УДК 519.624

И. Ф. Соловьева, кандидат физико-математических наук, доцент (БГТУ)

ВЛИЯНИЕ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Работа посвящена изучению нелинейных граничных задач с малым параметром при старшей производной и возникающими при этом пограничными слоями. Для решения таких задач предлагаются модификации методов пристрелки. Если пограничный слой находится на левом конце заданного отрезка, то применяется метод обратной пристрелки, если на правом, то метод прямой множественной пристрелки. В случае когда пограничный слой имеет место на обоих концах отрезка, предлагается метод множественной двусторонней пристрелки. Выполнено сравнение этих методов и показано преимущество последнего из них для решения граничных задач с пограничным слоем. Приведен пример решения такой задачи с занесением результатов решения в таблицу основных значений.

Work is devoted to the study of nonlinear boundary value problems with a small parameter at the highest derivative and emerging with the boundary layers. For these tasks, the proposed modification methods adjustment. If the boundary layer is on the left end of the specified interval, the method of zeroing in reverse, if on the right, then based on direct multiple adjustment. In the case when the boundary layer occurs at both ends of the segment, we propose a method of multiple two-way adjustment. A comparison of these methods and show the advantage of the latter method for solving boundary value problems with a boundary layer. An example of solving the boundary value problem with the boundary layer, the results of which are given solutions in the form of a table of basic values.

Малый множитель при старшей производной породил большую теорию…
Математический фольклор

Введение. Большой раздел теории дифференциальных уравнений (д. у.) с малым множителем при старшей производной приобрел достаточно широкую популярность у теоретиков и, естественно, имеет огромное значение для прикладников. Одни ученые называют эти задачи уравнениями с малым параметром при старшей производной, другие используют термин «сингулярное возмущение». В прикладной математике и ее приложениях эти задачи фигурируют как задачи с пограничным слоем, с краевым эффектом и т. д.

Любая математическая модель, описывающая какой-нибудь реальный процесс в терминах д. у., обязательно включает в себя различные параметры. Как правило, значения этих параметров известны лишь приближенно, т.е. с какой-то точностью. Поэтому вопрос о характере поведения решений д. у. такого вида при малом изменении величины входящего в уравнение параметра представляет принципиальный интерес.

Математическая теория д. у. с малым параметром при старшей производной существует достаточно давно. Впервые на прикладную актуальность изучения сингулярно возмущенных задач обратил внимание Л. Прандтль в связи с развитой им в 1904 г. теорией пограничного слоя в гидродинамике. Сингулярно возмущенные задачи неоднократно возникали потом в механике, физике, технике и т. д.

В настоящее время малому множителю при старшей производной посвящено огромное количество работ наших и зарубежных авторов. В их поле зрения входит изучение начальных и граничных задач, свойств, поведений представлений и оценок различных типов решений, многообразных приложений, а также различных модификаций проблемы и ее обобщения.

Получение решения граничной задачи при наличии пограничного слоя осложняется и требует специальных методов.

В качестве таких методов предлагается рассматривать методы пристрелки.

Основная часть. Рассмотрим систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) первого порядка с малым параметром при старшей производной, приведенную к нормализованному виду:

$$y' = f(t, y, \varepsilon), \quad a \le t \le b, \quad \varepsilon > 0, \qquad (1)$$

где $y:[a,b] \to R^n$, $f:[a,b] \times R^n \times R \to R^n$.

Предположим, что зависимость f от ε такая, что в соответствующих задачах возникают пограничные или внутренние переходные слои. Эта особая роль малого параметра ε обычным образом транслируется через решение граничной задачи.

Присоединим к уравнению вида (1) двухточечное граничное условие наиболее общего вида:

$$g(y(a),\, y(b)) = 0, \tag{2}$$

где $g: R^n \times R^n \to R.$ В условие (2) может также входить параметр ε. Будем также предполагать, что отображения $f,\, g$ и отрезок $[a,\, b]$ такие, что задачи (1), (2) имеют единственное решение и обладают необходимой гладкостью.

Рассмотрим модификации метода множественной двусторонней пристрелки, учитывающие влияние пограничного слоя [1].

1. Пусть пограничный слой находится на правом конце отрезка $[a,\, b]$. В этом случае организовываем пристрелку таким образом, чтобы влияние пограничного слоя наиболее существенно проявлялось на конечном этапе вычислений. Это осуществляется в виде прямой множественной пристрелки. Выберем точки пристрелки $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ и рассмотрим пристрелочные задачи Коши:

$$\begin{cases} u' = f(t, u),\ t \in J_j^{(+)} = \{t_j \le t \le t_{j+1}\}, \\ u(t, y_j)\big|_{t=t_j} = y_j, \quad y_j \in R^n,\ j = \overline{0,\, n-1}, \end{cases} \tag{3}$$

где $y_0,\, y_1,\, \ldots,\, y_{n-1}$ – параметры пристрелки, определенные как решение замыкающей системы вида

$$\begin{cases} u(t_{j+1}, y_j) - y_{j+1} = 0, \quad j = \overline{1,\, n-1}, \\ g(y_0, y_n) = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Конструктивная сторона замыкающей системы уравнений характеризуется матрицей Якоби:

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_0^{(1)} & -I & 0\ldots & 0 \\ 0 & U_1^{(2)} & -I\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & U_{n-1}^{(n)} & -I \\ G_0 & 0 & 0 & G_n \end{bmatrix},$$

где приняты следующие обозначения:

$$U_j^{(j+1)} = \frac{\partial u(t_{j+1}, y_j)}{\partial y_j};$$

$$G_0 = \frac{\partial g(y_0,\, y_n)}{\partial y_0};\ G_n = \frac{\partial g(y_0, y_n)}{\partial y_n}.$$

2. Пусть пограничный слой находится на левом конце отрезка $[a,\, b]$. В этом случае пристрелку выгодно организовать в форме обратной множественной пристрелки:

$$\begin{cases} v' = f(t,\, v), \quad t \in J_j^{(-)} = \{t_j \ge t \ge t_{j-1}\}, \\ v(t,\, y_j)\big|_{t=t_j} = y_j,\, y_j \in R^n,\ j = g,\, g-1,\, \ldots,\, 1, \end{cases} \tag{5}$$

причем $b = t^{(g)} > t^{(g-1)} > \ldots > t^{(1)} > t^{(0)} = a,$

$$\begin{cases} v(t_{j-1}, y_j) - y_{j-1} = 0, \quad j = g,\, g-1,\, \ldots,\, 1, \\ g(y_0, y_g) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Замыкающая система в операторной форме примет вид

$$G(z) = 0,$$

где

$$G: R^{(s)} \to R^{(s)},\ s = (g+1)n,\ z = (y_g^T,\, y_{g-1}^T,\, \ldots, y_0^T)^T.$$

Матрица Якоби будет вычисляться аналогично:

$$\frac{\partial G(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} V_g^{(g-1)} & -I & 0\ldots & 0 \\ 0 & V_{g-1}^{(g-2)} & -I\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & V_1^{(0)} & -I \\ G_0 & 0 & 0 & G_g \end{bmatrix},$$

где

$$V_j^{(j-1)} = \frac{\partial v(t_{j-1}, y_j)}{\partial y_j};$$

$$G_0 = \frac{\partial g(y_0,\, y_g)}{\partial y_0};\ G_n = \frac{\partial g(y_0,\, y_g)}{\partial y_g}.$$

3. Пусть пограничный слой расположен на обоих концах отрезка. В этом случае удобно применять метод множественной двусторонней пристрелки, предусматривающий развитие вычислительного процесса в обоих направлениях.

Имеют место самые сложные случаи, когда решение характеризуется внутренними переходными слоями, осцилляциями, резкими перепадами, в частности наблюдаются и разрывы первого рода. В таких случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе экспериментов.

Практическая реализация метода множественной двусторонней пристрелки зависит от его возможностей на следующих основных этапах: выбор точек пристрелки и точек сшива решений; выбор параметров пристрелки и длин положительных и отрицательных подынтервалов; регулировка свойств замыкающей системы уравнений; организация итерационных процессов и сведение исходной граничной задачи к совокупности задач Коши [1].

Метод множественной двусторонней пристрелки состоит в следующем.

1. Выбираем точки пристрелки и организовываем вычислительный процесс таким образом, чтобы он развивался в прямом и обратном направлениях.

2. Составляем пристрелочные задачи Коши для прямого и обратного направления:

$$\begin{cases} u' = f(t,u),\ t \in J_{2j-1}^{(+)} = \{t_{2j-1} \le t \le t_{2j}\}, \\ u(t,\, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1}, \quad y_{2j-1} \in R^n; \end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{cases} v' = f(t,v), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)} = \{t_{2j-1} \ge t \ge t_{2j-2}\}, \\ v(t,\, y_{2j-1})\big|_{t=t_{2j-1}} = y_{2j-1},\ y_{2j-1} \in R^n,\ j = \overline{1,\, m}, \end{cases} \tag{8}$$

где t_{2j-1} – точки пристрелки; t_{2j} – точки сшива решений; y_{2j-1} – параметры пристрелки.

3. Для полученных пристрелочных задач Коши вида (7), (8) составляем замыкающую систему уравнений:

$$\begin{cases} u(t_{2j},\, y_{2j-1}) - v(t_{2j},\, y_{2j+1}) = 0, \quad j = \overline{1,\, m}, \\ g(v(t_0,\, y_1),\, u(t_{2m},\, y_{2m-1})) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

4. В операторной форме замыкающая система (9) выглядит следующим образом:

$$H(z) = 0, \tag{10}$$

где $H: R^N \to R^N,\ N = m\,n,\ z = (y_1^T,\, y_2^T,\, ...,\, y_{2m-1}^T)^T.$

Свойства замыкающих систем уравнений (9), (10) зависят от правой части f, исходного уравнения, формы граничных условий, области интегрирования $[a,\, b]$, точек $t \in [0,\, 1]$ и траекторий пристрелки $u(t,\, y_{2j-1})$, $v(t,\, y_{2j-1})$. Эти свойства наиболее полно характеризуются матрицами Якоби для соответствующих отображений H. z – искомое решение замыкающей системы уравнений (9).

5. Теперь искомое решение $y(t)$ исходной граничной задачи представляем формулой

$$y(t) = \begin{cases} v(t,\, y_{2j-1}^*), \quad t \in J_{2j-1}^{(-)}, \\ u(t,\, y_{2j-1}^*), \quad t \in J_{2j-1}^{(+)}, \quad j = \overline{1,\, m}. \end{cases} \tag{11}$$

Матрица Якоби в случае множественной двусторонней пристрелки будет иметь вид

$$\frac{\partial H(z)}{\partial z} = \begin{bmatrix} U_1^{(2)} & -V_3^{(2)} & 0... & 0 \\ 0 & U_3^{(4)} & -V_5^{(4)}... & 0 \\ ... & ... & U_{2m-1}^{(2m-2)} & -V_{2m-1}^{(2m-2)} \\ G_1 & 0 & 0 & G_{2m-1} \end{bmatrix}$$

Блоки матрицы Якоби описываются достаточно полно:

$$\begin{cases} U'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(u) U_{2j-1}(t), \\ U_{2j-1}(t_{2j-1}) = I, \quad t \in J_{2j-1}^{(+)}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\Phi_{2j-1}(u) = \frac{\partial f(t,\, u(t, y_{2j-1}))}{\partial u};\ U_{2j-1}(t) = \frac{\partial u(t, y_{2j-1})}{\partial y_{2j-1}}.$$

Аналогичным образом получаем матрицы-блоки для пристрелочных задач Коши, решаемых в обратном направлении:

$$\begin{cases} V'_{2j-1}(t) = \Phi_{2j-1}(v) V_{2j-1}(t), \\ V_{2j-1}(t_{2j-1}) = I,\ t \in J_{2j-1}^{(-)}. \end{cases}$$

Для решения замыкающей системы уравнений используется модифицированный метод Ньютона, основанный на аппроксимации матрицы Якоби.

В самых сложных случаях нужно гибко использовать свойства решений, полученных в ходе экспериментов [1].

В качестве примера рассмотрим известную задачу, лежащую в основе физической модели, описывающей процесс ограничения столба плазмы:

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = k sh\, k y_1,\ 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

с граничными условиями: $y_1(0) = 0,\ y_1(1) = 1.$

Задача была решена методом множественной двусторонней пристрелки с помощью системы Mathcad-14 [2] для $k = 5$ и $k = 6$. Были получены следующие результаты:

Точки пристрелки	$k = 5$	$k = 6$
$t = 0$	$y_1 = 1{,}55E-08$	$y_1 = 1{,}55E-07$
$t = 0{,}5$	$y_1 = 0{,}025438$	$y_1 = 0{,}029992$
$t = 1$	$y_1 = 1{,}000000$	$y_1 = 1{,}000000$

Заключение. Предложенная методика позволяет решать широкие классы граничных задач с пограничным слоем.

Литература

1. Соловьева И. Ф. Об особенностях решения задачи Троеша // Труды БГТУ. Сер. VI, Физ.-мат. науки и информатика. Вып. X. 2009. С. 312–314.

2. Шушкевич Г. Ч., Шушкевич С. В. Система Mathcad-14: в 2 ч. Минск: Изд-во Гревцова, 2010. Ч. 1. 287 с.

Поступила 15.03.2014