УДК 62.50

А. В. Лапето, ассистент (БГТУ);
И. Ф. Кузьмицкий, кандидат технических наук, доцент (БГТУ)

СИНТЕЗ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ВЛОЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ АЛГОРИТМОВ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Работа посвящена синтезу систем управления с отклоняющимся аргументом на основе теории вложения. Показана возможность применения разложений различного типа для аппроксимации звеньев чистого запаздывания. Рассматривается возможность применения алгоритмов синтеза систем управления необходимой размерности на основе желаемого показателя перерегулирования и нормированного времени переходного процесса.

The paper deals with the synthesis of control systems with deviating argument based on the embedding theory. It goes about the possibility of using of different types of expansions for the approximation of the pure delay units. In the paper, we show how to use algorithms for synthesis of control systems based on the desired dimension of the desired rate of overshoot and normalized transient time.

Введение. В связи с развитием теории автоматического управления и моделирования объектов управления в настоящее время все большее внимание уделяется объектам с запаздыванием [1]. Это явление заключается в том, что с началом изменения сигнала на входе объекта управления выходной сигнал начинает изменяться только через определенный промежуток времени.

Наиболее распространенными примерами объектов управления с запаздыванием могут служить процессы сушки и горения, прокалка металла, ленточные транспортеры, процессы измельчения и в некоторых случаях процессы в химических реакторах [2].

Моделирование процессов, протекающих в объектах управления с запаздыванием, осуществляется с помощью дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Трудности в математическом решении этих уравнений перетекают в проблемы технической реализации систем управления с запаздыванием [3].

Целью этого исследования является аналитический синтез системы управления объектами с запаздыванием по управлению, выходу и состоянию объекта, используя теорию вложения систем.

Основная часть. Так как математические модели представляют большое количество звеньев, иногда с запаздыванием, соединенных между собой и оказывающих влияние не только на выходной параметр процесса, но и на состояние во время протекания этого процесса, достаточно удобно использовать описание таких объектов и процессов в пространстве состояний:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{l}(A_i x(t-\tau_i)) + \sum_{j=0}^{r}(B_j u(t-\theta_j));$$
$$y(t) = \sum_{i=0}^{l}(C_i x(t-\tau_i)), \quad (1)$$

где $\tau_0 = 0$, $0 < \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ – постоянные времена запаздываний в каналах состояния и выхода; $\theta_0 = 0$, $0 < \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_r$ – постоянные времена запаздываний в каналах управления; $i = 0, \ldots, l$; $j = 0, \ldots, r$; $u(t) \in R^s$, $y(t) \in R^m$, $x(t) \in R^n$ – векторы входных, выходных переменных и фазовый вектор объекта управления соответственно. В нашем случае матрицы A_i имеют размер $n \times n$, C_i – $m \times n$, являются числовыми при временах запаздывания τ_i. Матрицы B_j размера $n \times s$ также являются числовыми и соответствуют временам запаздывания по управлению θ_j.

Начальные условия в рассматриваемой задаче примем с учетом задержки прохождения сигналов в объекте управления, т. е. формально будем рассматривать отрицательные моменты времени, предполагая, что в объекте происходили динамические процессы до начального момента времени:

$$x(t) = \phi_x(t),\ t_0 - \tau \le t \le t_0;$$
$$u(t) = \phi_u(t),\ t_0 - \theta \le t \le t_0,$$

где τ, θ – наибольшие времена запаздывания по состоянию и управлению соответственно.

Задачу синтеза системы управления в нашем случае можно разделить на два этапа. На первом этапе стоит задача формирования проматрицы системы управления, а на втором – построение системы в зависимости от варианта ее синтеза.

Формирование проматрицы. В современной теории автоматического управления все более широко используется представление объектов в пространстве состояний [4]. От традиционных методов исследования (частотного, корневых годографов) метод пространства состояний отличают принципиально новые возможности. Этот тип представления объектов управления позволяет, например, судить, достижима ли цель управления (управляемость объекта), определять необходимый состав измерителей (наблюдаемость объекта), синтезировать управление на все входы многомерного объекта и др.

Использование аппарата вложения предполагает представление системы управления в блочно-матричном виде:

$$\Omega(\mathrm{p})\begin{bmatrix} x \\ y \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где $\Omega(p)$ – проматрица системы управления; x_0 – вектор начальных условий;

Для задачи управления системами с запаздыванием матрица $\Omega(p)$ должна быть расширена:

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - \sum_{i=0}^{l} A_i e^{\tau_i p} & 0 & -\sum_{j=0}^{r} B_j e^{\theta_i p} & 0 \\ -\sum_{i=0}^{l} C_i e^{\tau_i p} & I_m & 0 & 0 \\ 0 & K(p) & I_s & -G(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix} \quad (3)$$

Квадратная и всегда полная (невырожденная) матрица $\Omega(p)$ называется проматрицей системы в пространстве состояний.

Представление системы с помощью проматрицы обладает исчерпывающей полнотой. В силу своей полноты проматрица всегда характеризуется двусторонней обратимостью независимо от задания матриц A, B, C системы. Отсюда следует единственность обратной к (3) матрицы или репроматрицы:

$$\Omega^{-1}(p) = \begin{bmatrix} E_x^{\phi_x}(p) & * & * & E_x^{g}(p) \\ E_y^{\phi_x}(p) & * & * & E_y^{g}(p) \\ E_u^{\phi_x}(p) & * & * & E_u^{g}(p) \\ 0 & 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где $E_i^j(p)$ – матричная передаточная функция от параметра i к параметру j.

После выполнения процедур технологии вложения можно получить уравнения, которым должны удовлетворять матричные передаточные функциии предкомпенсатора $G(p)$ и регулятора $K(p)$, для трех случаев: при синтезе по свободной и вынужденной составляющим $E_y^{\phi_x}(p)$ и $E_y^{g}(p)$ соответственно, а также при совместном синтезе по свободной и вынужденной составляющим движения замкнутой динамической системы.

После выбора варианта синтеза и задания желаемых матричных передаточных функций системы они приравниваются к элементам репроматрицы, содержащим комбинации матриц системы, предкомпенсатора и регулятора.

Использование процедуры вложения. Многие математические модели технологических процессов имеют в своем составе звенья запаздывания. В этом случае использование теории вложения для синтеза управления становится труднореализуемым либо невозможным [3].

Применение методов модального управления становится возможным либо при компенсации звеньев запаздывания, либо при их аппроксимации.

При использовании компенсаторов Смита главным недостатком является невысокая робастность системы либо ее отсутствие, так как при изменении модели объекта управления регуляторы и компенсаторы становятся неэффективными.

Компенсатор Смита обладает еще одним важным недостатком в реальных технологических процессах. При использовании компенсаторов не учитывается динамика составных частей объектов управления, которая остается неизменной. Например, если в состав объекта управления входит транспортер, при использовании компенсатора влияние его запаздывания просто не учитывается, однако в реальности сохраняется.

При аппроксимации запаздываний рядами различного типа озвученные недостатки можно устранить, увеличивая порядок разложения.

Формирование передаточных функций желаемого поведения системы. Для формирования проматрицы системы управления необходимо выполнить две операции:

1) исключение звеньев запаздывания из состава системы;

2) формирование передаточных функций желаемого поведения системы.

Согласно механизму теории вложения, размерности модели объекта управления и модели, описывающей желаемое поведение системы управления, должны совпадать.

Рассмотрим алгоритм формирования передаточной функции желаемого поведения системы определенной размерности на основе синтеза систем управления с апериодической реакцией [5].

К передаточным функциям с апериодической реакцией на единичное ступенчатое воздействие относятся такие, у которых перерегулирование находится в диапазоне 0,1–2%, установившаяся ошибка равна нулю и наблюдается высокое быстродействие. Рассмотренный метод применим для синтеза систем управления, имеющих замкнутую передаточную функцию вида

$$W_{\text{з.с}}(p) = \\ = \frac{d^n}{p^n + \alpha d p^{n-1} + \beta d^2 p^{n-2} + \gamma d^3 p^{n-3} + \delta d^4 p^{n-4} + \varepsilon d^5 p^{n-5} + d^n}, \quad (5)$$

$$n \leq 6,$$

где d, α, β, γ, δ, ε – коэффициенты.

Выражение (5) можно нормировать, введя обозначение $\overline{p} = p / d$, и записать

$$W_{\text{з.с}}(\overline{p}) = \frac{1}{\overline{p}^n + \alpha\overline{p}^{n-1} + \beta\overline{p}^{n-2} + \gamma\overline{p}^{n-3} + ... + 1}. \quad (6)$$

Нормированное время переходного процесса определяется по соотношению

$$t_{\text{р}}^{\text{н}} = dt_{\text{р.ж}}, \quad (7)$$

где $t_{\text{р.ж}}$ – желаемое время переходного процесса системы.

Коэффициенты и характеристики переходного процесса нормированной системы с апериодической реакцией приведены в табл. 1.

После формирования передаточной функции определенной размерности с желаемым временем переходного процесса стоит задача корректирования желаемого показателя перерегулирования.

Корректировка показателя перерегулирования. Рассмотрим вариант синтеза желаемой передаточной функции на основе желаемого показателя перерегулирования:

$$\sigma_{\text{жел}} = \frac{y_{\max,\text{ жел}} - y_{\text{уст, жел}}}{y_{\text{уст, жел}}}, \quad (8)$$

где $y_{\max,\text{ жел}}$ и $y_{\text{уст, жел}}$ – желаемые максимальное и установившееся значения переходного процесса системы.

Любая одноканальная система управления может быть описана передаточной функцией вида

$$W(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + ... + b_1 p + b_0}{p^n + a_{n-1} p^{n-1} + a_{n-2} p^{n-2} + ... + a_1 p + a_0} = \\ = \frac{B(p)}{A(p)}, \quad (9)$$

где a_i, b_j – коэффициенты; p – оператор Лапласа.

Рассмотрим реакцию системы управления на единичное ступенчатое воздействие, поданное на вход системы. Согласно теореме разложения, переходная характеристика будет иметь вид

$$y(t) = y(0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{B(p_i)}{A'(p_i)} e^{p_i t}, \quad (10)$$

где p_i – корни характеристического уравнения системы.

На первом этапе формирования желаемой передаточной функции будем рассматривать произвольную передаточную функцию, имеющую одинаковую структуру с передаточной функцией желаемой системы управления.

Пусть система управления описывается произвольной передаточной функцией второго порядка:

$$W(p) = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (11)$$

Изображение реакции такой системы на единичное ступенчатое воздействие, поданное на вход системы

$$y(p) = W(p)\frac{1}{p} = \frac{b_1 p + b_0}{a_2 p^3 + a_1 p^2 + a_0 p}. \quad (12)$$

Очевидно, что один из корней характеристического уравнения должен равняться нулю. Чтобы система управления обладала перерегулированием, также необходимо наличие комплексно сопряженных корней характеристического уравнения системы:

$$p_{1,2} = -\delta \pm j\omega_{\text{св}}; \quad p_3 = 0. \quad (13)$$

Размер мнимой и действительной части этих корней выбирается либо произвольно, либо из соображения обеспечения желаемого времени регулирования и степени затухания. Коэффициенты полинома знаменателя рассчитываются исходя из заданных корней.

Таблица 1

Коэффициенты и параметры переходной характеристики системы

Порядок передаточной функции	Коэффициенты знаменателя передаточной функции системы					Перерегулирование, %	Нормированное время переходного процесса
	α	β	γ	δ	ε		
2	1,82	–	–	–	–	0,10	4,82
3	1,90	2,20	–	–	–	1,65	4,04
4	2,20	3,50	2,80	–	–	0,89	4,81
5	2,70	4,90	5,40	3,40	–	1,29	5,43
6	3,15	6,50	8,70	7,55	4,05	1,63	6,04

В этом случае теорему разложения можно представить в следующем виде:

$$y(t)=\frac{b_0}{a_0}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{B(p_i)}{A'(p_i)}e^{p_1 t}\right)=$$

$$=\frac{b_0}{a_0}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{c_1+jd_1}{c_2+jd_2}e^{(-\delta+j\omega_{\text{св}})t}\right)=$$

$$=\frac{b_0}{a_0}+2\,\mathrm{Re}\left(\frac{F_1}{F_2}e^{(\alpha_1-\alpha_2)}e^{-\delta t}e^{j\omega_{\text{св}}t}\right)=$$

$$=\frac{b_0}{a_0}+2\frac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2));\quad(14)$$

$$F_1=\sqrt{c_1^{\,2}+d_1^{\,2}};\ F_2=\sqrt{c_2^{\,2}+d_2^{\,2}};$$

$$\alpha_1=\mathrm{arctg}\left(\frac{d_1}{c_1}\right);\quad \alpha_2=\mathrm{arctg}\left(\frac{d_2}{c_2}\right),\quad(15)$$

где c_1, c_2, d_1, d_2 – результаты вычисления при подстановке одного из корней в выражение $B(p_i)\,/\,A'(p_i)$.

Возьмем производную по времени от (14):

$$\frac{dy(t)}{dt}=-\delta\cdot 2\frac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))+$$

$$+\,\omega_{\text{св}}\cdot 2\frac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\sin(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2)).\quad(16)$$

Для нахождения момента времени достижения первого локального максимума переходной характеристикой (14) приравняем (16) к нулю и найдем решение на отрезке времени $0<t<3\,/\,\omega_{\text{св}}$. Подставив найденный момент времени в выражение переходной характеристики, можно определить перерегулирование произвольной системы управления.

$$\sigma=\frac{y_{\max}-y_{\text{уст}}}{y_{\text{уст}}}=$$

$$=\frac{\dfrac{b_0}{a_0}+2\dfrac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))-y_{\text{уст}}}{y_{\text{уст}}}.\quad(17)$$

Можно заметить, что в (14) слагаемое $b_0\,/\,a_0$ является выражением для установившегося режима, тогда (17) можно записать в виде

$$\sigma=\frac{2\dfrac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))}{y_{\text{уст}}};\quad(18)$$

Зададим желаемое перерегулирование $\sigma_{\text{жел}}$ для искомой передаточной функции $W_{\text{жел}}(p)$. Найдем отношение значений перерегулирования для желаемой и рассматриваемой систем:

$$\frac{\sigma_{\text{жел}}}{\sigma}=\frac{\dfrac{2\dfrac{F_{1,\text{ жел}}}{F_{2,\text{ жел}}}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_{1,\text{ жел}}-\alpha_{2,\text{ жел}}))}{y_{\text{уст, жел}}}}{\dfrac{2\dfrac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))}{y_{\text{уст}}}}.\quad(19)$$

Для условия сохранения одинакового установившегося режима ($y_{\text{уст, жел}}=y_{\text{уст}}$) необходимо обеспечить выполнение соотношения

$$\frac{b_{0,\text{ жел}}}{a_{0,\text{ жел}}}=\frac{b_0}{a_0}.\quad(20)$$

Из этого выражения следует:

$$\frac{\sigma_{\text{жел}}}{\sigma}=\frac{2\dfrac{F_{1,\text{ жел}}}{F_{2,\text{ жел}}}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_{1,\text{ жел}}-\alpha_{2,\text{ жел}}))}{2\dfrac{F_1}{F_2}e^{-\delta t}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))}.\quad(21)$$

Если для обеспечения желаемого показателя перерегулирования возможно в новой системе оставить прежний знаменатель, тогда сохраняются корни характеристического уравнения и часть выражения для расчета переходной характеристики:

$$\frac{\sigma_{\text{жел}}}{\sigma}=\frac{F_{1,\text{ жел}}\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_{1,\text{ жел}}-\alpha_2))}{F_1\cos(\omega_{\text{св}}t-(\alpha_1-\alpha_2))},\quad(22)$$

а при условии сохранения углов $\alpha_{1,\text{ жел}}=\alpha_1$ имеем

$$\frac{\sigma_{\text{жел}}}{\sigma}=\frac{F_{1,\text{ жел}}}{F_1};\quad(23)$$

Как видно из (23), желаемое перерегулирование можно обеспечить, изменяя $F_{1,\text{ жел}}$:

$$F_{1,\text{жел}}=F_1\frac{\sigma_{\text{жел}}}{\sigma},\quad(24)$$

которое, в свою очередь, зависит от знаменателя передаточной функции

$$F_{1,\text{ жел}}=\sqrt{c_{1,\text{ жел}}^{\;2}+d_{1,\text{ жел}}^{\;2}}.\quad(25)$$

Рассмотрим переходную характеристику в относительных координатах, а для этого примем $b_{0,\text{ жел}}=a_0$:

$$c_{1,\text{ жел}}+jd_{1,\text{ жел}}=b_{1,\text{ жел}}(-\delta+j\omega_{\text{св}})+b_{0,\text{ жел}}=$$

$$=-\delta\cdot b_{1,\text{ жел}}+b_{0,\text{ жел}}+j\omega_{\text{св}}b_{1,\text{ жел}};\quad(26)$$

$$c_{1,\text{ жел}}=-\delta\cdot b_{1,\text{ жел}}+a_0;\quad d_{1,\text{ жел}}=\omega_{\text{св}}b_{1,\text{ жел}}.\quad(27)$$

Подставив полученные выражения в (25), имеем

$$F_{1,\text{ жел}}=\sqrt{(-\delta\cdot b_{1,\text{ жел}}+a_0)^2+(\omega_{\text{св}}b_{1,\text{ жел}})^2};\quad(28)$$

$$F_{1,\,\text{жел}}{}^2 = \delta^2 b_{1,\,\text{жел}}{}^2 + a_0{}^2 - $$
$$-2\delta b_{1,\,\text{жел}} a_0 + \omega_{\text{св}}{}^2 b_{1,\,\text{жел}}{}^2 =$$
$$= b_{1,\,\text{жел}}{}^2(\delta^2 + \omega_{\text{св}}{}^2) - b_{1,\,\text{жел}} 2\delta a_0. \qquad (29)$$

Решив квадратное уравнение (29), можно однозначно определить коэффициент передаточной функции $b_{1,\ \text{жел}}$, обеспечивающий желаемый показатель перерегулирования $\sigma_{\text{жел}}$.

Выбор размерности объекта и порядка разложения. Для выполняемости процедуры вложения необходимо соответствие размерностей исходного объекта и передаточной функции желаемого поведения системы. В случае наличия запаздывания в составе исходного объекта управления, это запаздывание необходимо учитывать при выборе передаточной функции желаемого поведения системы.

Сформировать определенный порядок системы управления можно при разных сочетаниях порядка передаточной функции объекта и порядка аппроксимации запаздывания.

Рассмотрим применение аппроксимации Паде с различным порядком желаемой передаточной функции объекта. Для оценки эффективности использования разложения будем использовать интеграл квадратичного отклонения системы с аппроксимированным запаздыванием и звеном чистого запаздывания. В качестве входного будем использовать единичное ступенчатое воздействие. Величину времени запаздывания зададим в долях от длительности переходного процесса. А так как длительность переходного процесса в нашем случае является нормированной величиной, то и время запаздывания – нормированная величина.

Таблица 2

Значение интеграла квадратичного отклонения

Порядок объекта	2-й	3-й	4-й
Нормированная величина запаздывания	Интеграл квадратичного отклонения		
Аппроксимация Паде второго порядка			
0,01	$1{,}2 \cdot 10^{-14}$	$1{,}2 \cdot 10^{-16}$	$6{,}9 \cdot 10^{-20}$
0,02	$1{,}8 \cdot 10^{-11}$	$1{,}4 \cdot 10^{-14}$	$3{,}2 \cdot 10^{-16}$
0,05	$1{,}6 \cdot 10^{-8}$	$2{,}2 \cdot 10^{-11}$	$8{,}9 \cdot 10^{-13}$
0,10	$5{,}1 \cdot 10^{-7}$	$2{,}9 \cdot 10^{-9}$	$4{,}6 \cdot 10^{-10}$
Аппроксимация Паде четвертого порядка			
0,01	$9{,}2 \cdot 10^{-12}$	$1{,}3 \cdot 10^{-19}$	$8{,}6 \cdot 10^{-27}$
0,02	$9{,}3 \cdot 10^{-14}$	$4{,}3 \cdot 10^{-16}$	$1{,}1 \cdot 10^{-19}$
0,05	$4{,}5 \cdot 10^{-10}$	$7{,}3 \cdot 10^{-14}$	$2{,}9 \cdot 10^{-16}$
0,10	$1{,}9 \cdot 10^{-8}$	$1{,}7 \cdot 10^{-11}$	$1{,}6 \cdot 10^{-13}$

Как видно из табл. 2, увеличение порядка аппроксимации иногда может усиливать отклонение от переходной характеристики звена чистого запаздывания.

Для формирования желаемой передаточной функции шестого порядка можно использовать два варианта:

1) порядок объекта равен четырем, а порядок разложения двум;

2) порядок объекта равен двум, а порядок разложения четырем.

В данном случае предпочтительнее второй вариант, так как отклонение от переходной характеристики звена чистого запаздывания будет меньше.

Заключение. Рассмотрен алгоритм формирования передаточных функций объекта управления исходя из желаемых показателей качества. Согласно этому алгоритму можно одновременно обеспечить несколько показателей качества при формировании желаемой передаточной функции системы управления.

Проведен выбор структуры математической модели желаемого поведения системы управления, состоящей из передаточной функции и аппроксимации звена запаздывания.

Проведена количественная оценка использования аппроксимации звена запаздывания различного порядка в сочетании с передаточной функцией объекта управления. Величина времени запаздывания в этом случае являлась нормированной величиной (относительно продолжительности переходного процесса), что позволило обобщить результаты на многие модели реальных технологических процессов.

Литература

1. Гурецкий Х. Анализ и синтез систем управления с запаздыванием; пер. с пол. М.: Машиностроение, 1974. 328 с.

2. Янушевский Р. Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.

3. Лапето А. В. Анализ методов синтеза систем автоматического управления с запаздыванием // Труды БГТУ. 2011. № 6: Физ.-мат. науки и информатика. С. 78–80.

4. Буков В. Н., Горюнов С. В., Рябченко В. Н. Анализ и синтез матричных линейных систем. Сравнение подходов // Автоматика и телемеханика. 2000. Вып. 11. С. 3–43.

5. Кузьмицкий И. Ф., Кулаков Г. Т. Теория автоматического управления. Минск: БГТУ, 2010. 574 с.

Поступила 20.03.2014