УДК 532.517

А. М. Волк, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

ГИДРОДИНАМИКА ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Выполнен анализ исследований гидродинамики пленочных движений в сепарационных, фильтровальных, тепло- и массообменных, газожидкостных аппаратах и реакторах. Проведено теоретическое исследование пленочного движения жидкой фазы на внутренней и внешней поверхностях цилиндра под воздействием массовых сил поля тяжести и закрученного газового потока. Впервые получены дифференциальные уравнения движения, а также точные решения для составляющих скорости при условии прилипания пленки на поверхности проницаемого цилиндра и равенстве касательных напряжений на границе раздела фаз, определена толщина пленки. Найдены гидродинамические характеристики пленочного течения и аналитические условия для возможных режимов движения.

The studies of the hydrodynamics of film movements in the separation, filtration, heat and mass transfer, gas-liquid reactors and apparatuses are analyzed. The theoretical study of film movement in the liquid phase on the inner and outer surfaces of the cylinder under the influence of the gravitational field of mass forces and swirling gas flow is hold. For the first time, the differential equations of motion is obtained, the exact solutions for the velocity components subject to adherence of the film on the surface of a permeable cylinder and equality of shear stresses at the interface are found, the film thickness is determined. There are found hydrodynamic characteristics of film flow and analytical conditions for the possible modes of motion.

Введение. Исследование свободного пленочного течения, а также движения под воздействием газового потока по плоской поверхности, наружной и внутренней стенкам цилиндра имеет большое техническое значение и выполнено в работах [1, 2]. Режим течения определяется числом Рейнольдса для пленки

$$\mathrm{Re}_\delta = \frac{4\bar{U}\delta\rho}{\mu} = \frac{4q}{\nu}. \qquad (1)$$

Воздействия газового потока на пленку жидкости передаются посредством сил трения, возникающих на границе взаимодействия фаз.

При наличии пленочного течения на внутренней поверхности трубы волновая поверхность рассматривается как нерегулярная шероховатость стенок канала. Обобщением экспериментальных данных в этом случае для касательных напряжений сил трения на границе раздела фаз получено соотношение [2–4]

$$\tau_z = \frac{0{,}0791}{\mathrm{Re}^{0,25}}\frac{\rho_\text{г}\bar{W}_z^2}{2}\left(1+\frac{300\delta}{D}\right). \qquad (2)$$

Установившееся пленочное течение характеризуется равновесием сил тяжести и возникающих сил трения.

Анализ способов взаимодействия газожидкостных потоков в процессах разделения фаз показывает, что перспективным является способ с использованием закрученных потоков, который позволяет значительно повысить эффективность при разделении фаз в тепломассообменных процессах.

Математическое моделирование исследуемых процессов позволяет определить оптимальные режимы, соотношение между геометрическими параметрами цилиндрических элементов конструкции и нагрузками по фазам.

Основная часть. Рассмотрим стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости по внутренней стенке вертикального цилиндра под воздействием закрученного потока газа (рисунок). Ось z цилиндрической системы координат направим вниз по оси цилиндра.

Запишем уравнение неразрывности [5, 6]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU_r\right)+\frac{\partial U_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\frac{\partial U\varphi}{\partial \varphi}=0. \qquad (3)$$

В силу осесимметричности $\frac{\partial U\varphi}{\partial\varphi}=0$. Принимая $U_r=0$, из уравнения (3) получим $\frac{\partial U_z}{\partial z}=0$. При этих условиях решение уравнений Навье – Стокса будет автомодельным, т. е. скорость пленки будет только функцией радиуса $U=U(r)$. Уравнение Навье – Стокса для осевой составляющей скорости принимает вид

$$\mu\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU_z}{dr}\right)\right)+\rho g-\frac{\partial P}{\partial z}=0. \qquad (4)$$

Считаем, что выполняется условие прилипания на стенке цилиндра и заданы касательные напряжения на границе раздела фаз газ – жидкость. Тогда граничными условиями будут

$$U_z\big|_{r=R}=0,\ \mu\frac{dU_z}{dr}\bigg|_{r=R-\delta}=-\tau_z. \qquad (5)$$

Перепад давления по длине элемента считаем постоянным. Принимаем $\psi=\dfrac{\partial P}{\partial z}=\text{const}$, интегрируем уравнение (4) и находим

$$U_z=c_1\ln r-\frac{\rho g-\psi}{4\mu}r^2+c_2.$$

Из условия прилипания (5) находим c_2 и, выполнив переход к безразмерным переменным $\tilde r=r/R$, $\tilde\delta=\delta/R$, получаем

$$U_z=c_1\ln\tilde r+\frac{\rho g-\psi}{4\mu}R^2\left(1-\tilde r^2\right).$$

Из граничного условия (5)

$$c_1=\frac{\tau_z R\left(1-\tilde\delta\right)}{\mu}+\frac{\rho g-\psi}{2\mu}R^2\left(1-\tilde\delta\right).$$

Условия равновесия сил $\pi\left(R-\delta\right)^2\Delta P=2\pi\left(R-\delta\right)l\,\tau_z$, действующих на газовый поток [2], дают возможность заменить перепад давления касательными напряжениями сил трения на границе раздела фаз:

$$\frac{\Delta P}{l}=\psi=-\frac{2\tau_z}{R\left(1-\tilde\delta\right)};\qquad c_1=\frac{\rho g R^2}{2\mu}\left(1-\tilde\delta\right)^2.$$

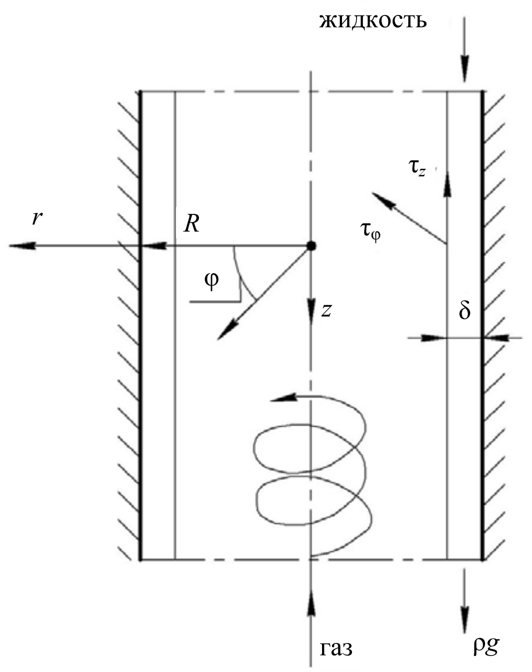

Схема пленочного течения
на цилиндрической поверхности

При этом осевая скорость в пленке жидкости будет

$$U_z=\frac{\tau_z R}{2\mu\left(1-\tilde\delta\right)}\left(1-\tilde r^2\right)+$$

$$+\frac{\rho g R^2}{4\mu}\left[2\left(1-\tilde\delta\right)^2\ln\tilde r+1-\tilde r^2\right].$$

Найдем объемный расход жидкой фазы по площади поперечного сечения пленки, отнесенный к единице периметра цилиндра:

$$q=\frac{\iint U_z r\,dr\,d\varphi}{2\pi R}=\frac{1}{R}\int\limits_{R-\delta}^{R}U_z r\,dr=R\int\limits_{1-\tilde\delta}^{1}U_z\tilde r\,d\tilde r.$$

Выполнив интегрирование, получим

$$q=\frac{\tau_z R^2}{8\mu}\left[\frac{1}{1-\tilde\delta}+\left(1-\tilde\delta\right)^3+2\left(1-\tilde\delta\right)\right]+$$

$$+\frac{\rho g R^3}{4\mu}\left[\frac14+\frac34\left(1-\tilde\delta\right)^4-\left(1-\tilde\delta\right)^2-\left(1-\tilde\delta\right)^4\ln\left(1-\tilde\delta\right)\right].$$

Данное уравнение однозначно определяет среднюю толщину пленки δ при заданном расходе жидкой фазы и известных касательных напряжениях на границе раздела фаз. Гравитационное течение имеет место при $\tau_z=0$.

Разложив функции в степенной ряд, найдем

$$q=\frac{\tau_z\delta^2\left(1-\tilde\delta+\tilde\delta/4\right)}{2\mu\left(1-\tilde\delta\right)}+$$

$$+\frac{\rho g\delta^3}{3\mu}\left[1-\tilde\delta+\frac{3}{20}\tilde\delta^2+\frac{\tilde\delta^3}{5}+\sum_{k=4}^{\infty}\frac{24\left(k-2\right)!}{\left(k+2\right)!}\tilde\delta^k\right].$$

Для анализа пленочного течения найдем скорость пленки на границе раздела фаз и градиент скорости:

$$U_z\big|_{\tilde r=1-\tilde\delta}=\frac{\tau_z\delta}{\mu}\,\frac{1-\delta^2/2}{1-\tilde\delta}+$$

$$+\frac{\rho g\delta^2}{\mu}\left[\frac12-\frac{\tilde\delta}{3!}-\frac{\tilde\delta^2}{4!}-\sum_{k=3}^{+\infty}\frac{\left(k-1\right)!}{\left(k+2\right)!}\tilde\delta^k\right];$$

$$\frac{dU_z}{dr}=\frac{dU_z}{R\,d\tilde r}=-\frac{\tau_z\tilde r}{\mu\left(1-\tilde\delta\right)}+\frac{\rho g R}{2\mu}\left[\frac{\left(1-\tilde\delta\right)^2}{\tilde r}-\tilde r\right].$$

Осевая составляющая тензора касательных напряжений на стенке

$$\tau\big|_{r=R}=\mu\frac{dU_z}{R\,d\tilde r}\bigg|_{\tilde r=1}=-\frac{\tau_z}{\left(1-\tilde\delta\right)}-\rho g\delta\left(1-\frac{\tilde\delta^2}{2}\right).$$

Аналогично получается автомодельное решение для закрученного пленочного течения. Считаем, что касательная составляющая скорости зависит лишь от радиуса $U_\varphi = U_\varphi(r)$. В этом случае имеем уравнение

$$\mu \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rU_\varphi\right)\right) = 0 \qquad (6)$$

и получаем решение

$$U_\varphi = c_3\tilde{r} + \frac{c_4}{\tilde{r}}. \qquad (7)$$

Используем граничные условия

$$U_\varphi\Big|_{\tilde{r}=1} = 0,\ \tilde{r}\frac{\partial}{\partial\tilde{r}}\left(\frac{U_\varphi}{\tilde{r}}\right)\Bigg|_{\tilde{r}=1-\tilde{\delta}} = -\frac{R\,\tau_\varphi}{\mu};$$

находим произвольные постоянные и получаем касательную составляющую скорости

$$U_\varphi = \frac{R\tau_\varphi\left(1-\tilde{\delta}\right)}{2\mu}\left(\frac{1}{\tilde{r}} - \tilde{r}\right). \qquad (8)$$

Определяем среднее значение касательной составляющей скорости

$$\bar{U}_\varphi = \frac{1}{\tilde{\delta}}\int_{1-\tilde{\delta}}^{1} U_\varphi d\tilde{r} =$$

$$= \frac{1}{\tilde{\delta}}\frac{R\tau_\varphi}{2\mu}\left[\frac{\left(1-\tilde{\delta}\right)^4}{2} - \frac{\left(1-\tilde{\delta}\right)^2}{2} - \left(1-\tilde{\delta}\right)\ln\left(1-\tilde{\delta}\right)\right] =$$

$$= \frac{\tau_\varphi\delta}{2\mu}\left[1 - \frac{10}{3!}\tilde{\delta} + \frac{14}{4!}\tilde{\delta}^2 + \sum_{k=3}^{\infty}\frac{2(k-1)!}{(k+2)!}\tilde{\delta}^k\right]. \qquad (9)$$

Касательная составляющая при этом будет

$$\tau_\varphi = \tau_z \mathrm{tg}(k\beta). \qquad (10)$$

Полученные зависимости позволяют получить расчетные режимы течения пленки, которые зависят от величины и направления составляющей τ_z тензора касательных напряжений сил трения на границе раздела фаз, удельного расхода q жидкой фазы, радиуса цилиндра R.

Заключение. Впервые разработана математическая модель для определения гидродинамических характеристик пленочного течения на цилиндрической поверхности под воздействием закрученного газового потока жидкой фазы. Данная модель позволяет учитывать гидродинамику пленки при исследовании процессов сепарации и тепломассобмена.

Обозначения. c_1, c_2, c_3, c_4 – постоянные коэффициенты; g – ускорение свободного падения, м/с^2; l – длина цилиндрического элемента, м; P – давление, Па; ΔP – перепад давления, Па/м; q – удельный объемный расход жидкой фазы, м^3/(м·с); r – расстояние в радиальном направлении в цилиндрической системе координат, м; R – радиус цилиндрического элемента, м; $\tilde{r} = r/R$ – безразмерная радиальная координата; Re – число Рейнольдса; U_z, U_φ, U_r – осевая, тангенциальная и радиальная составляющие скорости жидкости соответственно, м/с; β – угол, град; z – осевая координата цилиндрической системы координат, м; δ – толщина пленки жидкости, м; $\tilde{\delta} = \delta/R$ – безразмерная толщина пленки жидкости; π = = 3,14159…; ψ – перепад давления, Па/м; ν – коэффициент кинематической вязкости, м^2/с; ρ – плотность жидкости, кг/м^3; τ – касательные напряжения, Н/м^2; φ – угол в цилиндрической системе координат.

Литература

1. Гельперин Н. И. Основные процессы и аппараты химической технологии: в 2 кн. М.: Химия, 1981. 812 с. 2 кн.
2. Соколов В. И. Газожидкостные реакторы. Л.: Машиностроение, 1976. 216 с.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
4. Уоллис Г. Б. Одномерные двухфазные течения. М.: Мир, 1972. 440 с.
5. Слезкин Н. А. Динамика вязкой несжимаемой жидкости. М.: Гостехиздат, 1955. 516 с.
6. Лойтянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.

Поступила 14.03.2014