационарных состояниях подставим выражение (8.12) в уравнение (8.11), получим

$$\Delta\varphi+\frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\varphi=0. \tag{8.14}$$

Это уравнение называют *уравнением Шредингера для стационарных состояний*.

Волновая функция должна удовлетворять естественным, или стандартным, условиям. Эти условия состоят в том, что волновая функция должна быть конечной, однозначной, непрерывной и гладкой (без изломов) во всем пространстве, даже в тех точках, где потенциальная энергия U терпит разрыв. Решения уравнения (8.14), удовлетворяющие этим условиям, оказываются возможными лишь при некоторых значениях энергии E. Их называют *собственными значениями*, а функции φ, являющиеся решением уравнения (8.14) при этих значениях энергии, называют *собственными функциями*. Значения энергии могут быть дискретными (квантованными) или непрерывными, образуя дискретный или непрерывный энергетический спектр.

Рассмотрим несколько простейших случаев применения уравнения Шредингера (8.14) к решению некоторых задач квантовой механики.

§ 8.5. Движение свободной частицы

Свободная частица – это частица, движущаяся в отсутствии внешних полей ($U = 0$). Ограничимся рассмотрением движения частицы вдоль оси x. Состояние частицы описывается волновой функцией $\varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению Шредингера для стационарных состояний (8.14), которое в данном случае примет вид

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\varphi = 0. \qquad (8.15)$$

Решение уравнения (8.15) имеет вид

$$\varphi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx},\ k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \qquad (8.16)$$

где A и B – произвольные постоянные. Первое слагаемое в (8.16) описывает движение частицы в положительном направлении оси x, а второе – в противоположном направлении.

Рассматривая для определенности движение частицы в положительном направлении, необходимо положить $B = 0$. Тогда на основании (8.12) волновая функция, зависящая от времени, имеет вид

$$\psi(x,\ t) = \varphi(x)e^{-i\omega t} = Ae^{-i(\omega t - kx)}. \qquad (8.17)$$

Функция (8.17) представляет собой плоскую монохроматическую волну де-Бройля, где частота волны ω и волновое число k определены в (8.12) и (8.16):

$$\omega = \frac{E}{\hbar};\; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}. \quad (8.18)$$

Отсюда энергия частицы

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (8.19)$$

Энергия свободной частицы (8.19) может принимать любые значения, т. к. на волновое число k не накладывается никаких ограничений, и оно может принимать любые значения. Таким образом, энергетический спектр свободной частицы является непрерывным.

Используя (8.7), плотность вероятности обнаружить частицу в какой-либо точке пространства

$$f = |\psi|^2 = \psi\psi^* = |A|^2 . \quad (8.20)$$

Плотность вероятности не зависит от времени, и все положения частицы являются равновероятными.

§ 8.6. Частица в одномерной прямоугольной потенциальной яме

Рассмотрим поведение частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме шириной l с бесконечно высокими стенками (рис. 8.1).

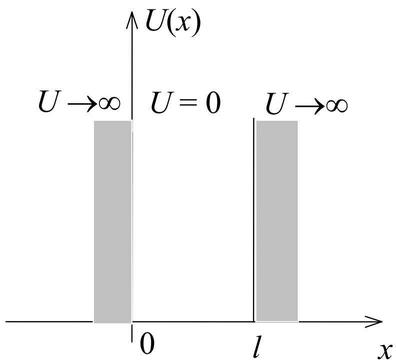


Рис. 8.1

Потенциальная энергия в этом случае имеет следующие значения:

$$U(x) = \begin{cases} \infty,\ x < 0, \\ 0,\ 0 \le x \le l, \\ \infty, x > l. \end{cases} \quad (8.21)$$

По условию задачи частица не проникает за пределы ямы, т. к. стенки ямы бесконечно высоки. Поэтому вероятность обнаружить ее, а следовательно, и волновая функция за пределами ямы равны нулю. Т. к. волновая функция должна быть непрерывной, то на границах ямы при $x = 0$ и $x = l$

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0\,. \tag{8.22}$$

Уравнение (8.22) является граничным условием для данной задачи.

В пределах ямы $U = 0$, и одномерное стационарное уравнение Шредингера (8.14) примет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E\varphi = 0\,. \tag{8.23}$$

Общее решение уравнения (8.23)

$$\varphi(x) = A\sin kx + B\cos kx\,,\; k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\,. \tag{8.24}$$

Отсюда при $x = 0$, учитывая (8.22), найдем $\varphi(0) = B = 0$. Тогда

$$\varphi(x) = A\sin kx\,. \tag{8.25}$$

Из второго граничного условия (8.22) $\varphi(l) = A\sin kl = 0$ следует, что

$$k = \frac{\pi n}{l}\,,\; n = 1,\; 2,\; 3,\; \ldots \tag{8.26}$$

Учитывая (8.26) в формуле (8.24) для волнового числа k, найдем выражение для энергии частицы, находящейся в яме:

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2} n^2\,,\; n = 1,\; 2,\; 3,\; \ldots \tag{8.27}$$

Таким образом, энергия частицы в потенциальной яме с бесконечно высокими стенками принимает лишь определенные дискретные значения, т. е. квантуется. Квантовые значения энергии называются *уровнями энергии*, а число n, определяющее энергетические уровни частицы, называют *главным квантовым числом*.

Подставляя (8.26) в (8.25), найдем волновые функции, отвечающие данным стационарным состояниям:

$$\varphi_n(x) = A\sin \frac{n\pi}{l} x\,,\; n = 1,\; 2,\; 3,\; \ldots \tag{8.28}$$

Постоянную A найдем из условия нормировки волновой функции (8.8):

$$\int_0^l |\varphi(x)|^2 dx = A^2 \int_0^l \sin^2\left(\frac{n\pi}{l}x\right) dx = A^2 \frac{l}{2} = 1. \tag{8.29}$$

Отсюда $A = \sqrt{2/l}$. Таким образом, волновые функции в данном случае имеют вид

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{n\pi}{l}x, \; n = 1, \; 2, \; 3, \; ... \tag{8.30}$$

Графики нескольких волновых функций показаны на рис. 8.2 пунктирными линиями, а распределение плотности вероятности $f(x) = \varphi_n^2(x)$ – сплошными. Из этих графиков видно, что в низшем энергетическом состоянии (n = 1) с наибольшей вероятностью частицу можно обнаружить в середине ямы, а вероятность ее нахождения вблизи краев весьма мала. Такое поведение частицы резко отличается от поведения классической частицы. С увеличением же энергии (т. е. с увеличением квантового числа n) максимумы плотности вероятности располагаются все ближе друг к другу. При очень больших значениях n картина распределения $\varphi_n^2(x)$ практически сливается и представляется равномерным распределением – частица начинает вести себя совсем «по-классически».

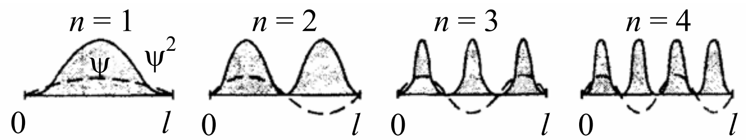


Рис. 8.2

Квантово-механическое рассмотрение данной задачи приводит к выводу, что частица не может иметь энергию, меньшую, чем минимальная энергия при n = 1:

$$E_{\min} = E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \tag{8.31}$$

Это полностью согласуется с соотношениями неопределенностей. У частицы в яме ограничена область возможных значений ее координаты, поэтому должен существовать разброс по импульсам, а значит, энергия должна быть отлична от нуля.

§ 8.7. Прохождение частицы сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект

Потенциальным барьером называется область пространства, где потенциальная энергия больше, чем в окружающих областях пространства. Рассмотрим простейший потенциальный барьер прямоугольной формы высотой U_0 и шириной l (рис. 8.3). Потенциальная энергия в этом случае имеет вид

$$U(x)=\begin{cases}0,\ x<0,\\ U_0,\ 0\le x\le l,\\ 0,\ x>l.\end{cases} \tag{8.32}$$

Классическая частица, обладая энергией E, либо беспрепятственно пройдет над барьером, если $E>U_0$, либо отразится от него и будет двигаться в противоположную сторону, если $E<U_0$, т. е. она не может проникнуть за барьер в область, где ее энергия меньше потенциальной энергии.

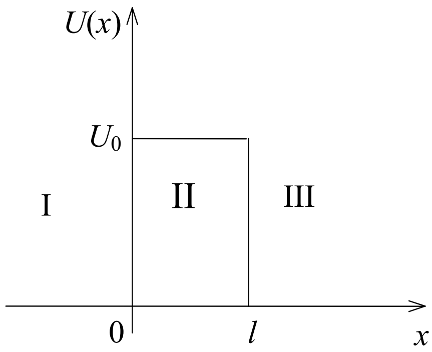


Рис. 8.3

Для микрочастицы же, даже при $E>U_0$, имеется отличная от нуля вероятность, что частица отразится от барьера и будет двигаться в обратную сторону. При $E<U_0$ имеется также отличная от нуля вероятность, что частица окажется в области $x>l$, т. е. проникнет сквозь барьер. Эти выводы следуют непосредственно из уравнения Шредингера.

Уравнение Шредингера для стационарных состояний (8.14) в различных областях, обозначенных на рис. 8.3, имеет следующий вид:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{2m}{\hbar^2}E\varphi=0\text{, для областей I и III;} \tag{8.33}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U_0)\varphi = 0, \text{ для области II.} \quad (8.34)$$

Общее решение этих дифференциальных уравнений имеет вид

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \text{ для области I;} \quad (8.35)$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{iqx} + B_2 e^{-iqx} \text{ для области II;} \quad (8.36)$$

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} + B_3 e^{-ikx} \text{ для области III,} \quad (8.37)$$

где

$$k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}; \; q = \frac{\sqrt{2m(E - U_0)}}{\hbar}. \quad (8.38)$$

Постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 A_3, B_3 определяются из условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границах барьера при $x = 0$ и $x = l$.

В решении (8.35) первое слагаемое соответствует падающей на барьер волне, а второе слагаемое – отраженной от барьера волне. В области III имеется только прошедшая волна, поэтому $B_3 = 0$ в (8.37). Рассмотрим для определенности случай $E < U_0$. Тогда

$$q = i\alpha, \; \alpha = \frac{\sqrt{2m(U_0 - E)}}{\hbar}. \quad (8.39)$$

Если барьер высок и широк ($\alpha l \gg 1$), то в (8.36) $B_2 \approx 0$. Таким образом, решение уравнений Шредингера примет вид

$$\varphi_1(x) = A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \text{ для области I;} \quad (8.40)$$

$$\varphi_2(x) = A_2 e^{-\alpha x} \text{ для области II;} \quad (8.41)$$

$$\varphi_3(x) = A_3 e^{ikx} \text{ для области III.} \quad (8.42)$$

Используя эти волновые функции, по формуле (8.13) можно найти плотность вероятности $f(x)$ местонахождения частицы. Результаты расчета плотности вероятности показаны на рис. 8.4. Слева от барьера имеем падающую и отраженную волны, а за барьером – только прошедшую волну. Внутри барьера волновая функция имеет неволновой характер, в результате чего плотность вероятности убывает экспоненциально.

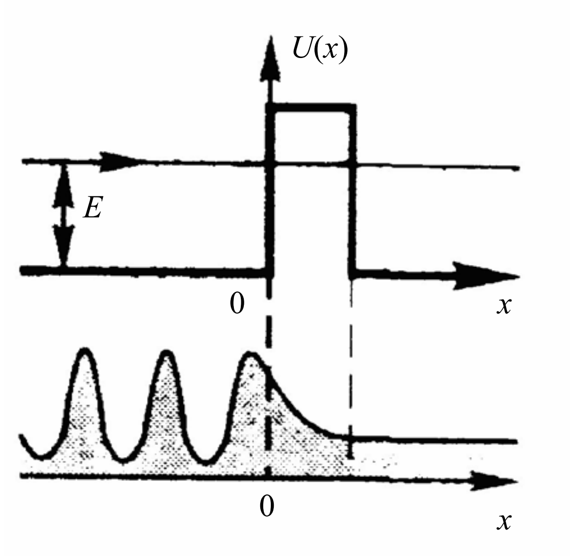


Рис. 8.4

Таким образом, квантовая механика приводит к принципиально новому квантовому явлению, получившему название *туннельного эффекта*, в результате которого микрообъект может, будто по туннелю, пройти сквозь потенциальный барьер. Туннельный эффект – специфическое квантовое явление, не имеющее аналога в классической физике (где такого в принципе быть не может).

Для описания туннельного эффекта используют понятие коэффициента прозрачности D потенциального барьера, определяемого как отношение плотности потока прошедших частиц к плотности потока падающих частиц. Для прямоугольного потенциального барьера

$$D \approx \exp\left(-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U_0 - E)}\right). \tag{8.43}$$

Этим эффектом объясняются многие физические явления, например холодная эмиссия электронов из металлов, альфа-распад, спонтанное деление ядер и др.

Учебное издание

Кленицкий Дмитрий Викентьевич

Физика
В 5-ти частях
Часть 1
Механика

Редактор *О. А. Готовчик*
Компьютерная верстка *Д. В. Чернушевич*

Учреждение образования
«Белорусский государственный технологический университет».
220006. Минск, Свердлова, 13а.
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.