

УДК 532.517.2

А. М. Волк, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

**ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА КОНИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

Конусные насадки используются в некоторых конструкциях абсорбционных, выпарных и других контактных аппаратах. Струя жидкости в таких аппаратах падает на вершину конуса и в виде пленки стекает по его боковой поверхности и в пространстве между конусами. При свободном течении в межконусном пространстве под действием сил поверхностного натяжения пленка стремится уменьшить свою поверхность и слиться в струю.

Рассмотрено движение пленки жидкости по поверхности конуса под действием силы тяжести. Жидкость считается линейно-вязкой и несжимаемой, течение медленным и осесимметричным. В сферических координатах записаны компоненты тензора напряжений, методом малого параметра получены дифференциальные уравнения движения, определены начальные условия и получены решения уравнений. При заданном расходе жидкости определена толщина пленки в зависимости от длины образующей и угла раствора конуса, а также скорость пленки при спуске с поверхности.

Cone nozzles are used in some constructions of absorptive, evaporating and other contact devices. Liquid jet in such devices falls on top of the cone and flows as a film on its lateral surface and in the space between the cones. The film tends to reduce its surface, and to merge into the stream in the free flow in interbell space under the action of surface tension force

The motion of a film of liquid on the cone surface under the action of gravity has examined. The liquid is considered linear viscous and incompressible, current slow and axisymmetric. Components of the stress tensor have written in spherical coordinates, the differential equations of motion have received, initial conditions have defined and solutions of these equations have found by the small parameter method. For a given flow rate, there are found the film thickness depending on the length of the cone generator and cone angle, and also the rate of the film in the time of descent at the surface.

**Введение.** В некоторых конструкциях абсорбционных, выпарных и других контактных аппаратов используются конусные насадки [1–3]. Струя жидкости в таких аппаратах падает на вершину конуса и в виде пленки стекает по его боковой поверхности и в пространстве между конусами (рис. 1).

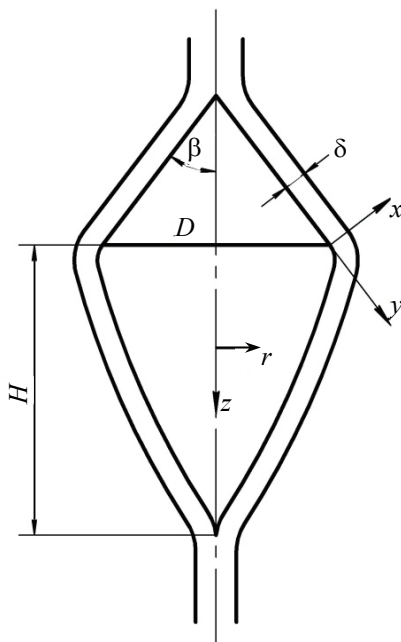


Рис. 1. Схема пленочного течения в контактном аппарате

При свободном течении в межконусном пространстве под действием сил поверхностного натяжения пленка стремится уменьшить свою поверхность и слиться в струю. Один из таких аппаратов используется в процессе производства капролактама на стадии удаления низкомолекулярных соединений из расплава поликапроамида [1].

Аппарат представляет собой герметично закрытую емкость, внутри которой закреплена насадка в виде усеченных конусов. Расплав движется по конусам и в пространстве между ними в виде пленки.

Для расчетов геометрических параметров аппарата (размера конусов, расстояние между ними), режимов работы и исследования процессов массообмена на поверхности контакта необходимо изучить движение пленки жидкости по поверхности конуса.

**Основная часть.** Рассмотрим задачу о течении тонкой жидкой пленки по поверхности конуса с углом раствора  $2\beta$  и длиной образующей  $l$ . Струя жидкости радиуса  $r_0$  падает на вершину конуса с заданной скоростью  $V_0$ . Основной расчетной характеристикой является толщина пленки  $\delta$  в функции расстояния  $S$  вдоль поверхности конуса (рис. 2).

Жидкость считается линейно-вязкой и несжимаемой, течение медленным и осесимметричным. В сферических координатах

$(r, \lambda, \varphi)$ , здесь  $\lambda = \pi - \theta$ . При этом  $V_\varphi \equiv 0$ , а  $V_r$ ,  $V_\lambda$  и  $p$  зависят только от  $r$  и  $\lambda$ .

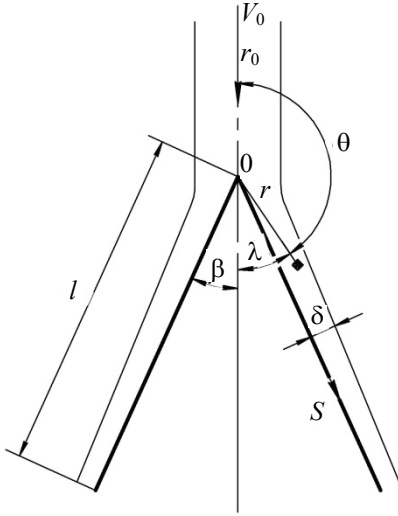


Рис. 2. Схема гравитационного течения пленки жидкости по поверхности конуса

Для получения приближенных уравнений движения жидкости введем безразмерные переменные с учетом того, что порядок координаты и скорости в направлении нормали к поверхности конуса мал по сравнению с порядком координаты и скорости в продольном направлении:

$$\begin{aligned} r &= lr_1; \quad V_r = V_0 U_1; \quad V_\lambda = \varepsilon V_0 V_1; \quad \lambda = \beta + \psi; \quad \psi = \varepsilon \psi_1; \\ \varepsilon &= \frac{\delta}{l}; \quad P = \rho V_0^2 P_1. \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тензора напряжений для описываемого течения запишутся в виде [4, 5]

$$\begin{cases} p_{rr} = -\rho V_0^2 \left( p_1 - \frac{2}{\text{Re}} \frac{\partial U_1}{\partial r_1} \right), \\ p_{\varphi\varphi} = -\rho V_0^2 \left( p_1 - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{U_1}{r_1} + \varepsilon \frac{V_1}{r_1} \text{ctg} \lambda \right) \right), \\ p_{\lambda\lambda} = -\rho V_0^2 \left( p_1 - \frac{2}{\text{Re}} \left( \frac{U_1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} \right) \right), \\ p_{r\lambda} = \frac{\rho V_0^2}{\text{Re}} \left( \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r_1} \frac{\partial U_1}{\partial \psi_1} + \varepsilon \left( \frac{\partial V_1}{\partial r_1} - \frac{V_1}{r_1} \right) \right), \\ p_{r\varphi} = p_{\varphi\lambda} = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Здесь параметр  $\varepsilon$ , представляющий собой отношение средней толщины пленки к средней длине смачивания, считается заведомо малой величиной, в то время как введенное число Рейнольдса  $\text{Re} = V_0 l / \nu$  может быть и не малым. Примем  $\text{Re} \approx 1/\varepsilon$  и сохраним в соотношениях (2) лишь слагаемые, имеющие наибольший порядок величины:

$$p_{rr} = p_{\varphi\varphi} = p_{\lambda\lambda} = -\rho V_0^2 p_1; \quad (3)$$

$$p_{r\lambda} = \rho V_0^2 \frac{1}{r_1} \frac{\partial U_1}{\partial \psi_1}; \quad p_{r\varphi} = p_{\lambda\varphi} = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что движение происходит над действием силы тяжести  $F(g \cos \lambda, -g \sin \lambda, 0)$ , запишем дифференциальные уравнения медленного движения вязкой жидкости в напряжениях [3] с учетом (3), (4):

$$\frac{V_0^2}{gl} \left( \frac{\partial p_1}{\partial r_1} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_1^2} + \frac{2}{r_1} p_1 - \frac{\text{ctg} \lambda}{r_1^2} \frac{\partial U_1}{\partial \psi_1} - \frac{p_1}{r_1} \right) = \cos \lambda; \quad (5)$$

$$\frac{V_0^2}{gl} \left( \frac{\partial}{\partial r_1} \left( \frac{1}{r_1} \frac{\partial U_1}{\partial \psi_1} \right) - \frac{1}{r_1 \varepsilon} \frac{\partial p_1}{\partial \psi_1} \right) = \sin \lambda, \quad (6)$$

и условие несжимаемости

$$\frac{\partial U_1}{\partial r_1} + 2 \frac{U_1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} + \varepsilon \frac{V_1 \text{ctg} \lambda}{r_1} = 0. \quad (7)$$

Входящий в уравнения (5), (6) безразмерный параметр – число Фруда  $\text{Fr} = V_0^2 / (gl)$  будем считать порядка  $\varepsilon$ , тогда, сохраняя в уравнениях (6), (7) лишь члены порядка  $\varepsilon^0$ , получим приближенные уравнения в безразмерных переменных:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_1^2} \frac{\partial^2 U_1}{\partial \psi_1^2} = -\cos \beta, \\ \frac{1}{r_1} \frac{\partial^2 p_1}{\partial \psi_1^2} = -\sin \beta, \\ \frac{\partial U_1}{\partial r_1} + 2 \frac{U_1}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial V_1}{\partial \psi_1} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Возвращаясь к размерным величинам, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V_r}{\partial y^2} = -\frac{g}{\nu} \cos \beta, \\ \frac{\partial P}{\partial y} = -\rho g \sin \beta, \\ \frac{\partial V_r}{\partial r} + 2 \frac{V_r}{r} + \frac{\partial V_\lambda}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (9)$$

где  $y = r\psi$ .

Так как  $\psi$  мало на достаточном удалении от вершины конуса, то  $y$  можно приближенно считать координатой, направленной по нормали к образующей.

Вначале запишем уравнение неразрывности в интегральной форме, приравнивая заданный расход  $Q = \pi r_0^2 V_0$  к расходу вдоль поверхности конуса на расстоянии  $S$  от вершины:

$$Q = 2\pi s \sin \beta \int_0^\delta V_s dy.$$

Здесь  $V_s = V_r \cos(\lambda - \beta) - V_\lambda \cos(\lambda - \beta)$ , и поскольку угол  $\lambda - \beta$  мал на достаточном удалении от вершины конуса, можно приближенно считать  $V_s = V_r$  и  $s = r$ . Тогда для нахождения  $Q$  надо проинтегрировать только первое уравнение системы (9). Так как на поверхности пленки  $p_{nr} = 0$ , а в принятом приближении  $p_{nr} = p_{\lambda r}$ , то граничные условия можно записать так:

$$V_r = 0 \text{ при } y = 0;$$

$$\frac{\partial V_r}{\partial y} = 0 \text{ при } y = \delta.$$

С учетом этих условий первое уравнение (9) дает в результате интегрирования

$$V_r = \frac{g}{2\nu} \cos \beta (2\delta y - y^2). \quad (10)$$

Максимальное значение  $V_r$  достигается, очевидно, при  $y = \delta$  и

$$V_{r_{\max}} = \frac{g}{2\nu} \delta^2 \cos \beta.$$

Интегрируя скорость пленки, получим ее расход:

$$\begin{aligned} Q &= 2\pi s \sin \beta \frac{g}{2\nu} \cos \beta \int_0^\delta (2\delta y - y^2) dy = \\ &= \frac{1}{3} \pi s \sin 2\beta \frac{\rho g}{\nu} \delta^3 = \pi r_0^2 V_0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отсюда находим приближенное выражение для толщины пленки в функции от  $s$ :

$$\delta = \sqrt[3]{\frac{3\mu r_0^2 V_0}{\rho g s \sin 2\beta}} = \sqrt[3]{\frac{3\mu Q}{\pi \rho g s \sin 2\beta}}. \quad (12)$$

Интегрируя второе уравнение (9) с учетом того, что  $P = P_{am}$  при  $y = \delta$ , находим

$$P = P_{am} + \rho g \sin \beta (\delta - y). \quad (13)$$

Из третьего уравнения (9) и выражения (10) для  $V_r$  найдем

$$-\frac{\partial V_\lambda}{\partial \psi} = \frac{g}{\nu} \cos \beta (3\delta r \psi - 2r^2 \psi^2),$$

откуда при условии  $V_\lambda = 0$  при  $\psi = 0$  получим

$$V_\lambda = -\frac{g}{\nu} \cos \beta \left( \frac{3}{2} \delta r \psi^2 - \frac{2}{3} r^2 \psi^3 \right); \psi = \lambda - \beta. \quad (14)$$

Формулы (10)–(14) дают приближенное решение рассматриваемой задачи на достаточном удалении от вершины конуса.

При заданном объемном расходе жидкости и выбранных геометрических размерах конуса получим скорость пленки при сходе с поверхности:

$$V_z^0 = \sqrt[3]{\frac{Q^2 \rho g \cos \beta}{3\mu \pi^2 D^2}}. \quad (15)$$

**Обозначения.**  $x, y$  – декартова система координат;  $r, \lambda, \varphi$  – сферическая система координат;  $s, y$  – система координат на поверхности конуса;  $g$  – ускорение свободного падения, м/с<sup>2</sup>;  $P$  – давление, Па;  $D$  – диаметр основания конуса, м;  $l$  – длина образующей конуса, м;  $r_1, \varepsilon, \psi_1, V_1, U_1, P_1$  – безразмерные параметры;  $\beta$  – угол раствора конуса;  $Fr$  – число Фруда;  $Re$  – число Рейнольдса;  $V_r, V_\lambda, V_\varphi$  – составляющие скорости пленки, м/с;  $Q$  – объемный расход жидкости, м<sup>3</sup>/ч;  $V_0$  – начальная скорость пленки, м/с;  $\delta$  – толщина пленки жидкости, м;  $H$  – высота пленки жидкости, м;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Н·с/м<sup>2</sup>;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с;  $\pi = 3,14159\dots$ ;  $p$  – тензор касательных напряжений, Н/м<sup>2</sup>;  $\rho$  – плотность жидкости, кг/м<sup>3</sup>.

**Закключение.** Полученная математическая модель может быть использована при расчете пленочного выпарного аппарата для производства поликапроамида, определения его геометрических параметров аппарата (размера конусов, расстояние между ними), режимов работы и исследования процессов массообмена на поверхности контакта.

### Литература

1. Вольф, Л. А. Производство поликапроамида / Л. А. Вольф, Б. Ш. Хайтин. – М.: Химия, 1977. – 207 с.
2. Берд, Р. Явления переноса / Р. Берд, В. Стюарт, Е. Лайфут. – М.: Химия, 1974. – 688 с.
3. Левич, В. Г. Физико-химическая гидродинамика / В. Г. Левич. – М.: Физматгиз, 1959. – 699 с.
4. Слезкин, Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости / Н. А. Слезкин. – М.: Гостехиздат, 1955. – 516 с.
5. Лойтянский, Л. Г. Механика жидкости и газа: учеб. для вузов / Л. Г. Лойтянский. – Изд. 6-е, перераб. и доп. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 840 с.

Поступила 01.03.2013