

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**А. А. Андрижиевский**

# **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

*Допущено  
Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов  
учреждений высшего образования по техническим  
и технологическим специальностям*

Минск 2014

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973

A65

**Р е ц е н з е н т ы :**

кафедра ЮНЕСКО энергосбережения и возобновляемых источников энергии Белорусского национального технического университета (доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой *В. Г. Баитовой*);

доктор технических наук, профессор, член-корреспондент НАН Беларуси, заведующий лабораторией дисперсных систем ГНУ «Институт тепло- и массообмена им. А. В. Лыкова» НАН Беларуси *В. А. Бородуля*

*Все права на данное издание защищены. Воспроизведение всей книги или ее части не может быть осуществлено без разрешения учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет».*

**Андрижиевский, А. А.**

A65      **Механика жидкости и газа : учеб. пособие для студентов учреждений высшего образования по техническим и технологическим специальностям / А. А. Андрижиевский. – Минск : БГТУ, 2014. – 203 с.**

ISBN 978-985-530-305-4.

Учебное пособие написано для сопровождения лекционного курса по дисциплине «Механика жидкости и газа».

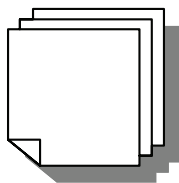
Обучение проводится на доступных примерах и задачах, адаптированных к учебному процессу в учреждениях высшего образования.

Основная цель данного издания – разъяснить базовые понятия статики и кинематики газожидкостных систем, показать их фундаментальный характер, развить практические навыки применения основных положений и законов механики жидкости и газа к анализу эффективности работы и совершенствованию технологических устройств и систем.

**УДК 681.3.06(075.8)**

**ББК 32.937**

**ISBN 978-985-530-305-4**    © УО «Белорусский государственный технологический университет», 2014  
© Андрижиевский А. А., 2014



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Разработка научно обоснованных решений по совершенствованию технологических процессов и технических устройств связана, в частности, с моделированием и оптимизацией лежащих в их основе массообменных процессов. Успешное решение подобных задач предполагает знание методов описания гидрогазодинамических процессов в областях и каналах различной конфигурации.

Настоящее учебное пособие написано для сопровождения лекционного курса «Механика жидкости и газа», но может быть использовано также и для самостоятельного изучения<sup>1</sup>.

Основная цель данного издания – разъяснить базовые понятия статики и кинематики газожидкостных систем, показать их фундаментальный характер, развить практические навыки применения основных положений и законов механики жидкости и газа к анализу эффективности работы и совершенствованию технологических устройств и систем.

Каждый из разделов учебного пособия содержит достаточный объем теоретической информации, примеры решения и контрольные задачи, а также контрольные вопросы для самопроверки.

Основой для освоения предмета являются общенаучные и общепрофессиональные дисциплины – математика, физика, химическая технология и т. д.

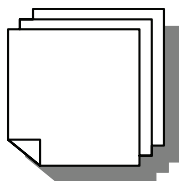
Обучение проводится на доступных примерах и задачах, адаптированных к учебному процессу в учреждениях высшего образования.

В пособии использованы данные и иллюстративные материалы из цитируемой литературы, список которой приведен в конце издания.

Данное пособие может служить руководством для студентов технических и технологических специальностей высших учебных заведений.

---

<sup>1</sup> При подготовке к изданию данного учебного пособия были частично использованы материалы (подразделы 4.2, 4.3, Приложение 3), разработанные ранее автором совместно с Клепацким Петром Михайловичем.



## ВВЕДЕНИЕ

**Предмет механики жидкости и газа.** Само понятие *механика жидкости и газа* включает в себя в рамках данного пособия такие разделы, как «Техническая гидромеханика», «Газовая динамика».

В свою очередь, *техническая гидромеханика* объединяет такие понятия, как *гидравлика*, *аэродинамика*.

Или в графическом виде:



Рис. В.1. Иллюстрация к дисциплине «Механика жидкости и газа» с входящими в ее состав разделами

Расшифруем введенные нами понятия.

*Гидравлика* – наука о законах движения капельных жидкостей (так называемая внутренняя задача – движение жидкостей в ограниченных областях, например, в трубах, каналах и т. д.).

*Аэродинамика* – наука о законах движения газов (так называемая внешняя задача – обтекание газовым потоком твердых тел).

*Газовая динамика* – наука о законах движения газов с большими скоростями.

Знание механики жидкости и газа и, в частности, технической гидромеханики необходимо для решения многочисленных инженерных задач.

Например:

– расчет трубопроводов различного назначения (воздухопроводы, водопроводы, газопроводы, паропроводы и др.);

– конструирование гидравлических и воздуходушных машин (насосы, компрессоры, вентиляторы и пр.);

- проектирование котельных агрегатов, печных и сушильных установок, воздухо- и газоочистных аппаратов, теплообменных аппаратов;
- расчет отопительных и вентиляционных устройств и т. д.

**Исторические данные.** Техническая гидромеханика в своем историческом развитии прошла длинный путь. Некоторые принципы гидростатики (теория равновесия жидкостей) были установлены еще Архимедом в трактате «О плавающих телах» (250 лет до н. э.), а затем возрождены и развиты Галилеем (1564–1642) и Паскалем (1623–1662).

В середине XV в. Леонардо да Винчи (1452–1519) положил начало экспериментальной гидравлике, исследовав в лабораторных условиях некоторые вопросы движения воды в каналах, через отверстия и водосливы. Торичелли (1608–1647) предложил известную формулу для скорости жидкости, вытекающей из отверстия, а Ньютон (1642–1724) высказал основные положения о внутреннем трении в движущихся жидкостях.

В XVIII в. Даниил Бернулли (1700–1782) и Леонард Эйлер (1707–1783) разработали общие уравнения движения так называемой идеальной жидкости и тем самым положили начало теоретической гидромеханике. Однако применение этих уравнений приводило к удовлетворительным результатам лишь в немногих случаях.

В связи с этим с конца XVIII в. многочисленные ученые и инженеры (Шези, Дарси, Базен, Вейсбах и др.) начали опытным путем изучать движение воды и получили значительное число эмпирических формул. Создавшаяся таким путем чисто практическая гидравлика все более отдалялась от теоретической гидродинамики.

Сближение между ними наметилось лишь к концу XIX в., когда сформировались новые взгляды на движение жидкости, основанные на исследовании структуры потока. Тонкие экспериментальные исследования законов внутреннего трения в жидкостях при ламинарном движении (в работах Н. П. Петрова, 1836–1920) и перехода от ламинарного движения к турбулентному (в работах Рейнольдса, 1848–1912) позволили глубже проникнуть в физическую природу гидравлических сопротивлений.

Несколько позже работы Н. Е. Жуковского (1847–1921) и Прандтля (1875–1953) продвинули вперед изучение важнейших

вопросов гидродинамики (в частности, турбулентных потоков), которое завершилось созданием так называемых полуэмпирических теорий турбулентности, получивших широкое практическое применение.

XX в. был ознаменован стремительным ростом авиационной техники, гидротехники, теплоэнергетики, гидромашиностроения, что привело к бурному развитию технической гидромеханики на базе синтеза теоретических и экспериментальных методов исследования.

### *Феноменологический подход в механике жидкости и газа.*

Одной из важнейших особенностей механики жидкости и газа является то, что в основу ее положена так называемая модель сплошной среды. Как известно, для описания среды, состоящей из большого числа молекул в сравнительно малом объеме (жидкости и газы), в физике широко используются два пути: феноменологический и статистический.

Феноменологический путь изучения основывается на простейших допущениях. Оставляя в стороне вопрос о строении вещества, он наделяет его такими свойствами, которые наилучшим образом устанавливают соответствие между наблюдаемыми явлениями и их описанием.

При феноменологическом подходе жидкости и газы рассматриваются как непрерывная среда, способная делиться до бесконечности. В соответствии с такой моделью все параметры жидкости (плотность, вязкость и др.) изменяются непрерывно от точки к точке. Это позволяет применять при анализе движения сред математический аппарат дифференциального и интегрального исчисления, хорошо разработанный для непрерывных функций.

Понятие о частицах жидкости, которым широко оперирует механика жидкости и газа, неразрывно связано с понятием о физически бесконечно малом объеме. Это объем, размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с характерными размерами объекта, но он содержит в себе настолько много молекул, что его средние характеристики становятся устойчивыми по отношению к изменению объема. Таким образом, принятая в механике жидкости и газа процедура «стягивания объема в точку» означает, что он стремится не к нулю, а к физически бесконечно малому объему.

Все законы механики жидкости и газа справедливы до тех пор, пока справедлива модель сплошной среды. Количественно это можно оценить по величине числа Кнудсена:

$$\text{Kn} = l / L ,$$

где  $l$  – длина свободного пробега молекул;  $L$  – характерный размер течения.

Принято считать, что законы механики жидкости справедливы, если  $\text{Kn} < 0,01$ .

**Теория напряженного состояния (общие рассуждения).** Рассмотрим *напряженное состояние* жидкости, находящейся в равновесии. Прежде чем определить это понятие, заметим, что общие теоремы о равновесии сил применимы также и к жидким телам.

Это следует из так называемого *принципа отвердевания*, сущность которого заключается в следующем.

Если в какой-либо подвижной системе, находящейся в равновесии, сделать отдельные ее части неподвижными, то от этого равновесие всей системы не нарушится. Следовательно, в случае жидкости, находящейся в равновесии, можно всегда вообразить, что некоторая ее часть отвердела, от этого равновесие всей жидкости не нарушится, к отвердевшей же части можно применить теоремы о равновесии твердых тел<sup>2</sup>. Однако для исследования равновесия жидкости не обязательно прибегать к представлению об отвердевании.

Прежде всего, напомним, что любые силы представляют собой взаимодействие между массами. Если, например, масса  $m_1$  притягивает к себе другую массу  $m_2$  с силой  $F$ , то с такой же силой масса  $m_2$  притягивает к себе массу  $m_1$ . Следовательно, обе силы направлены прямо противоположно друг другу (закон Ньютона о равенстве действия и противодействия).

В системе масс, каким-нибудь образом выделенной среди других масс, следует различать два вида сил:

- *внутренние силы*, действующие между массами, принадлежащими к рассматриваемой системе;
- *внешние силы*, действующие между каждой массой рассматриваемой системы и массами, находящимися вне системы.

---

<sup>2</sup> Применяя принцип отвердевания, следует иметь в виду не физическое отвердевание, а воображаемое, идеальное отвердевание без всякого перемещения частиц и изменения объема.

*Теорема № 1*

Во всей совокупности сил, действующих в рассматриваемой системе масс, внутренние силы входят всегда *попарно* в виде равных и прямо противоположных сил, а внешние силы – всегда *в одиночку*. При суммировании (векторном или координатном) всех сил внутренние силы всегда попарно уничтожаются, и остаются только внешние силы.

Следовательно, для равновесия системы необходимо, чтобы сумма сил, приложенных к каждой отдельной массе системы, была *равна нулю*.

При сложении таких сумм для всех масс системы остается, согласно сказанному выше, только сумма всех внешних сил, а так как каждая отдельная из сложенных сумм при равновесии равна нулю, то *равна нулю и сумма всех внешних сил*. Если вычисления ведутся в координатах, то эта теорема записывается в виде трех уравнений:

$$\sum X = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$\sum Z = 0,$$

где  $X, Y, Z$  – проекции внешних сил на оси  $x, y, z$ .

*Теорема № 2*

Совершенно аналогичная теорема существует и для моментов внешних сил: *сумма всех этих моментов при равновесии равна нулю*.

Как для упругих твердых, так и для жидких тел важно знать напряженное *состояние внутри тела*, т. е. внутренние силы, действующие между мельчайшими частицами тела во всех направлениях и во всех точках тела. Однако в общем случае приходится ограничиваться указанием только среднего напряженного состояния.

Но как же вообще можно получить представление о внутренних силах, если наши теоремы об условиях равновесия говорят только о внешних силах?

Для этого *необходимо сделать внутренние силы внешними*. Это вполне возможно следующим образом. Вообразим некоторое тело, к которому приложены внешние силы (на рис. В.2 они обозначены стрелками).



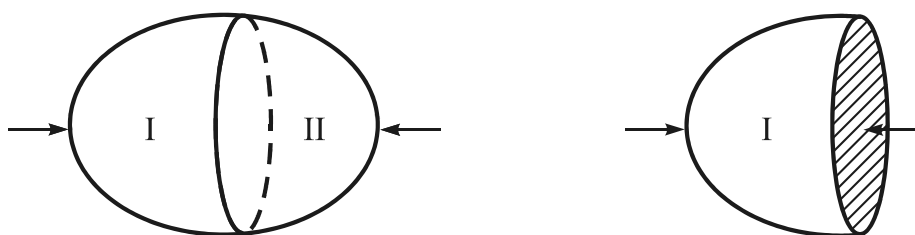


Рис. В.2. Метод сечений

Мысленно разрежем его на две части и одну из частей, например, часть I, примем за нашу систему масс. Тогда все силы, с которыми частицы части II действовали на частицы части I и которые раньше были внутренними силами, теперь будут внешними силами. Эти силы распределены по площади сечения, и сумма их должна быть такова, чтобы выделенная часть тела продолжала оставаться в равновесии. Следовательно, результирующая этих сил должна быть равна и прямо противоположна результирующей внешних сил, действующих на выделенную часть тела.

Таким образом, мы получили вполне определенное и однозначное представление о результирующей внутренних сил в проведенном сечении тела<sup>3</sup>. Результирующая внутренних сил, отнесенная к единице площади сечения, называется *напряжением*. Более подробно мы познакомимся с этим понятием в следующих главах.

В рассмотренном выше примере, разделив найденную результирующую внутренних сил на площадь сечения, мы получим, очевидно, среднее напряжение в сечении. Вообще же на различных площадках сечения напряжение может быть разным. Напряжение на площадке, подобно силе, является вектором.

Из многочисленных и важных теорем о напряженном состоянии приведем следующую: *если в трех сечениях, образующих друг с другом трехгранный угол, напряжения известны, то напряжения во всех других сечениях могут быть определены.*

Для доказательства поступим следующим образом. Пересечем трехгранный угол четвертой плоскостью, именно той плоскостью, в которой требуется определить напряжение (рис. В.3).

<sup>3</sup> Мы получили бы совершенно такой же результат, если бы вместо части I тела рассмотрели часть II, только теперь результирующая внутренних сил была бы приложена к части II и направлена в прямо противоположную сторону.

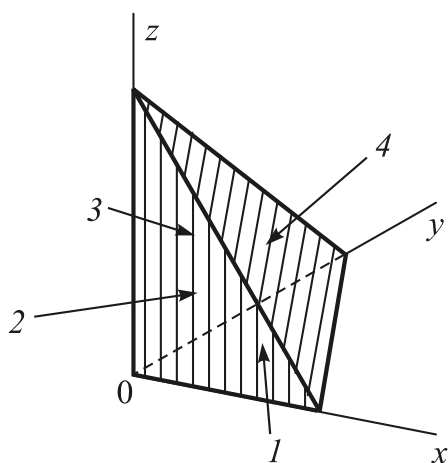


Рис. В.3. Равновесие тетраэдра

Эта плоскость образует вместе с первыми тремя тетраэдр. Силы  $1, 2, 3$ , действующие на грани, напряжения на которых известны, мы получим, если умножим заданные напряжения на площади соответствующих граней. Имеется только одна сила  $4$ , которая уравнивает сумму сил  $1 + 2 + 3$ . Эта сила, разделенная на площадь соответствующей грани, и дает искомое напряжение. Для выполнения вычислений удобнее всего совместить заданные сечения с координатными плоскостями (рис. В.3).

Теперь, после того как мы разъяснили понятие напряжения, мы можем дать более точное определение напряженному состоянию — «напряженным состоянием в какой-либо точке называется совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через заданную точку».

*Как можно выразить напряжение в точке?*

Проведем мысленно внутри рассматриваемой массы поверхность, разделяющую объем массы на две части (рис. В.4).

На элементарной площади  $\Delta\omega$  разделяющей поверхности действует сила  $\Delta F$ . Площадь  $\Delta\omega$  может быть стянута в точку  $M$  с координатами  $x, y, z$ . В этом случае как площадь поверхности  $\Delta\omega$ ,

так и сила  $\Delta F$  стремятся к нулю. Отношение силы  $\Delta F$  к площади поверхности  $\Delta\omega$  стремится к пределу

$$\lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta F}{\Delta\omega} \right| = \sigma.$$

Значение этого предела называется *напряжением в точке* с координатами  $x, y, z$ .

Не вдаваясь в подробности теории напряженного состояния, упомянем только, что напряженное состояние

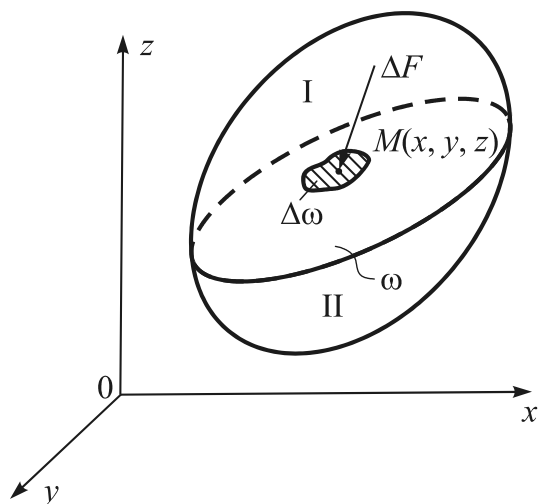


Рис. В.4. К определению напряжения в точке

в точке может быть связано с некоторым эллипсоидом, так называемым *эллипсоидом напряжений*.

В каждом эллипсоиде имеются три взаимно перпендикулярные оси. Этим осям эллипсоида, называемым *главными осями*, соответствуют в напряженном теле такие три взаимно перпендикулярных сечения, в которых напряжения нормальны к сечениям.

Эти напряжения называются *главными напряжениями*, а соответствующие направления – *главными направлениями напряженного состояния*.

**Давление жидкости.** Напряженное состояние в жидкости, находящейся в равновесии, особенно простое. Сопротивление жидкости деформации, т. е. перемещению ее частей относительно друг друга, имеет некоторое сходство с трением. Если при соприкосновении двух твердых тел трение отсутствует, то давление одного тела на другое в плоскости их соприкосновения должно быть обязательно перпендикулярно к этой плоскости; следовательно, при скольжении вдоль плоскости соприкосновения не должно совершаться никакой работы. Совершенно аналогично проявляет себя и отсутствие в жидкости сопротивления деформации: *в этом случае напряжение внутри жидкости или, как принято говорить, давление жидкости, должно быть везде перпендикулярно к поверхности того сечения, на которое оно действует*. Это свойство давления жидкости может рассматриваться как *определение жидкости* эквивалентное определению, которое было сделано раньше.

При помощи простых соображений из указанного свойства давления можно вывести другое важное свойство – *давление в одной и той же точке жидкости одинаково во всех направлениях* (точнее говоря, одинаково во всех сечениях, проведенных через рассматриваемую точку).

Для определения такого напряженного состояния, которое принято называть *статическим напряженным состоянием*, достаточно указания одного – единственного числа – давления  $p$ . Согласно сказанному выше это число означает силу, действующую на единицу площади сечения.

Величина, равная модулю напряжения, в гидромеханике называется *статическим давлением* в точке и обозначается буквой  $p$ :

$$p = [\sigma].$$

Статическое давление является скалярной величиной (в отличие от напряжения). Сила статического давления  $P$ , равная давлению, умноженному на площадь площадки к которой оно отнесено – величина векторная, т. е. имеющее направление действия.

*Первое свойство статического давления* – сила гидростатического давления направлена по внутренней нормали к площадке, которая воспринимает это давление.

Направление действия силы гидростатического давления по внутренней нормали доказывается свойством жидкости или газа не оказывать сопротивления растягивающим усилиям.

*Второе свойство статического давления* – величина статического давления в точке не зависит от ориентации (от угла наклона) площадки.

Простейшим прибором для измерения статического давления в сосуде с жидкостью является пьезометр, представляющий собой вертикальную открытую сверху стеклянную трубку, присоединяемую к сосуду.

Пьезометр измеряет избыточное (свыше атмосферного) давление на поверхности жидкости в сосуде.

Для измерения давления применяются следующие приборы:

- барометры (для измерения атмосферного давления);
- манометры (для измерения избыточного – свыше атмосферного – давления);
- вакуумметры (для измерения вакуума – давления ниже атмосферного);
- дифференциальные манометры (для измерения разности давления в двух точках).

Применение *манометров* и, в частности, жидкостных манометров привело к установлению особого рода единиц для давления, широко распространившихся в практике.

В самом деле, давление жидкости можно условиться измерять непосредственно высотой того столба жидкости, который уравновешивается этим давлением. Поскольку жидкостные манометры могут наполняться разными жидкостями с разными удельными весами, то при таком способе измерения давления необходимо каждый раз указывать название жидкости.



Так, например, говорят о *миллиметрах водяного столба*, *ртутного столба* (сокращенно: вод. ст., рт. ст.). Как легко подсчитать, 1 мм вод. ст. =  $1 \text{ кг/м}^2 = 10^4 \text{ кг/см}^2$  (в самом деле, столб воды с площадью основания в  $1 \text{ м}^2$  и высотой 1 мм имеет объем в 1 л и весит 1 кг).

Первое соотношение ( $1 \text{ мм вод. ст.} = 1 \text{ кг/м}^2$ ) особенно легко запоминается. Это привело к тому, что единица давления  $1 \text{ кг/м}^2$  получила очень широкое распространение в технике.

В тех случаях, когда требуется высокая точность отсчета высоты столба жидкости, вода как жидкость для измерения давления мало пригодна, так как она легко и неравномерно прилипает к стенкам стеклянной трубки. Значительно удобнее жидкости, растворяющие жир (алкоголь, толуол, ксилол и т. д.).

Для измерения значительных разностей давлений удобнее всего применять ртуть, которая в чистом виде в не слишком узких трубках даст очень удобный для отсчета мениск.

На применении *барометра* основана единица давления, называемая *физической атмосферой*. Средняя высота столба ртути в барометре на уровне моря составляет круглым числом 760 мм. Давление воздуха, соответствующее этому показанию барометра при температуре ртути  $0^\circ\text{C}$ , условились считать нормальным и дали ему название *физической атмосферы*.

Прилагательное «физическая» добавлено к «атмосфере» для того, чтобы устранить смешивание с технической атмосферой, равной  $1 \text{ кг/см}^2$  и обычно применяемой в технике.



Удельный вес ртути при  $0^\circ\text{C}$  равен  $13,595 \text{ г/см}^3$ , следовательно,  $1 \text{ см}^3$  ртути весит 13,595 г. Поэтому столбу ртути высотой 76 см соответствует давление воздуха, равное  $1033,2 \text{ г/см}^2$ . Если наполнить барометр вместо ртути водой, то высота столба, уравнивающего давление, равное  $1,0332 \text{ кг/см}^2$ , т. е. одной физической атмосфере, будет составлять 10,332 м.

Из определения физической атмосферы следует, что ее величина в известной мере зависит от притяжения Земли. Для того чтобы освободиться от этих несколько произвольных требований введена новая единица давления, связанная с системой единиц CGS и равная  $10^6 \text{ дин/см}^2$ . Эта единица давления получила название *бар*. Одному бару при нормальной тяжести соответствует ртутный столб высотой 750,06 мм.



## Контрольные вопросы по разделу

1. Определите предмет и состав механики жидкости и газа.
2. Обозначьте основные этапы развития теоретической и экспериментальной гидромеханики и газодинамики.
3. Что понимается под «феноменологическим» описанием жидкости и газа?
4. Какие силы называются внутренними, а какие внешними?
5. Как вы понимаете напряженное состояние выделенного объема капельной жидкости?
6. Назовите содержание основных теорем теории напряженно-го состояния.
7. Что такое «эллипсоид напряжений»?
8. Как можно определить понятие давления? Какова его размерность?
9. В чем сходство и различие понятий «напряжение» и «давление»?
10. Как классифицируются приборы для измерения давления по принципу действия?
11. Какие единицы используются для измерения давлений?



# СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗА

## 1.1. Свойства жидкостей (общие)

Жидкость, как и всякое физическое тело, имеет молекулярное строение, т. е. состоит из молекул, расстояние между которыми во много раз превосходит размеры самих молекул, т. е. жидкость, строго говоря, имеет прерывистую структуру.

В технической гидромеханике при решении большинства задач принимают жидкость как сплошную (непрерывную) среду ввиду чрезвычайной малости не только самих молекул, но и расстояний между ними по сравнению с объемами, рассматриваемыми при изучении равновесия и движения жидкости. Таким образом, вместо самой жидкости изучается ее модель, обладающая свойством непрерывности (фиктивная сплошная среда – *континуум*).

Гипотеза о непрерывности или сплошности жидкой среды упрощает исследование, поскольку позволяет рассматривать все механические характеристики жидкой среды (скорость, плотность, давление и т. д.) как функции координат точки в пространстве и времени.

Интересуясь, например, вопросом, насколько велики в данной точке давление внутри жидкости или скорость ее движения, практически важно знать давление и скорость в некотором весьма малом объеме, а не строго именно в данной геометрической точке. Этот объем действительно может быть очень малым. Даже в таком малом объеме, как кубик со стороной 0,001 мм, находится  $2,7 \cdot 10^7$  молекул. Этот пример показывает, что замена реальной жидкости ее моделью в виде сплошной жидкой среды не приводит к погрешностям до тех пор, пока не рассматривается движение молекул.

Основные законы, используемые в технической гидромеханике, те же, что и в механике твердых тел. Однако применение этих законов к задачам гидромеханики отличается некоторыми особенностями вследствие различия свойств жидкостей и твердых тел.

Поэтому изучение технической гидромеханики целесообразно начать с определения и оценки основных свойств жидкостей.

***Жидкость и твердые тела.*** Жидкости отличаются от твердых тел легкой подвижностью своих частиц. Для изменения формы твердого тела к нему необходимо приложить силы конечной, иногда весьма значительной величины. Между тем для медленной деформации жидкости достаточны самые ничтожные силы, которые в предельном случае бесконечно малой деформации равны нулю.

На основании этого мы можем дать следующее определение жидкости: *жидкостью называется такое тело, в котором в состоянии равновесия всякое сопротивление деформации равно нулю.*

Однако при быстрой деформации жидкость, подобно твердому телу, оказывает сопротивление деформации. Но как только движение жидкости прекращается, это сопротивление очень быстро исчезает. Свойство жидкостей оказывать сопротивление деформации называется *вязкостью*.

Кроме обычных, легко подвижных жидкостей, существуют очень вязкие жидкости, у которых сопротивление деформации весьма значительно, но в состоянии покоя оно по-прежнему равно нулю. По мере увеличения вязкости жидкость становится все более похожей на твердое тело, однако нельзя провести резкой границы между жидкостью с очень большой вязкостью и твердым телом: некоторые вещества при быстрой деформации ведут себя как твердые тела, а при медленной – как жидкости. К таким веществам принадлежит, например, асфальт.

Согласно кинетической теории материи, мельчайшие частицы всех тел (атомы и молекулы) находятся в непрерывном движении; кинетическая энергия этого движения проявляется в теплоте. С точки зрения этой теории, жидкости отличаются от твердых тел тем, что в них отдельные частицы более или менее часто меняются местами с соседними частицами, в то время как в твердых телах каждая частица занимает в пространстве вполне определенное положение, правда, совершая около него небольшие колебания.

Другим свойством жидкостей является их большое сопротивление изменению объема. Никаким способом невозможно сжать один литр воды так, чтобы он поместился в сосуде емкостью в пол-литра. Обратное, если налить литр воды в сосуд емкостью в два литра и выкачать из последнего воздух, то вода по-прежнему



будет занимать только половину сосуда. Однако в некоторой мере вода при больших давлениях сжимается; при давлении около 1000 атм это сжатие достигает 5% первоначального объема. Аналогичным образом ведут себя и другие жидкости.

***Жидкость и газ.*** Жидкости по своим механическим свойствам разделяются на два класса:

- мало сжимаемые (капельные);
- сжимаемые (газообразные).

С позиций физики капельная жидкость значительно отличается от газа, с позиций механики жидкости различие между ними не так велико, и законы, справедливые для капельных жидкостей, могут быть приложены также и к газам, когда сжимаемостью последних можно пренебречь.

В связи с отсутствием специального термина, который обозначал бы жидкость в широком смысле слова, в дальнейшем мы будем пользоваться терминами «капельная жидкость» (мало сжимаемая), «сжимаемая жидкость» (газ) и «жидкость», применяя последний термин в широком смысле, охватывающем как капельную жидкость, так и газ. Другими словами, под жидкостью будем понимать всякую среду, обладающую свойством текучести.

*Капельные жидкости* обладают вполне определенным объемом, который практически не изменяется под действием сил.

*Газ* (сжимаемая жидкость), занимая все предоставленное им пространство, может значительно изменять объем, сжимаясь и расширяясь под действием сил.

Таким образом, капельные жидкости легко изменяют форму (в отличие от твердых тел), но с трудом изменяют объем, а газы легко изменяют как объем, так и форму.

Основные свойства жидкостей, существенные при рассмотрении задач технической гидромеханики – *плотность* и *вязкость*. В некоторых случаях (при образовании капель, течении тонких струй, образовании капиллярных волн и др.) имеет значение также *поверхностное натяжение* жидкостей.

***Изменение агрегатного состояния (фазовые переходы).*** В технической гидромеханике, как уже отмечалось, жидкость обычно заменяется моделью в виде непрерывной среды. Однако иногда приходится сталкиваться с нарушением сплошности (непрерывности)

жидкости. В таких случаях можно, как правило, выделить границы раздела, отделяющие одну непрерывную среду (фазу) от другой; при переходе через такие границы свойства жидкости меняются скачкообразно.

Системы, состоящие из нескольких фаз, называются многофазными (полифазными). Простейшим случаем многофазной системы являются двухфазные системы.

Например, «газ – твердые частицы» (пневмотранспорт, пылеулавливание); «газ – капли жидкости» (распылители, сушилки, газовое охлаждение, испарение); «жидкость – пузырьки пара» (испарители, эрлифты).

Во всех этих примерах первая из указанных фаз (основная) условно называется *непрерывной*, вторая – *дискретной*.

Количество дискретной фазы в непрерывной определяется объемной концентрацией. Обычно за объемную концентрацию  $\beta$  принимается отношение объема, занятого дискретной фазой  $W_1$ , к общему объему многофазной системы  $W_\Sigma$ :

$$\beta = \frac{W_1}{W_\Sigma}.$$

При некоторых условиях многофазные системы могут переходить в однородные (гомогенные), и наоборот.

Например, в воде при обычных условиях находится растворенный воздух. При снижении давления и повышении температуры воздух начинает выделяться, образуя воздушные пузыри значительных размеров, иными словами, наблюдается переход однофазной системы (вода) к двухфазной (вода + газ).

## 1.2. Плотность и удельный вес

Плотностью жидкости  $\rho$  называется ее масса  $m$ , заключенная в единице объема  $W$ :

$$\rho = \frac{m}{W}. \quad (1.1)$$



Плотность пресной воды при температуре 4°C равна 1000 кг/м<sup>3</sup>.

Величина обратная плотности называется удельным объемом:

$$v = \frac{1}{\rho}.$$

Если жидкость неоднородна, то формула (1.1) определяет лишь среднюю плотность жидкости. Для определения плотности в данной точке следует пользоваться формулой

$$\rho = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta W}. \quad (1.2)$$

Среднюю плотность многофазной системы можно представить в следующем виде:

$$\rho = \beta \rho_2 + (1 - \beta) \rho_1,$$

где  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – плотности соответственно дискретной и непрерывной фаз.

Вес жидкости  $G$ , приходящийся на единицу объема  $W$ , называется удельным весом:

$$\gamma = \frac{G}{W}. \quad (1.3)$$



Удельный вес воды при температуре 4°C равен 9810 Н/м<sup>3</sup> (1000 кгс/м<sup>3</sup>).

Если жидкость неоднородна, формула (1.3) определяет только средний удельный вес жидкости. Для определения удельного веса жидкости в данной точке применяется формула

$$\gamma = \lim_{\Delta W \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta W}.$$

Плотность и удельный вес связаны между собой известным соотношением

$$\lambda = \rho g,$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Относительным удельным весом жидкости (или относительным весом)  $\delta$  называется отношение удельного веса данной конкретной жидкости к удельному весу воды при температуре 4°C:

$$\delta = \gamma_{\text{ж}} / \gamma_{\text{в}}.$$

В отличие от удельного веса, относительный удельный вес представляет собой отвлеченную (безразмерную) величину, численное значение которой не зависит от выбранной системы единиц измерения.

Плотность, а следовательно, удельный объем, удельный и относительный удельный вес жидкостей и газов меняются с изменением давления и температуры, т. е. являются функцией давления и температуры

$$\rho = f(p, T).$$

Данная зависимость называется *уравнением состояния* жидкости или газа.

### 1.3. Сжимаемость и температурное расширение

#### *Сжимаемость и температурное расширение жидкостей.*

Как указывалось выше, плотность и удельный объем жидкости и газа, в общем случае, являются функцией давления и температуры. Вместе с тем, на практике довольно часто реализуются условия, когда с достаточной точностью можно принять постоянным один из этих параметров.

Сжимаемость капельных жидкостей под действием давления характеризуется коэффициентом объемного сжатия, который представляет собой относительное изменение объема жидкости на единицу изменения давления:

$$\beta_W = -\frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial p} \Big|_{T = \text{const}}, \quad (1.4)$$

где  $W$  – первоначальный объем жидкости;  $\partial W$  – изменение этого объема при увеличении давления на величину  $\partial p$ .

Коэффициент объемного сжатия имеет размерность  $\text{Па}^{-1}$ . Знак «минус» в формуле (1.4) обусловлен тем, что положительному приращению давления  $p$  соответствует отрицательное приращение (т. е. уменьшение) объема жидкости  $W$ .

Величина, обратная коэффициенту объемного сжатия, называется модулем упругости жидкости:

$$E_0 = \frac{1}{\beta_W},$$

где  $E_0$  – модуль упругости;  $\beta_W$  – коэффициент объемного сжатия.

Коэффициент объемного сжатия капельных жидкостей мало меняется при изменении температуры и давления.



В среднем для воды  $E_0$  равен  $2 \cdot 10^9$  Па и, соответственно,  $\beta_W = 1 / (2 \cdot 10^9) \text{ Па}^{-1}$ .

Во многих случаях, встречающихся в практической деятельности, сжимаемостью воды можно пренебрегать, считая удельный вес и плотность ее не зависящими от давления.

Температурное расширение капельных жидкостей характеризуется коэффициентом температурного (теплового) расширения, выражающим относительное увеличение объема жидкости при увеличении температуры на 1 град:

$$\beta_T = \frac{1}{W} \frac{\partial W}{\partial T} \Big|_{p = \text{const}}, \quad (1.5)$$

где  $\partial W$  – изменение этого объема при повышении температуры на величину  $\partial T$ .



При температуре от 10 до 20°C и давлении  $10^5$  Па можно приближенно принимать  $\beta_T \approx 0,0001^\circ\text{C}$ .

Если приближенно считать, что плотность не зависит от давления, а определяется только температурой, то из выражений (1.1) и (1.5) можно найти приближенное соотношение для расчета изменения плотности капельных жидкостей с изменением температуры:

$$\rho_T = \rho_0 \frac{1}{1 + \beta_T (T - T_0)},$$

где  $T_0$  – температура жидкости, к которой относится плотность  $\rho_0$ .

Способность жидкостей менять плотность (и удельный вес) при изменении температуры широко используется для создания естественной циркуляции в котлах, отопительных системах, для удаления продуктов сгорания и т. д.

**Сжимаемость и температурное расширение газов.** В отличие от капельных жидкостей газы характеризуются значительной

сжимаемостью и высокими значениями коэффициента температурного расширения. Зависимость плотности газов от давления и температуры устанавливается уравнением состояния.

Наиболее простыми свойствами обладает газ, разреженный настолько, что взаимодействие между его молекулами может не учитываться – так называемый совершенный (идеальный) газ. Для совершенных газов справедливо уравнение Клайперона, позволяющее определять плотность газа при известных значениях давления и температуры, т. е.

$$\rho = \frac{p}{RT},$$

где  $p$  – абсолютное давление;  $R$  – удельная газовая постоянная, различная для разных газов, но не зависящая от температуры и давления<sup>4</sup>;  $T$  – абсолютная температура.

Поведение реальных газов незначительно отличается от поведения совершенных газов и для них в широких пределах можно пользоваться уравнениями состояния совершенных газов. Отклонения делаются заметными только при сильном сжатии газа и в особенности тогда, когда температура газа настолько понижена, что начинается сжижение. Указанные отклонения подробно изучаются в термодинамике.

В технических расчетах плотность газа обычно приводят к нормальным физическим условиям ( $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $p = 101\,325$  Па) или к стандартным условиям ( $t = 20^\circ\text{C}$ ,  $p = 101\,325$  Па).

При других условиях плотность воздуха определяется по формуле

$$\rho = \rho_0 \frac{p}{p_0} \frac{T_0}{T}.$$



Для сухого атмосферного воздуха  $\chi = 1,405$ .

При сжатии газа выделяется теплота. В термодинамике доказывается, что в тех случаях, когда при сжатии или расширении газа не происходит никакого теплообмена с окружающей средой, что имеет место, очевидно, при очень быстром сжатии или расширении, следует пользоваться уравнением:

<sup>4</sup> Для воздуха  $R = 287$  Дж/(кг · К).

$$pW^\chi = p_0W_0^\chi,$$

где  $\chi$  равно отношению удельной теплоемкости  $c_p$  при постоянном давлении к удельной теплоемкости  $c_v$  при постоянном объеме, т. е.

$$\chi = \frac{c_p}{c_v}.$$

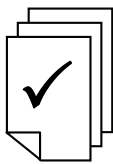
Сжатие и расширение газа, происходящие согласно приведенному выше уравнению, называются *адиабатическими*.

Таким образом, адиабатическое сжатие связано с нагреванием газа, а адиабатическое расширение – с охлаждением газа.

Изложенные выше свойства газов могут быть очень хорошо объяснены, если предположить, что мельчайшие частицы газа находятся в очень быстром непрерывном движении, причем все время происходят столкновения частиц между собой и со стенкой сосуда, заключающего газ. При таком предположении давление есть не что иное, как суммарное действие ударов частиц, а температура эквивалентна кинетической энергии частиц.

В самом деле, температура при сжатии повышается потому, что скорость частиц газа, ударяющихся о двигающуюся им навстречу стенку, после отражения частиц увеличивается.

Ниже приведены примеры использования коэффициентов объемного сжатия  $\beta_W$  и температурного расширения  $\beta_T$  при решении практических задач.



**Пример 1.1.** В вертикальном цилиндрическом резервуаре диаметром  $d = 4$  м хранится 100 т нефти, плотность которой при  $0^\circ\text{C}$   $\rho_0 = 850$  кг/м<sup>3</sup>.

Определить изменение уровня в резервуаре при изменении температуры нефти от 0 до  $30^\circ\text{C}$ .

Расширение резервуара не учитывать. Коэффициент теплового расширения нефти принять равным  $\beta_T = 0,00072$  град<sup>-1</sup>.

*Решение.* Объем, занимаемый нефтью при температуре  $0^\circ\text{C}$ :

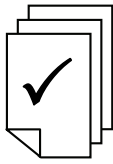
$$W = m / \rho_0 = 100 \cdot 10^3 / 850 = 118 \text{ м}^3.$$

В соответствии с формулой (1.5) изменение объема при изменении температуры на  $30^\circ\text{C}$ :

$$\Delta W = \beta_T W \Delta T = 0,00072 \cdot 118 \cdot 30 = 2,55 \text{ м}^3.$$

Изменение уровня нефти в резервуаре:

$$h = \frac{4\Delta W}{\pi d^2} = 2,554 / (3,14 \cdot 6) = 0,203 \text{ м}.$$



**Пример 1.2.** Винтовой пресс Рухгольца (рис. 1.1) для тарировки пружинных манометров работает на масле с коэффициентом сжимаемости  $\beta_w = 0,638 \cdot 10^{-9} \text{ Па}^{-1}$ .

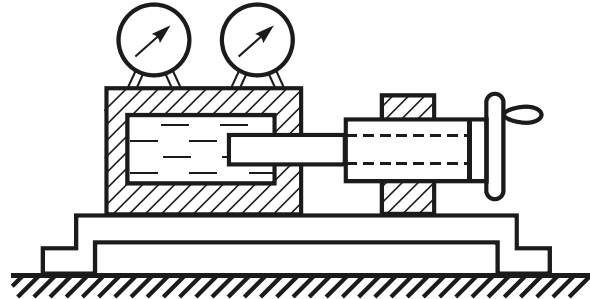


Рис. 1.1. К примеру 1.2

Определить, на сколько оборотов надо повернуть маховик винта, чтобы поднять давление на  $9,8 \cdot 10^4 \text{ Па}$ , если начальный объем рабочей камеры пресса  $W = 0,628 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \text{ м}^3$ , диаметр плунжера 20 мм, шаг винта  $h = 2 \text{ мм}$ . Стенки рабочей камеры считать недеформируемыми.

*Решение.* Для того чтобы давление повысилось на  $\Delta p$ , необходимо, чтобы объем  $W$  жидкости в рабочей камере прессы уменьшился (см. формулу (1.4)) на величину

$$\Delta W = \beta_w W \Delta p = 0,638 \cdot 10^{-9} \cdot 0,628 \cdot 10^3 \cdot 9,8 \cdot 10^4 = 3,93 \cdot 10^{-8} \text{ м}^3.$$

Длина  $l$ , на которую должен продвинуться плунжер:

$$l = \frac{4\Delta W}{\pi d^2} = \frac{4 \cdot 3,93 \cdot 10^{-8}}{3,14 \cdot (2 \cdot 10^{-2})^2} = 1,25 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

При этом маховик винта необходимо повернуть на  $n = l/h = 0,125/2 \approx 0,06$  оборота.

## 1.4. Вязкость

Все реальные жидкости обладают определенной вязкостью, которая проявляется в виде внутреннего трения при деформации. Некоторые жидкости, например, мед, глицерин, тяжелые масла и др., обладают особенно большой вязкостью. Для того чтобы понять, в чем заключается сущность вязкости, рассмотрим следующий простой пример.

Пусть между двумя параллельными пластинками находится жидкость и пусть одна из этих пластинок (верхняя) движется



в своей плоскости со скоростью  $\vec{V}$ , а другая (нижняя) – покоится (рис. 1.2).

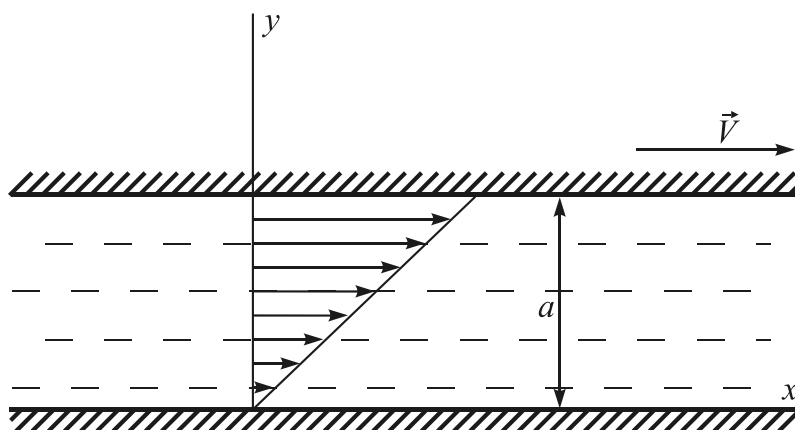


Рис. 1.2. Движение вязкой жидкости между пластинами

Тогда под действием вязкости в жидкости устанавливается такое состояние движения, при котором слои, непосредственно прилегающие к пластинкам, имеют одинаковую с ними скорость («прилипают» к пластинкам), а промежуточные слои скользят друг по другу и обладают скоростями  $v$ , пропорциональными расстоянию от неподвижной пластинки.

Следовательно, скорость слоя, находящегося на расстоянии  $y$  от нижней пластинки, определяется по формуле

$$v = V \frac{y}{a},$$

где  $a$  – расстояние между обеими пластинками.

Трение жидкости проявляется при этом в виде силы, оказывающей сопротивление движению верхней пластинки. Эта сила пропорциональна градиенту скорости жидкости, т. е. изменению скорости, происходящему на единице длины в направлении, перпендикулярном к плоскости пластинок.

Забегая несколько вперед, скажем, что величина силы сопротивления, приходящаяся на единицу площади пластинки, называется *касательным напряжением*.

На основании сказанного касательное напряжение  $\tau$  имеет вид

$$\tau = \mu \frac{V}{a},$$

или в более общей формулировке

$$\tau = \mu \frac{du}{dy}. \quad (1.6)$$

Величина  $\mu$  называется *коэффициентом внутреннего трения* жидкости, или *коэффициентом вязкости*, или, наконец, просто *вязкостью*.

Первое указание на существование данного соотношения имеется у Ньютона, и поэтому оно часто называется *законом трения Ньютона*.



Динамическая вязкость измеряется в Па · с или в Н · с/м<sup>2</sup>. В технической системе единиц динамическая вязкость имеет размерность кгс · с/м<sup>2</sup>. В системе CGS за единицу динамической вязкости принимается пуаз (П) (в память французского ученого Пуазейля), равный 1 г · см/с.

Вязкость жидкостей в большой степени зависит от температуры, при этом вязкость капельных жидкостей при увеличении температуры уменьшается, а вязкость газов возрастает.



Так, для чистой пресной воды зависимость динамической вязкости (в пуазах) от температуры определяется по формуле Пуазейля:

$$\mu = \frac{0,00179}{1 + 0,0368t + 0,000221t^2},$$

где  $t$  – температура, °С.

Вода принадлежит к наименее вязким жидкостям. Лишь немногие из практически используемых жидкостей (например, эфир и спирт) обладают несколько меньшей вязкостью, чем вода. Наименьшую вязкость имеет жидкая углекислота (в 50 раз меньше вязкости воды). Все жидкие масла обладают значительно более высокой вязкостью, чем вода (касторовое масло при температуре 20°С имеет вязкость в 1000 раз большую, чем вода при той же температуре).

Для определения динамической вязкости воздуха применяется формула Милликена:

$$\mu = 1,745 \cdot 10^{-6} + 5,03 \cdot 10^{-9} t.$$

Наряду с понятием динамической вязкости используется и понятие кинематической вязкости, представляющей собой отношение динамической вязкости и плотности:

$$\nu = \mu / \rho. \quad (1.7)$$

Единицей для измерения кинематической вязкости в системе CGS служит стокс (в честь английского физика Стокса):  $1 \text{ Ст} = 1 \text{ см}^2/\text{с}$ .

При давлениях, встречающихся в большинстве случаев на практике (до 200 атм.), кинематическая вязкость капельных жидкостей весьма мало зависит от давления, и этим изменением в обычных гидравлических расчетах пренебрегают.

Кинематическая вязкость газов зависит как от температуры, так и от давления, возрастая с увеличением температуры и уменьшаясь с увеличением давления.



Кинематическая вязкость воздуха для нормальных условий (температура  $20^\circ\text{C}$ , давление  $\sim 1 \cdot 10^5 \text{ Па} = 1 \text{ атм}$ ) примерно в 15 раз больше, чем для воды при той же температуре.

На практике вязкость жидкостей определяют вискозиметрами, наиболее широкое распространение из которых получил вискозиметр Энглера.

## 1.5. Поверхностное натяжение

Наиболее характерным свойством жидкости, отличающим ее от газа, является то, что на границе с газом жидкость образует свободную поверхность, наличие которой приводит к возникновению явлений особого рода, называемых поверхностными. Своим возникновением они обязаны особым физическим условиям, в которых находятся молекулы вблизи свободной поверхности.

Молекулы жидкости, расположенные у поверхности контакта с другой жидкостью, газом или твердым телом, находятся в условиях, отличных от условий молекул, находящихся внутри некоторого объема жидкости.

На каждую молекулу жидкости действуют силы притяжения со стороны окружающих ее молекул, расположенных от нее на расстоянии порядка  $10^{-9} \text{ м}$  (радиус молекулярного действия). На молекулу  $M_1$ , расположенную внутри жидкости (рис. 1.3), действуют силы со стороны таких же молекул, и равнодействующая этих сил близка к нулю.

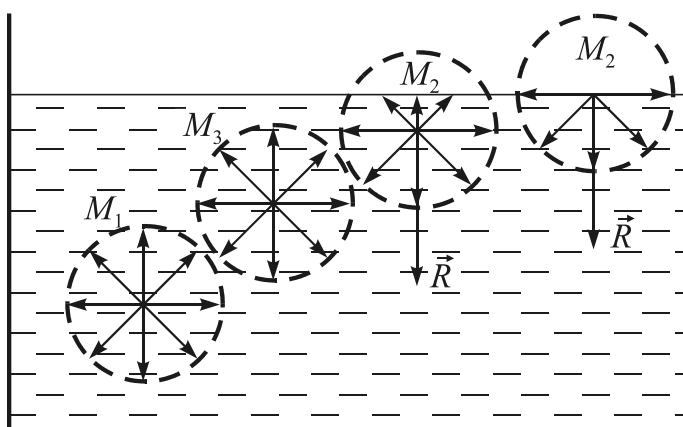


Рис. 1.3. Взаимодействие «внутренних» и «поверхностных» молекул в жидкости

Для молекул  $M_2$  равнодействующая сил отлична от нуля и направлены внутрь жидкости, перпендикулярно к ее поверхности.

Таким образом, все молекулы жидкости, находящиеся в поверхностном слое, втягиваются внутрь жидкости. Но пространство внутри жидкости занято другими молекулами, поэтому *поверхностный слой создает давление на жидкость (молекулярное давление)*.

Чтобы переместить молекулу  $M_3$ , расположенную непосредственно под поверхностным слоем, на поверхность, необходимо совершить работу против сил молекулярного давления. Следовательно, молекулы поверхностного слоя жидкости обладают дополнительной потенциальной энергией по сравнению с молекулами внутри жидкости. Эту энергию называют *поверхностной энергией*.

Поверхностная энергия  $\mathcal{E}_\Pi$  пропорциональна количеству молекул поверхностного слоя, т. е. площади поверхности раздела  $S$ :

$$\mathcal{E}_\Pi = \sigma S, \quad (1.8)$$

где коэффициент пропорциональности  $\sigma$  называется *коэффициентом поверхностного натяжения* и зависит от природы соприкасающихся тел.

*Коэффициент поверхностного натяжения* – величина, численно равная работе, совершенной молекулярными силами при изменении площади свободной поверхности жидкости на  $1 \text{ м}^2$  при постоянной температуре.

Единицей коэффициента поверхностного натяжения в СИ является джоуль на квадратный метр ( $\text{Дж}/\text{м}^2$ ).

Коэффициент поверхностного натяжения зависит от природы жидкости, от температуры и от наличия примесей<sup>5</sup>.



Например, для границы раздела *вода – воздух* при  $t = 20^\circ\text{C}$   $\sigma$  равен  $0,073 \text{ Н/м}$ , а для границы раздела *ртуть – воздух* –  $0,048 \text{ Н/м}$ .

При увеличении температуры коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  уменьшается. При критической температуре, когда исчезает различие между жидкостью и паром и  $\sigma = 0$ .

Примеси в основном уменьшают коэффициент поверхностного натяжения, хотя есть и такие, наличие которых приводит к его увеличению.

Так как любая система, предоставленная сама себе, стремится занять такое положение, в котором ее потенциальная энергия наименьшая, то жидкость обнаруживает стремление к сокращению свободной поверхности. Поверхностный слой жидкости ведет себя подобно растянутой резиновой пленке, т. е. все время стремится сократить площадь своей поверхности до минимальных размеров, возможных при данном объеме.

Свойство поверхности жидкости сокращаться, можно истолковать, как существование сил, стремящихся сократить эту поверхность. Молекула  $M_1$  (рис. 1.4), расположенная на поверхности жидкости, взаимодействует не только с молекулами, находящимися внутри жидкости, но и с молекулами, находящимися на поверхности жидкости, расположенными в пределах сферы молекулярного действия.

Для молекулы  $M_1$  равнодействующая  $F_{\text{п}}$  молекулярных сил, направленных вдоль свободной поверхности жидкости, равна нулю, а для молекулы  $M_2$ , расположенной у границы поверхности жидкости,  $F_{\text{п}} \neq 0$  и  $F_{\text{п}}$  направлена по нормали к границам свободной поверхности и по касательной к самой поверхности жидкости.

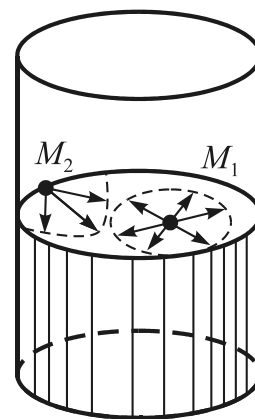


Рис. 1.4. Иллюстрация к понятию «сила поверхностного натяжения»

<sup>5</sup> Например, капля жидкости в состоянии невесомости имеет сферическую форму.

Равнодействующая сил, действующих на все молекулы, находящиеся на границе свободной поверхности, и есть *сила поверхностного натяжения*. В целом она действует так, что стремится сократить поверхность жидкости.

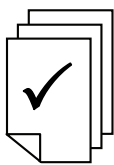
Можно предположить, что *сила поверхностного натяжения*  $F_{\Pi}$  прямо пропорциональна длине  $l$  границы поверхностного слоя жидкости, ведь на всех участках поверхностного слоя жидкости молекулы находятся в одинаковых условиях:

$$F_{\Pi} = -\gamma l_{\Pi},$$

где  $\gamma$  – коэффициент пропорциональности.

Сила поверхностного натяжения идет по касательной к поверхности жидкости и перпендикулярно к контуру, на который направлено ее действие.

Коэффициент пропорциональности  $\gamma$  – это сила, которая действует на единицу длины контура. Единицей измерения коэффициента пропорциональности служит Н/м.



Наиболее наглядно наличие сил поверхностного натяжения можно проиллюстрировать, если, например, осторожно положить монету на поверхность жидкости (рис. 1.5) – монета не провалится на дно сосуда, так как будет удерживаться силой поверхностного натяжения.



Рис. 1.5. Монета, лежащая на воде благодаря силе поверхностного натяжения

Возвращаясь к коэффициенту поверхностного натяжения  $\sigma$ , можно записать

$$\sigma = -F_{\Pi} / l. \quad (1.9)$$

Поверхностное натяжение жидкости чувствительно к ее чистоте и температуре. При повышении температуры поверхностное натяжение уменьшается, а в критической точке перехода жидкости в пар обращается в нуль. Примеси в основном уменьшают (некоторые увеличивают) коэффициент поверхностного натяжения.

Из-за действия сил поверхностного натяжения в каплях жидкости и внутри мыльных пузырей возникает избыточное давление  $\Delta p$ .

Если мысленно разрезать сферическую каплю радиуса  $R$  на две половинки, то каждая из них должна находиться в равновесии под действием сил поверхностного натяжения, приложенных к границе разреза длиной  $2\pi R$  и сил избыточного давления, действующих на площадь  $\pi R^2$  сечения (рис. 1.6).

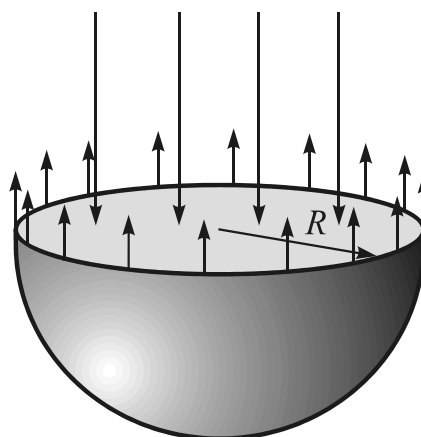


Рис. 1.6. Сечение сферической капли жидкости

Условие равновесия записывается в виде

$$\sigma 2\pi R = \Delta p \pi R^2.$$

Отсюда избыточное давление внутри капли

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (1.10)$$

Избыточное давление внутри мыльного пузыря в два раза больше, так как пленка имеет две поверхности.

## 1.6. Смачивание, капиллярный эффект

Вблизи границы между жидкостью, твердым телом и газом форма свободной поверхности жидкости зависит от сил взаимодействия молекул жидкости с молекулами твердого тела (взаимодействием с молекулами газа (или пара) можно пренебречь).

Если эти силы больше сил взаимодействия между молекулами самой жидкости, то жидкость смачивает поверхность твердого тела. В этом случае жидкость подходит к поверхности твердого тела под некоторым острым углом  $\theta$ , характерным для данной пары жидкость – твердое тело (рис. 1.7).

Угол  $\theta$  называется *краевым углом смачивания*.

Если силы взаимодействия между молекулами жидкости превосходят силы их взаимодействия с молекулами твердого тела, то *краевой угол смачивания* оказывается тупым.

В этом случае говорят, что жидкость не смачивает поверхность твердого тела.

При полном смачивании –  $\theta = 0^\circ$ , а при полном несмачивании –  $\theta = 180^\circ$ .

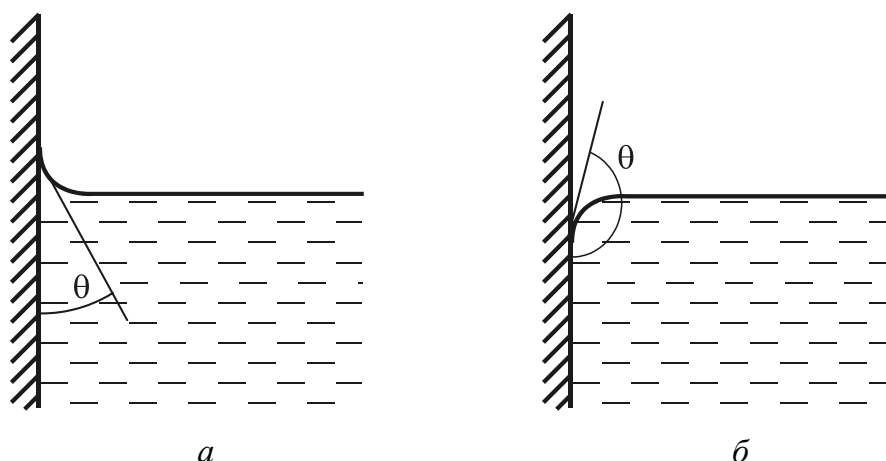


Рис. 1.7. Краевые углы смачивания:

*a* – смачивающая жидкость; *б* – несмачивающая жидкость

Краевой угол смачивания зависит от природы соприкасающихся сред (от поверхностных натяжений на их границах) и не зависит ни от формы сосуда, ни от действия силы тяжести.



Угол  $\theta$ , например, между водой и стеклом практически равен нулю, если поверхность очень чистая.

Влияние сил поверхностного натяжения приходится учитывать при работе с жидкостными приборами для измерения давления, при истечении жидкости из малых отверстий, при фильтрации, образовании капель и в других случаях, когда прочие силы, действующие на жидкость (вес, давление), малы.

От явления смачивания зависит поведение жидкости в тонких (капиллярных) трубках, погруженных в жидкость. При смачивании жидкость в трубке поднимается над уровнем свободной поверхности, при несмачивании – опускается.

*Капиллярность, капиллярный эффект* – физическое явление, заключающееся в способности жидкостей изменять уровень в трубках, узких каналах произвольной формы, пористых телах.



Поднятие жидкости происходит в случаях *смачивания* каналов жидкостями, например воды в стеклянных трубках (рис. 1.8), песке, грунте и т. п. Понижение жидкости происходит в трубках и каналах, не смачиваемых жидкостью, например, ртуть в стеклянной трубке.

Вода практически полностью смачивает чистую поверхность стекла. Наоборот, ртуть полностью не смачивает стеклянную поверхность. Поэтому уровень ртути в стеклянном капилляре опускается ниже уровня в сосуде.

Одна из практических задач, связанных с капиллярным эффектом – определение высоты поднятия жидкости в капилляре.

На рис. 1.9 изображена капиллярная трубка некоторого радиуса  $r$ , опущенная нижним концом в смачивающую жидкость плотности  $\rho$ .

Верхний конец капилляра открыт. Подъем жидкости в капилляре продолжается до тех пор, пока сила тяжести  $\vec{F}_T$ , действующая на столб жидкости в капилляре, не станет равной по модулю результирующей  $\vec{F}_H$  сил поверхностного натяжения, действующих вдоль границы соприкосновения жидкости с поверхностью капилляра:  $\vec{F}_T = \vec{F}_H$ , где:

$$F_T = mg = \rho h \pi r^2 g;$$

$$F_H = \sigma 2\pi r \cos \theta.$$

Отсюда следует:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (1.11)$$

При полном смачивании  $\theta = 0$ ,  $\cos \theta = 1$ . В этом случае

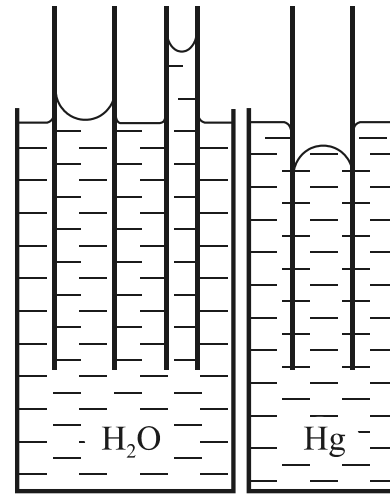


Рис. 1.8. Поднятие и опускание жидкости в капилляре

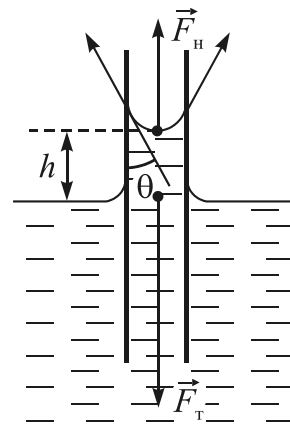
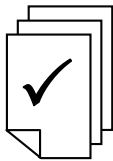


Рис. 1.9. Подъем смачивающей жидкости в капилляре

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g r}. \quad (1.12)$$

При полном несмачивании  $\theta = 180^\circ$ ,  $\cos \theta = -1$  и, следовательно,  $h < 0$ . Значит, уровень несмачивающей жидкости в капилляре опускается ниже уровня жидкости в сосуде, в которую опущен капилляр.



**Пример 1.3.** Жидкость плотностью  $\rho_{\text{ж}}$  вытекает из отверстия трубки диаметром  $d_{\text{т}}$ . Коэффициент поверхностного натяжения капли равен  $\sigma$ .

Определить отрывной диаметр капли  $d_{\text{к}}$  и сколько капель получится из  $1 \text{ см}^3$  вытекающей жидкости?

Считать, что капля отрывается вместе ее контакта с нижним концом трубки.

*Решение:* Рассмотрим условия равновесия капли непосредственно перед ее отрывом от нижнего среза трубки.

В момент отрыва капли ее вес равен силе поверхностного натяжения по линии касания капли с трубкой.

Вес капли  $G_{\text{к}}$  определим из соотношения

$$G_{\text{к}} = \rho_{\text{ж}} g \frac{\pi d_{\text{к}}^3}{6} = \rho_{\text{ж}} g V_{\text{к}}, \quad (1.13)$$

где  $V_{\text{к}}$  – объем капли.

Сила поверхностного натяжения  $F_{\text{п}}$  равна

$$F_{\text{п}} = \pi d_{\text{т}} \sigma. \quad (1.14)$$

Приравняв (1.13) и (1.14), найдем

$$V_{\text{к}} = \frac{\pi d_{\text{т}} \sigma}{\rho_{\text{ж}} g};$$

$$d_{\text{к}} = \sqrt[3]{\frac{6V_{\text{к}}}{\pi}}.$$

Для нахождения числа капель в  $1 \text{ см}^3$ , его необходимо разделить на объем одной капли.

Из соотношения (1.12) можно получить так называемую капиллярную постоянную  $a$  – величину, характеризующую размеры системы  $L < a$ , при которых становятся существенными капиллярные явления.

$$a = \sqrt{|hr|} = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}}.$$



Для воды при температуре 20°C капиллярная постоянная  $a = 0,38$ .

Понижение давления под вогнутыми менисками – одна из причин капиллярного перемещения жидкости в сторону менисков с меньшим радиусом кривизны. Частным случаем этого является пропитка пористых тел – самопроизвольное всасывание жидкостей в лиофильные<sup>6</sup> поры и капилляры. Капиллярное впитывание играет существенную роль в водоснабжении растений, передвижении влаги в почвах и других пористых телах. Капиллярная пропитка материалов широко применяется в процессах химической технологии.

Для капиллярного впитывания (рис. 1.10) важной характеристикой является его скорость  $v$ , определяемая величиной капиллярного давления и вязким сопротивлением течению жидкости в капилляре.

Скорость  $v$  перемещения мениска в горизонтально расположенном капилляре (или в очень тонком вертикальном капилляре, когда влияние силы тяжести мало) определяется уравнением Пуазейля:

$$v = -\frac{r^2}{8\eta} \frac{\Delta p}{l}, \quad (1.15)$$

где  $\Delta p = -\frac{2\sigma}{r}$  – разность давлений на нижнем и верхнем уровне столба жидкости в капилляре.

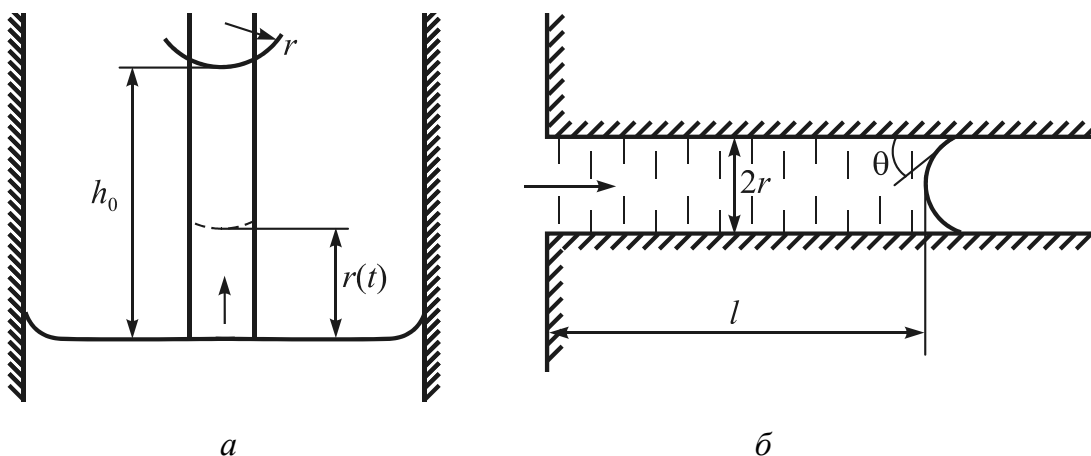


Рис. 1.10. Капиллярное впитывание жидкости:

$a$  – вертикальный капилляр;  $b$  – горизонтальный капилляр

<sup>6</sup> *Лиофильность* и *лиофобность* – характеристики способности веществ или образуемых ими тел к межмолекулярному взаимодействию с жидкостями.

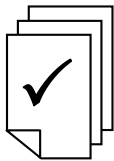
В общем случае, т. е. с учетом изменения составляющей силы тяжести с ростом столба жидкости в капилляре, скорость  $v$  для вертикально расположенного капилляра (рис. 1.10, а) изменяется со временем впитывания  $t$  в соответствии с соотношением

$$v(t) = \frac{r_k^2}{8\eta h(t)} \left[ \frac{2\sigma \cos \theta}{r_k} - \rho g h(t) \right], \quad (1.16)$$

где  $h(t)$  – положение мениска в момент времени  $t$ ;  $\eta$  – коэффициент вязкости жидкости;  $r_k$  – радиус капилляра;  $\rho$  – плотность жидкости в капилляре.

При впитывании жидкости в горизонтальный капилляр (рис. 1.10, б) соотношение (1.16) преобразуется к виду

$$v(t) = \frac{r_k \sigma \cdot \cos \theta}{4\eta h(t)}.$$



**Пример 1.4.** Определить высоту столбика жидкости, которая может удержаться в трубке, если ее полностью заполнить жидкостью в горизонтальном положении, а затем повернуть вертикально.

Диаметр и высота капиллярной трубки соответственно равны  $d_k$  и  $H_k$ . Краевой угол смачивания равен  $\theta$ .

*Решение:* Решение находим из баланса давлений вследствие кривизны свободных поверхностей жидкости в капилляре (а их, как указывалось выше, две) и гидростатического давления столба жидкости  $h_{ж}$ .

Согласно (1.11) и с учетом вышесказанного

$$h_{ж} = \frac{8\sigma \cos \theta}{\rho g d_k}.$$

Капиллярное передвижение жидкости может вызывать и градиент капиллярного давления, возникающий в результате разли-

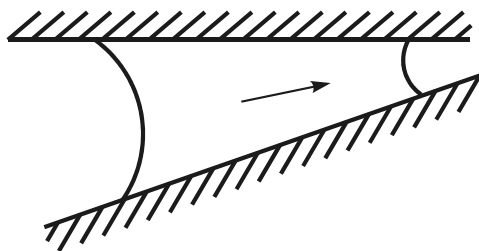


Рис. 1.11. Передвижение жидкости в капилляре переменного сечения

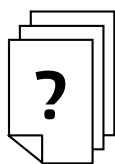
чия кривизны поверхностей менисков жидкостного образования в капилляре переменного сечения (рис. 1.11).

Для смачивающих жидкостей поток жидкости направлен к мениску с меньшим радиусом кривизны (т. е. в сторону меньшего давления).

Причиной капиллярного передвижения может быть не только градиент кривизны мениска, но и градиент поверхностного натяжения жидкости.

Так, градиент температуры приводит к разности поверхностного натяжения и, соответственно, к разности капиллярного давления в жидкости (термокапиллярное течение). Этим же объясняется движение капель жидкости и пузырьков газа в неравномерно нагретой среде: под влиянием градиента поверхностного натяжения приходит в движение поверхность пузырьков или капель.

Аналогичный эффект наблюдается и при изменении поверхностного натяжения при адсорбции *поверхностно-активных веществ* (ПАВ). ПАВ снижают эластичность свободной поверхности жидкости и, соответственно, ее поверхностного натяжения. Жидкость перемещается в том направлении, где адсорбция ПАВ на поверхности жидкости меньше (эффект Марангони – Гиббса).



### **Контрольные задания по темам раздела**

**Задача 1.1.** Определить плотности воды  $\rho_v$  и нефти  $\rho_n$  при  $4^\circ\text{C}$ , если известно, что 10 л воды при  $4^\circ\text{C}$  имеют массу 10 кг, а масса того же объема нефти равна 8,2 кг. Сравнить плотность нефти с плотностью воды.

*Ответ:*  $\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$ ,  $\rho_n = 820 \text{ кг/м}^3$ .

**Задача 1.2.** Цистерна заполнена нефтью плотностью  $850 \text{ кг/м}^3$ . Диаметр цистерны  $d = 3 \text{ м}$ , длина  $l = 6 \text{ м}$ . Определить массу жидкости в цистерне.

*Ответ:*  $m = 3,60 \cdot 10^4 \text{ кг}$ .

**Задача 1.3.** Найти плотность смеси жидкостей  $\rho_{см}$  имеющей следующий массовый состав: керосина – 30%, мазута – 70%, если плотность керосина  $\rho_k = 790 \text{ кг/м}^3$ , а мазута  $\rho_{см} = 900 \text{ кг/м}^3$ .

*Ответ:*  $\rho_{см} = 867 \text{ кг/м}^3$ .

**Задача 1.4.** Плотность нефти при  $15^\circ\text{C} = 900 \text{ кг/м}^3$ . Диаметр резервуара  $d = 10 \text{ м}$ ; нефть заполняет резервуар при  $15^\circ\text{C}$  до высоты

$H = 12$  м. Коэффициент теплового объемного расширения нефти  $\beta_T = 6,4 \cdot 10^{-4}$  град $^{-1}$ . Расширение резервуара не учитывается. Определить, насколько поднимется уровень нефти в цилиндрическом резервуаре при увеличении температуры от 15 до 40°C.

*Ответ:*  $\Delta H = 0,192$  м.

**Задача 1.5.** Трубопровод диаметром  $d = 0,3$  м, длиной  $l = 100$  м, подготовленный к гидравлическому испытанию, заполнен водой при атмосферном давлении. Коэффициент сжимаемости воды принять равным  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^{-9}$  Па $^{-1}$ . Деформацией трубопровода пренебречь. Определить, какое количество воды необходимо дополнительно подать в трубопровод, чтобы давление в нем поднялось до 5 МПа по манометру.

*Ответ:*  $\Delta W = 1,77 \cdot 10^{-2}$  м $^3$ .

**Задача 1.6.** Вода занимает площадь  $S \approx 100\,000$  га, средняя толщина пласта  $h = 10$  м, пористость пласта<sup>7</sup>  $m = 20\%$ , коэффициент сжимаемости воды  $\beta_p = 0,5 \cdot 10^{-10}$  Па $^{-1}$ . Определить насколько изменится объем воды, находящейся в окружающей нефтяное (или газовое) месторождение пластовой водонапорной системе, за счет упругого расширения при падении пластового давления  $\Delta p = 9,8$  МПа.

*Ответ:*  $\Delta W = 8,4 \cdot 10^6$  м $^3$ .

**Задача 1.7.** Динамический коэффициент вязкости нефти при температуре 40°C равен  $\mu = 0,5$  кг/(м·с). Плотность нефти при той же температуре равна 920 кг/м $^3$ . Найти кинематический коэффициент вязкости нефти при температуре 40°C.

*Ответ:*  $\nu = 0,543 \cdot 10^{-3}$  м/с.

**Задача 1.8.** Для большинства жидкостей зависимость динамического коэффициента вязкости  $\mu$  от абсолютной температуры  $T$  можно представить эмпирической формулой вида

$$\mu = Ve^{b/T},$$

где коэффициенты  $V$  и  $b$  для данной жидкости имеют постоянное значение и определяются экспериментально. Установлено,

<sup>7</sup> Пористость  $m$  равна отношению объема пор, занятых жидкостью, к объему пласта.

что при  $t_1 = 15^\circ\text{C}$  динамический коэффициент вязкости нефти  $\mu_1 = 0,187 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ , а при  $t_2 = 30^\circ\text{C}$ ,  $\mu_2 = 0,0312 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ . Определить постоянные  $B$  и  $b$  и вычислить значение  $\mu$  для нефти при  $t = 25^\circ\text{C}$ .

*Ответ:*  $B = 3,65 \cdot 10^{-17} \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ ;  $b = 1,04 \text{ К}$ ,  $\mu = 0,05 \text{ кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$ .

**Задача 1.9.** Вода поступает в насос по всасывающей трубе, работающей под вакуумом. Минимальное абсолютное давление перед входом в насос  $p = 4 \text{ кПа}$ . Температура перекачиваемой воды поднялась до  $30^\circ\text{C}$ . Ответить на вопрос: будет ли наблюдаться в этом случае явление кипения?

*Ответ:* вода закипит, так как давление насыщенных паров воды при  $t = 30^\circ\text{C}$  равно  $p = 4,214 \text{ кПа}$ , что больше минимального абсолютного давления.

**Задача 1.10.** Для определения давления насыщенных паров жидкости используются две предварительно заполненные ртутью барометрические трубки (рис. 1.12). Одна из них служит барометром, а в другую при помощи пипетки по капле вводят испытываемую жидкость. Безвоздушное пространство над ртутью вскоре заполняется, наряду с парами ртути, также парами жидкости, а над мениском ртути образуется небольшой слой жидкости высотой  $\Delta h$ .

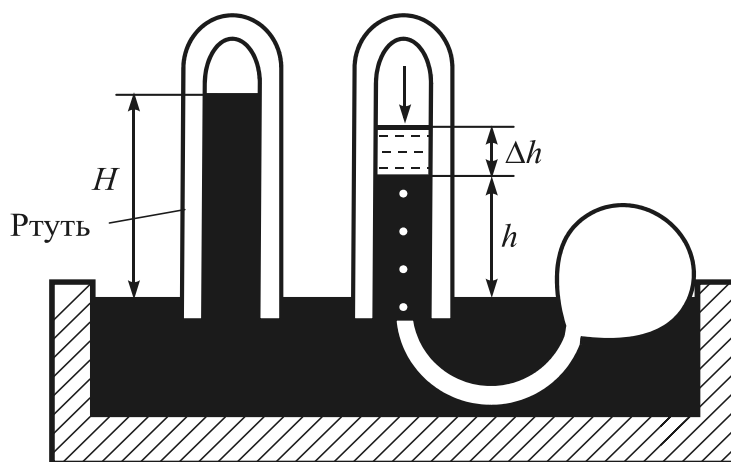


Рис. 1.12. Пояснения к задаче 1.10

Мениск ртути при этом понизится на величину, соответствующую давлению насыщенных паров жидкости.

При температуре опытов  $t = 20^\circ\text{C}$  плотность воды  $\rho_v = 998,2 \text{ кг}/\text{м}^3$ , а плотность ртути  $\rho_p = 13\,550 \text{ кг}/\text{м}^3$ . Определить

давление насыщенных паров воды  $p_v$ , если  $h = 713$  мм,  $\Delta h = 200$  мм, показание барометра  $H = 745$  мм рт. ст.

*Ответ:*  $p_v = 2,3$  кПа.

**Задача 1.11.** Масса  $m$  100 капель спирта, вытекающего из капилляра, равна 0,71 г. Плотность спирта принять равной  $0,9$  г/см<sup>3</sup>. Определить поверхностное натяжение спирта  $\sigma_c$ , если диаметр  $d$  шейки капли в момент отрыва равен 1 мм.

*Ответ:*  $\sigma_c = 0,022$  Н/м.

**Задача 1.12.** Глицерин поднялся в капиллярной трубке внутренним диаметром  $d = 1,26$  г/см<sup>3</sup> на высоту  $h = 20$  мм. Определить поверхностное натяжение  $\sigma$  глицерина, если диаметр канала трубки равен 1 мм.

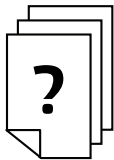
*Ответ:*  $\sigma = 0,061$  Н/м.

**Задача 1.13.** Диаметр мыльного пузыря  $d$  равен 5 мм. Поверхностное натяжение глицерина  $\sigma_r$  принять равным  $0,061$  Н/м. Определить насколько давление воздуха внутри мыльного пузыря больше атмосферного давления.

*Ответ:*  $\Delta p = 97,6$  Па.

**Задача 1.14.** В воду опущена на очень малую глубину стеклянная трубка с диаметром  $d$  внутреннего канала, равным 1 мм. Поверхностное натяжение воды на границе с воздухом  $\sigma_v$  принять  $0,07$  Н/м. Найти массу  $m$  вошедшей в трубку воды.

*Ответ:*  $m = 22$  г.



### Контрольные вопросы по разделу

1. Какие вы знаете сходства и различия в свойствах жидкости и твердого тела?
2. Какие вы знаете сходства и различия в свойствах жидкости и газа?
3. Как найти объем жидкости, плотность и масса которой известны?
4. В чем различие понятий «плотность» и «удельный вес»?



5. Что такое «сжимаемость» капельной жидкости или газа?
6. Как определяется «коэффициент термического расширения»?
7. Если жидкость, полностью заполняющую закрытый недеформируемый сосуд, подогреть, то что произойдет с давлением в ней?
8. Какое из действий (увеличение или снижение давления над поверхностью жидкости) приведет к прекращению начавшегося кипения?
9. Как определяется «коэффициент динамической вязкости»? Какова его размерность?
10. Какая связь между коэффициентами динамической и кинематической вязкости?
11. Если предположить, что вода и бензин имеют одинаковые значения кинематического коэффициента вязкости, то одинаковы ли при этом значения динамического коэффициента вязкости?
12. Дайте определения понятиям «поверхностное натяжение» и «краевой угол смачивания».



## РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

### 2.1. Условия равновесия

*Равновесие «невесомой»<sup>8</sup> однородной жидкости.* Каждая жидкость обладает весом. Однако во многих случаях, особенно когда в жидкости имеет место высокое давление, нет никакой нужды учитывать действие силы тяжести, следовательно, в этих случаях можно считать жидкость невесомой. При таком допущении все расчеты значительно упрощаются.

Используя приближение невесомой жидкости, найдем распределение давления в невесомой жидкости.

Выделим в жидкости длинную узкую призму с основаниями, перпендикулярными к оси призмы (рис. 2.1) и рассмотрим ее равновесие относительно перемещения вдоль оси.

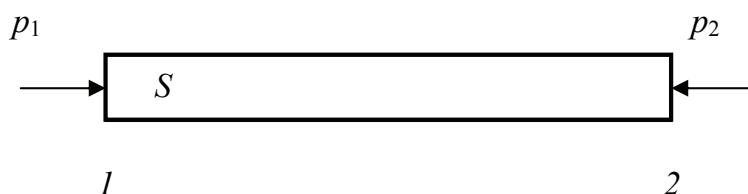


Рис. 2.1. Равновесие призмы с горизонтальной осью

Предположим сначала, что давление в жидкости изменяется при переходе от одной точки (сечение 1) пространства к другой (сечение 2).

Поперечное сечение призмы  $S$  возьмем настолько малым, что изменением давления на его площади можно пренебречь.

Если на одном конце призмы имеет место давление  $p_1$ , а на другом конце – давление  $p_2$ , то на первое основание призмы действует сила давления  $P_1 = Sp_1$ , параллельная оси призмы, а на второе осно-

---

<sup>8</sup> Понятия «невесомой» и «весомой жидкости» введено Прандтлем в его работах по механике жидкости, согласно которым ведутся рассуждения в данном разделе.

вание – сила давления  $P_2 = Sp_2$ , также параллельная оси призмы, но противоположная силе  $P_1$ .

Таким образом, для равновесия призмы необходимо, чтобы

$$Sp_1 = Sp_2$$

или

$$p_1 = p_2. \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) определяет условия равновесия однородной жидкости в горизонтальной плоскости в приближении отсутствия силы тяжести.

**Равновесие «весомой» однородной жидкости.** Основной задачей гидростатики, т. е. учения о равновесии весомых жидкостей, является вычисление распределения давления («поля давления») в однородной весомой жидкости.

Выделим в жидкости небольшую призму (рис. 2.1), причем сначала с горизонтальной осью, и рассмотрим ее равновесие относительно перемещений в направлении оси.

Так как ось призмы перпендикулярна к вертикали, т. е. к направлению силы тяжести, то вес призмы не дает составляющей в направлении оси призмы. Поэтому мы можем в рассматриваемом случае повторить все приведенные выше рассуждения и тогда найдем, что давление на обоих концах призмы одинаковое, т. е. выполняется условия равновесия (2.1).

Применяя этот результат к последовательности примыкающих друг к другу призм с горизонтальной осью, мы найдем, что давление весомой жидкости во всех точках одной и той же горизонтальной плоскости одинаковое.

Определим связь между давлениями весомой жидкости в различных горизонтальных плоскостях. Для этого выделим в жидкости призму или цилиндр с вертикальной осью (рис. 2.2) и рассмотрим равновесие взятого тела относительно перемещений в направлении его оси.

Теперь вес цилиндра оказывает существенное влияние на его равновесие. На верхнее

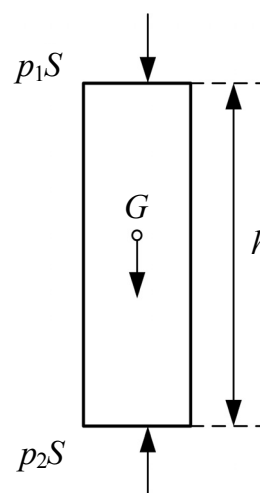


Рис. 2.2. Равновесие призмы с вертикальной осью

основание цилиндра действует сила давления  $P_1$ , направленная вниз, а на нижнее основание – сила давления  $P_2$ , направленная вверх. Кроме того, на массу цилиндра действует направленная вниз сила тяжести  $G = \rho gSh$ .

Следовательно, для равновесия цилиндра необходимо, чтобы

$$G + P_1 = P_2$$

или

$$Spgh + Sp_1 = Sp_2.$$

Из чего следует

$$p_2 - p_1 = \rho gh. \quad (2.2)$$

Таким образом, разность между давлениями на взятых горизонтальных плоскостях, находящихся друг от друга на расстоянии  $h$ , равна весу вертикального столба жидкости, заключенного между этими плоскостями и имеющего поперечное сечение с площадью, равной единице.

Применяя этот результат к ряду примыкающих друг к другу вертикальных призм, мы найдем, что:

– давление в каждой горизонтальной плоскости остается постоянным – условие равновесия (2.1);

– давление в весомерной однородной жидкости возрастает с увеличением глубины, причем увеличению глубины на единицу длины соответствует увеличение давления на величину – условие равновесия (2.2).

**Равновесие неоднородной жидкости.** Если жидкость неоднородная (например, вследствие неодинаковой температуры или разного содержания соли в разных местах жидкости), то все рассуждения относительно призмы с горизонтальной осью могут быть повторены без всяких изменений.

Следовательно, в неоднородной весомерной жидкости при равновесии давление во всех точках каждой горизонтальной плоскости одинаковое.

Для выяснения условия равновесия в вертикальном направлении проведем в жидкости две горизонтальные плоскости на некотором расстоянии  $h$  друг от друга (рис. 2.3).

Пусть на верхней плоскости давление равно  $p_1$ , а на нижней –  $p_2$ .

Выделим между проведенными плоскостями две узкие вертикальные призмы.

Пусть средний удельный вес жидкости в левой призме равен  $\gamma_1$ , а в правой призме –  $\gamma_2$ .

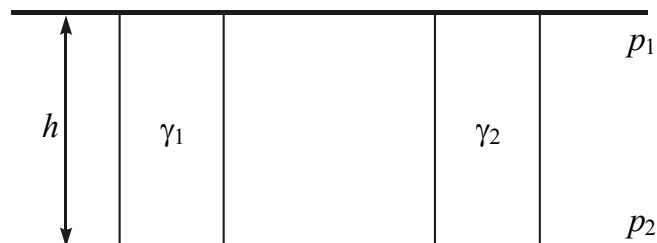


Рис. 2.3. Равновесие двух призм с вертикальной осью в неоднородной жидкости

Для равновесия необходимо, чтобы соблюдались следующие условия:

– слева

$$p_2 - p_1 = \gamma_1 h,$$

– справа – равенство

$$p_2 - p_1 = \gamma_2 h.$$

Оба эти требования совместимы друг с другом только в том случае, если  $\gamma_1 = \gamma_2$ . В противном случае равновесие не могло бы установиться, и жидкость пришла бы в движение.

Мы можем уточнить наши рассуждения, если возьмем расстояние  $h$  между плоскостями очень малым и повторим рассуждения для любого большого числа пар соседних горизонтальных плоскостей.

Таким образом, мы приходим к выводу – *в неоднородной весо-мой жидкости равновесие возможно только в том случае, если в каждом горизонтальном слое плотность везде постоянная.*

Отсюда, в частности, следует, что при равновесии двух наложенных друг на друга и между собой не смешивающихся жидкостей различной плотности поверхностью раздела может быть только горизонтальная плоскость.

Что касается распределения давления в неоднородной жидкости, то для каждого слоя, в котором плотность можно считать приближенно одинаковой, имеет место уравнение

$$dp = -\gamma dz . \quad (2.3)$$

После интегрирования уравнения (2.3) и деления его на  $\gamma$  получим

$$z + \frac{p}{\gamma} = \text{const} . \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) называется *основным уравнением гидростатики* в одномерном представлении и выражает закон распределения гидростатического давления в покоящейся жидкости.

***Геометрическая и энергетическая интерпретация основного уравнения гидростатики.*** Слагаемые основного уравнения гидростатики имеют линейную размерность, поэтому его легко представить в виде суммы двух отрезков, равных соответственно  $z$  и  $p/\gamma$ .

Величина  $z$  в технической механике жидкости называется *высотой положения* и отсчитывается от произвольной плоскости сравнения.

Величина  $p/\gamma$  называется *приведенной высотой*.

Сумма высот  $H = z + p/\gamma$  называется *гидростатическим напором*.

Из уравнения (2.4) следует, что гидростатический напор для всех точек покоящейся жидкости есть величина постоянная

$$H = z + p/\gamma = \text{const} .$$

Умножим каждое слагаемое уравнения (2.4) на  $mg$  – вес конечного объема жидкости.

Заметим, что произведение первого члена уравнения (2.4) на  $mg$ , а именно  $zmg$ , представляет собой потенциальную энергию массы  $m$  относительно плоскости сравнения.

Так как уравнение (2.4) физическое, то и произведение его второго слагаемого на  $mg$ , а именно  $(p/\gamma)mg$ , также имеет размерность энергии и называется *энергией гидростатического давления*.

Таким образом, из основного уравнения гидростатики следует, что сумма удельной потенциальной энергии положения и удельной потенциальной энергии гидростатического давления есть величина постоянная для всех точек покоящейся жидкости.

**Равновесие газа в поле силы тяжести.** Условия равновесия весомого газа в основном совпадают с условиями равновесия весоной жидкости. Поэтому уравнения гидростатики, выведенные для весоной жидкости применимы и для газа.

Во многих случаях, например, если пространство, занимаемое газом, имеет умеренную высоту, можно считать удельный вес газа постоянным во всем пространстве.

Тогда можно пользоваться условием равновесия (2.2) для однородной жидкости в поле силы тяжести

$$p = (p_0 - \gamma z),$$

где  $z$  – высота над сравниваемым уровнем с давлением  $p_0$ .

Если пространство, занимаемое газом, имеет большую высоту, исчисляемую километрами, то тогда принимать газ за однородную жидкость уже недопустимо.

В этом случае разности давлений на разных высотах столь велики, что вследствие сжимаемости газа плотность его вверху и внизу имеет значения, сильно отличающиеся друг от друга.

Большую роль играют также разности температур на разных высотах.

Следовательно, теперь все расчеты надо вести исходя из уравнения равновесия (2.3) для неоднородной жидкости.

$$dp = -\gamma dz .$$

Зависимость удельного веса от высоты  $z$  заранее неизвестна, зависимость же его от давления  $p$  может быть найдена на основе определенного допущения о распределении температуры по высоте.

После интегрирования этого уравнения мы получим:

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = z . \quad (2.5)$$

Вычислим этот интеграл для простейшего случая, когда температура постоянна на любой высоте пространства, занимаемого газом.

Удельный вес, на основании закона Бойля – Мариотта, прямо пропорционален давлению.

Поэтому

$$\gamma = \gamma_0 \frac{p}{p_0} .$$

Подставив это значение в левую часть уравнения (2.5) и вычислив интеграл, мы получим:

$$\int_p^{p_0} \frac{dp}{\gamma} = \frac{p_0}{\gamma_0} \int_p^{p_0} \frac{dp}{p} = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p}.$$

Вернемся к уравнению (2.5), которое теперь мы можем переписать в следующем виде:

$$z = \frac{p_0}{\gamma_0} \ln \frac{p_0}{p}. \quad (2.6)$$

Формула (2.6) называется *формулой барометрического нивелирования*, так как позволяет определять разность высот по показаниям двух барометров.

Обозначая для краткости высоту однородной атмосферы  $\frac{p}{p_0}$  через  $H_0$ , получим

$$z = H_0 \ln \frac{p_0}{p}.$$

Применяя это уравнение к двум высотам  $z_1$  и  $z_2$ , получим

$$z_1 - z_2 = H_0 \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (2.7)$$

Выражение (2.6) может быть представлено в виде

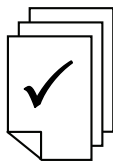
$$p = p_0 e^{-\frac{\gamma_0(z_0-z)}{p_0}}. \quad (2.8)$$

Эта формула описывает распределение давления по высоте при условии постоянства температуры и называется *барометрической формулой*.

Из формулы (2.7) видно, что с увеличением высоты давление непрерывно уменьшается, но постепенно все медленнее. На бесконечно большой высоте давление делается равным нулю.

Рассмотрим использование изложенного материала на отдельных примерах.





**Пример 2.1.** В закрытом резервуаре с нефтью плотностью  $\rho = 880 \text{ кг/м}^3$  вакуумметр, установленный на его крышке, показывает  $p_b = 1,18 \cdot 10^4 \text{ Па}$  (рис. 2.4).

Определить показание манометра  $p_m$ , присоединенного к резервуару на глубине  $h = 6 \text{ м}$  от поверхности жидкости, и положение пьезометрической плоскости.

**Решение.** Проведем плоскость  $I-I$  на уровне присоединения манометра. В этой плоскости абсолютное давление, в соответствии с основным уравнением гидростатики, равно:

$$p_{I-I} = p_0 + \rho gh,$$

где  $p_0$  – абсолютное давление на поверхности, равное  $(p_a - p_b)$ .

Тогда

$$p_{I-I} = p_a - p_b + \rho gh.$$

С другой стороны, так как манометр измеряет избыточное давление, то

$$p_{I-I} = p_a + p_b.$$

Приравняв эти два выражения для  $p_{I-I}$ , найдем:

$$p_m = -p_b + \rho gh = -1,18 \cdot 10^4 + 880 \cdot 9,8 \cdot 6 = 3,99 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Так как на поверхности жидкости давление меньше атмосферного, то пьезометрическая высота  $h_{\pi}$  отрицательна

$$h_{\pi} = \frac{\Delta p}{\rho g} = -\frac{p_b}{\rho g} = -\frac{1,18 \cdot 10^4}{880 \cdot 9,8} = -1,37 \text{ м},$$

т. е. пьезометрическая плоскость расположена ниже поверхности жидкости.

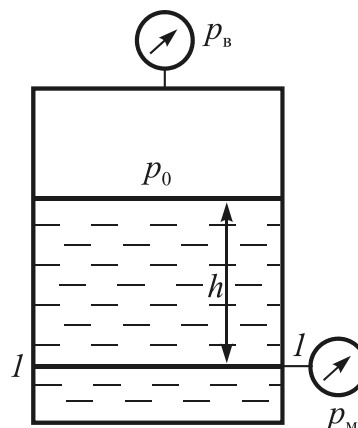
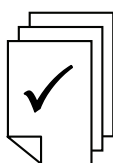


Рис. 2.4. К примеру 2.1



**Пример 2.2.** Определить давление на забое закрытой газовой скважины (рис. 2.5), если глубина скважины  $H = 2200 \text{ м}$ , избыточное давление на устье  $p_m = 10,7 \text{ МПа}$ , плотность природного газа при атмосферном давлении и температуре в скважине (считаемой неизменной по высоте)  $\rho = 0,76 \text{ кг/м}^3$ , атмосферное давление  $p_a = 98 \text{ кПа}$ .

*Решение.* Для определения давления на забое газовой скважины воспользуемся барометрической формулой:

$$p = p_0 e^{\frac{\rho_0 g(z_0 - z)}{p_0}}$$

В нашем случае  $p_0$  – абсолютное давление на устье скважины:

$$p_0 = p_a + p_m = 98 \cdot 10^3 + 10,7 \cdot 10^6 = 10,8 \cdot 10^6 \text{ Па,}$$

$\rho_0$  плотность при давлении  $p_0$ , а  $z - z_0 = 2200$  м.

Из уравнения состояния газа следует, что

$$\frac{\rho_0}{p_0} = \frac{\rho_a}{p_a} = \frac{0,76}{98 \cdot 10^3} = 7,76 \cdot 10^{-6} \text{ с}^2/\text{м}^2,$$

а показатель степени

$$\rho_0 g(z_0 - z) = 7,76 \cdot 10^{-6} \cdot 9,8 \cdot 2200 = 0,167.$$

Тогда

$$p = 10,8 \cdot 10^6 \cdot e^{0,167} \cdot 12,8 \text{ МПа.}$$

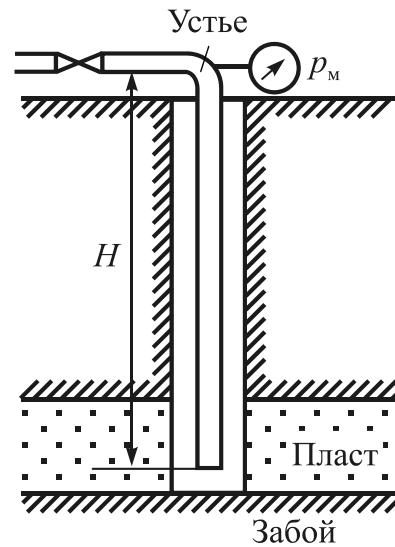
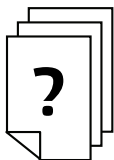


Рис. 2.5. К примеру 2.2



### Контрольные задания по теме

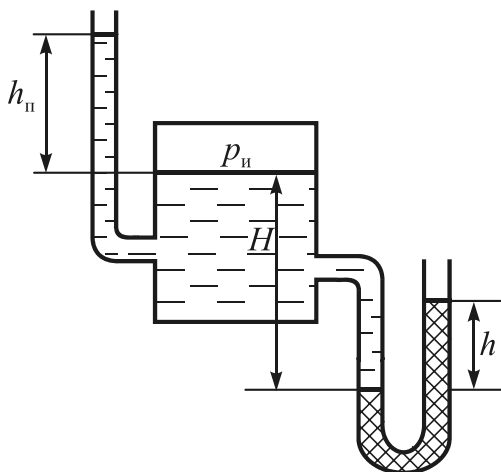


Рис. 2.6. К задаче 2.1

**Задача 2.1.** Плотность жидкости  $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ , плотность ртути  $\rho_p = 13\,600 \text{ кг/м}^3$ . Определить избыточное давление  $p_и$  на поверхности жидкости в резервуаре и пьезометрическую высоту  $h_п$  (см. рис. 2.6), если высота  $H = 0,6$  м, а показания ртутного манометра  $h = 80$  мм.

*Ответ:*  $p_и = 5,96 \text{ кПа}$ ;  $h_п = 0,76 \text{ м}$ .

**Задача 2.2.** В закрытом сосуде хранится жидкость плотностью  $850 \text{ кг/м}^3$ . Давление в сосуде измеряется ртутным манометром (рис. 2.7). В открытом конце манометрической трубки над ртутью имеется столб воды высотой  $h_1 = 15 \text{ см}$ . Высоты  $h_2 = 23 \text{ см}$ ,  $h_3 = 35 \text{ см}$ . Найти абсолютное давление  $p$  на поверхности жидкости в сосуде, если барометрическое давление соответствует  $742 \text{ мм рт. ст.}$

*Ответ:*  $p = 6,85 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

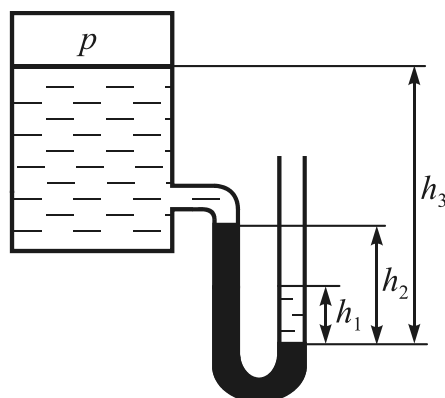


Рис. 2.7. К задаче 2.2

**Задача 2.3.** Определить разность давления в двух сечениях горизонтального водопровода  $\Delta p$  по разности высот жидкости в трубках ртутного дифференциального манометра  $h = 150 \text{ мм}$ .

*Ответ:*  $\Delta p = 18,9 \text{ кПа}$ .

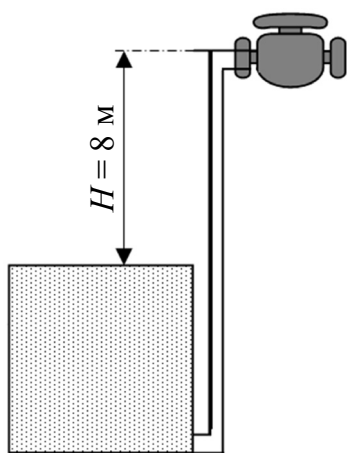


Рис. 2.8. К задаче 2.4

**Задача 2.4.** Закрытый резервуар (рис. 2.8) заполнен бензином плотностью  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ . Поверхность резервуара расположена на  $8 \text{ м}$  ниже оси насоса, а избыточное давление на поверхности резервуара  $p_{\text{и}} = 10^4 \text{ Па}$ . Атмосферное давление принять  $p_{\text{а}} = 10^5 \text{ Па}$ . Ответить на вопрос: сможет ли насос откачивать бензин из закрытого резервуара, если на всасывающей патрубке насоса абсолютное давление не может быть меньше, чем  $5,5 \cdot 10^4 \text{ Па}$ .

*Ответ:* не сможет.

**Задача 2.5.** На рис. 2.9 приведен вертикальный разрез газонефтеводного пласта, имеющего выход на поверхность в точке  $A$ . Плотность минерализованной воды  $\rho_{\text{в}} = 1020 \text{ кг/м}^3$ , плотность нефти  $\rho_{\text{н}} = 850 \text{ кг/м}^3$ , атмосферному давлению соответствует  $740 \text{ мм рт. ст.}$  Найти абсолютное давление в газовой шапке, если  $H = 2500 \text{ м}$ ,  $h_1 = 800 \text{ м}$ ,  $h_2 = 300 \text{ м}$ .

*Ответ:*  $p = 14,6 \text{ МПа}$ .

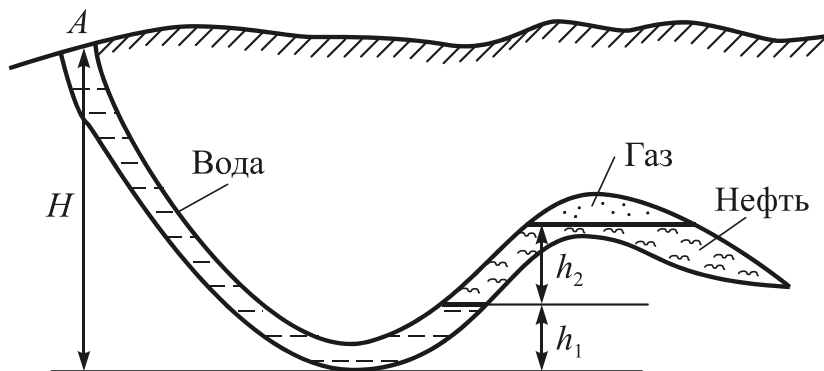


Рис. 2.9. К задаче 2.5

**Задача 2.6.** Барометр, установленный у подножия холма, показывает давление 760 мм рт. ст., на вершине холма – 720 мм рт. ст. Определить высоту холма, считая температуру воздуха постоянной и равной  $10^\circ\text{C}$ . Газовая постоянная для воздуха  $R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

Ответ:  $H = 425 \text{ м}$ .

**Задача 2.7.** Давление воздуха на уровне моря принять равным 760 мм рт. ст. Температуру воздуха считать постоянной и равной  $20^\circ\text{C}$ . Определить, на какой высоте  $H$  от уровня моря давление воздуха составит 690 мм рт. ст.

Ответ:  $H = 829 \text{ м}$ .

## 2.2. Основное дифференциальное уравнение равновесия

Выделим в покоящейся жидкости элементарный объем в форме прямоугольного параллелепипеда с ребрами, параллельными осям координат и равными соответственно  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 2.10).

Со стороны окружающей жидкости на выделенный параллелепипед действуют поверхностные силы, определяемые статическим давлением, а также массовые силы, пропорциональные его массе.

Составим уравнение равновесия для этой системы сил в проекциях на координатную ось  $Ox$ .

При этом будем предполагать, что гидростатическое давление есть непрерывная функция координат пространства и что его значение в центре тяжести параллелепипеда (точка  $M$ ) равно  $p$ .

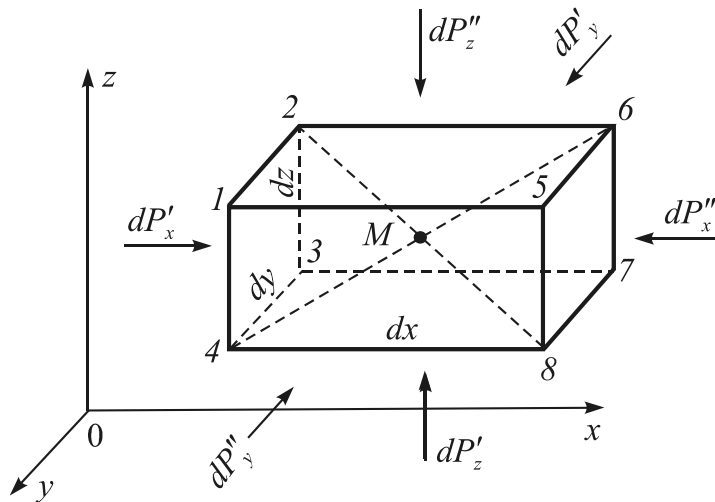


Рис. 2.10. К выводу дифференциальной формы уравнения равновесия

Тогда первое уравнение равновесия в проекциях на ось  $Ox$  запишется следующим образом:

$$dP'_x - dP''_x + dR \cos(d\vec{R}, Ox) = 0, \quad (2.9)$$

где  $dP'_x = p'_x dydz$  – сила гидростатического давления на грань 1-2-3-4;  $dP''_x = p''_x dydz$  – то же, на грань 5-6-7-8;  $dR \cos(d\vec{R}, Ox) = \rho dx dy dz X$  – проекция элементарной массовой силы на ось  $Ox$ ;  $p'_x$  и  $p''_x$  – среднее гидростатическое давление соответственно на грани 1-2-3-4 и 5-6-7-8.

Так как гидростатическое давление является функцией координат, значение давлений  $p'_x$  и  $p''_x$  будут равны

$$p'_x = p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx;$$

$$p''_x = p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx.$$

Тогда уравнение (2.9) примет вид

$$\left[ \left( p - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) - \left( p + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \right] dydz + \rho dx dy dz X = 0$$

ИЛИ

$$-\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz + \rho dx dy dz X = 0. \quad (2.10)$$

Разделив уравнение (2.10) на массу параллелепипеда, получим:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho X.$$

Проделав аналогичные операции с проекциями внешних сил на оси  $Ox$  и  $Oy$ , получим систему дифференциальных уравнений равновесия жидкости:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} = \rho X, \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \rho Y, \\ \frac{\partial p}{\partial z} = \rho Z. \end{cases} \quad (2.11)$$

Система уравнений (2.11) была впервые получена Эйлером.

Умножая каждое из уравнений в (2.11) соответственно на  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  и складывая их, получим

$$\frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz = \rho (Xdx + Ydy + Zdz)$$

или

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz). \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) называется *основным дифференциальным уравнением равновесия жидкости*.

Уравнение (2.12) позволяет получить ряд приложений и, в частности, уравнение поверхности равного давления

Поверхность, в каждой точке которой значение данной функции постоянно, называется *поверхностью уровня*. Физический смысл функции и ее значения могут быть различными (например, поверхность равной температуры, равного давления и т. п.).

В технической механике жидкости наибольший интерес представляет поверхность равного давления, т. е. такая поверхность, в каждой точке которой давление имеет постоянное значение.

Уравнение поверхности равного давления просто получается из основного уравнения равновесия жидкости (2.11).

Так как для поверхности уровня  $P = \text{const}$  в любой ее точке  $dp = 0$ , то согласно уравнению (2.12)

$$0 = \rho(Xdx + Ydy + Zdz)$$

или, учитывая, что плотность отлична от нуля

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0. \quad (2.13)$$

Это уравнение и есть *уравнение поверхности уровня равного давления*.

Поверхность уровня (в нашем случае поверхность равного давления) обладает двумя основными свойствами:

*Первое свойство* – поверхности уровня не пересекаются между собой. Действительно, предположив обратное, мы получим в точках линии пересечения этих поверхностей давление, равное одновременно  $p_1$  и  $p_2$ , что физически невозможно. Следовательно, невозможно и пересечение поверхностей уровня.

*Второе свойство* – внешние массовые силы направлены по внутренней нормали к поверхности уровня.

## 2.3. Сила статического давления жидкости на плоскую стенку

*Давление жидкости на плоскую горизонтальную поверхность.* Действие сил гидростатического давления, распределенного по поверхности, которая это давление воспринимает, может быть заменено действием одной сосредоточенной силы – их равнодействующей.

При определении силового воздействия жидкости на твердую поверхность решают обычно две задачи:

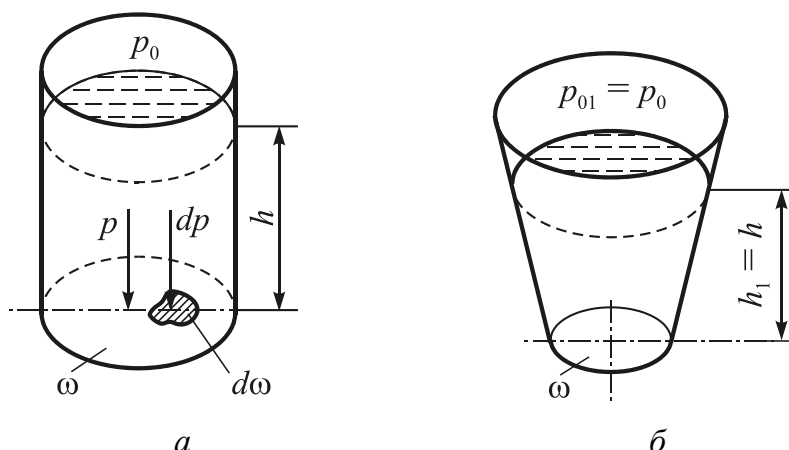
- определяют величину равнодействующей сил гидростатического давления;
- находят точку ее приложения (центр давления).

Рассмотрим вначале простейший случай – давление жидкости на плоское дно цилиндрического сосуда (рис. 2.11).

Выделим в пределах площади дна элементарную площадку  $ds$ . Очевидно, что давление в каждой ее точке будет постоянным. Сила давления  $dP$  на эту площадку равна

$$dP = pds,$$

где  $p = p_0 + \rho gh$  – статическое давление в любой точке площади дна;  $p_0$  – атмосферное давление.



2.11. Давление жидкости  
на плоскую горизонтальную поверхность

Равнодействующая сила давления определится интегралом от элементарной силы, взятым по всей площади дна

$$P = \int_S dP = (p_0 + \rho gh)S, \quad (2.14)$$

так как входящие под знак интеграла  $p_0$  и  $\rho gh$  – постоянные величины.

Уравнение (2.14) показывает, что независимо от формы сосуда, заполненного жидкостью, и формы его дна сила статического давления будет одинаковой при условии равенства уровней жидкости и давлений на ее поверхности.

В случае равномерно распределенной нагрузки на дно сосуда точка приложения равнодействующей силы давления и центр тяжести площадки дна совпадают.

**Давление жидкости на произвольно ориентированную плоскую поверхность.** Определим силу гидростатического давления на площадку, лежащую в плоскости стенки, расположенной под углом к горизонту (рис. 2.12).

Для наглядности развернем плоскость стенки вместе с расположенной на ней площадкой на  $90^\circ$  до совпадения ее с плоскостью чертежа.

Очевидно, в этом случае ось  $Ox$  будет направлена слева направо под прямым углом к линии  $Oy$ .

Если на плоскую стенку  $AB$  (рис. 2.12), наклоненную под углом к горизонту, с одной стороны действует жидкость, а с другой –



атмосферное давление, то скалярная величина равнодействующей сил давления, воспринимаемая стенкой

$$\begin{aligned} P &= (p_T - p_a)S = (\Delta p + \rho g h_T)S = \\ &= \rho g (h_T + h_{\Pi})S, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где  $p_T$  – абсолютное давление в центре тяжести смоченной части стенки (точка  $T$  на рис. 2.12);  $p_a$  – атмосферное давление;  $S$  – площадь смоченной части стенки;  $\Delta p = p_0 - p_a = \rho g h_{\Pi}$  – разность между абсолютным давлением  $p_0$  на свободной поверхности жидкости и атмосферным давлением;  $h_T$  – расстояние по вертикали от центра тяжести смоченной части стенки до свободной поверхности жидкости;  $h_{\Pi}$  – расстояние по вертикали от свободной поверхности до пьезометрической плоскости.

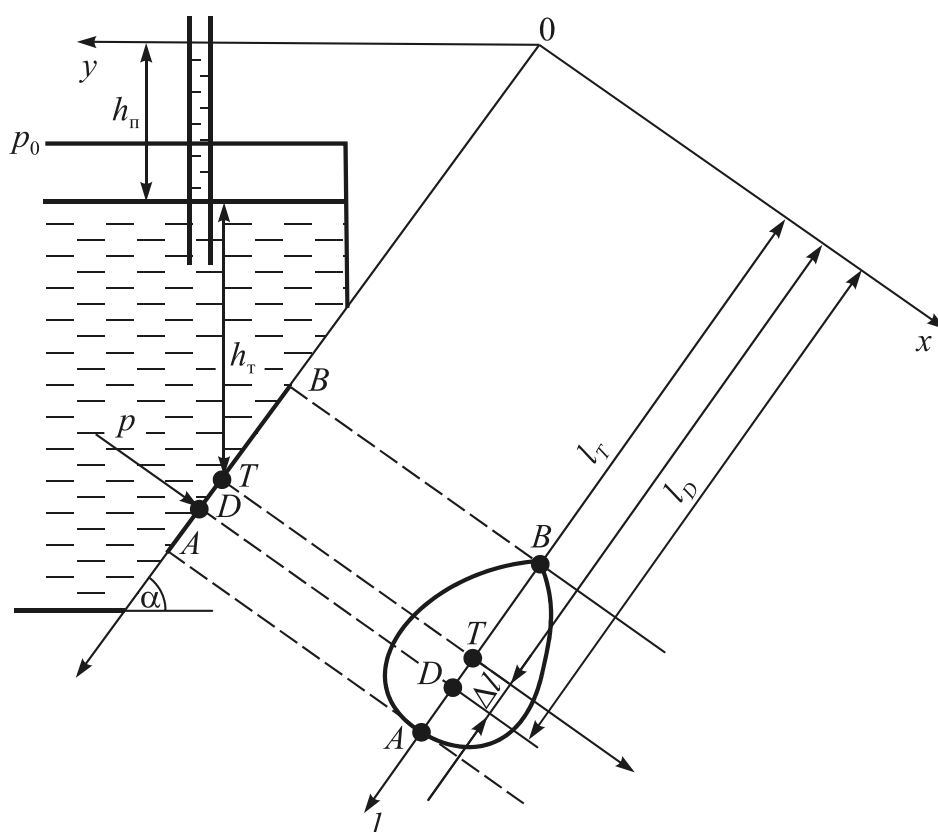


Рис. 2.12. Гидростатическое давление на наклонную плоскую стенку (обозначения согласно тексту)

Точка пересечения линии действия равнодействующей сил давления  $P$  с плоскостью стенки называется центром давления (точка  $D$  на рис. 2.12).

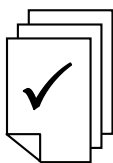
Положение центра давления относительно пьезометрической плоскости находится из условия равенства моментов действующих в данной системе сил и определяется выражением

$$l_D = l_T + \frac{J}{l_T S}, \quad (2.16)$$

где  $l_D$  и  $l_T$  – соответственно расстояния до центра давления и центра тяжести, отсчитываемые вдоль плоскости стенки от линии пересечения ее с пьезометрической плоскостью (см. рис. 2.12);  $J$  – момент инерции площади смоченной части стенки относительно горизонтальной оси, проходящей через ее центр тяжести.

Расстояние между центром давления и центром тяжести

$$\Delta l = l_D - l_T = \frac{J}{l_T S} = \frac{\rho g J}{P} \sin \alpha. \quad (2.17)$$



**Пример 2.3.** Для слива жидкой субстанции из хранилища имеется квадратный патрубок со стороной  $h = 0,3$  м, закрытый шарнирно закрепленной в точке  $O$  крышкой. Крышка опирается на торец патрубка и расположена под углом  $45^\circ$  ( $\alpha = 45^\circ$ ) к горизонту (рис. 2.13).



Рис. 2.13. К примеру 2.3

Определить (без учета трения в шарнире  $O$  и рамке  $B$ ) силу  $F$  натяжения троса, необходимую для открытия крышки  $AO$ , если уровень жидкости  $H = 3$  м, давление над ней, измеренное манометром,  $p_m = 5$  кПа, а плотность  $\rho = 700$  кг/м<sup>3</sup>. Вес крышки не учитывать.

*Решение.* Найдем силу давления на стенку  $AO$ .

Рассматриваемой смоченной поверхностью является прямоугольная наклонная стенка высотой  $h / \sin \alpha$  и шириной  $h$ , т. е.  $s = h^2 / \sin \alpha$ .

Центр тяжести этой стенки находится на глубине  $h_T = H - h / 2$ ,  $\Delta p = p_m$ , т. е.

$$P = \left[ p_m + \rho g \left( H - \frac{h}{2} \right) \right] s =$$

$$= \left[ 5 \cdot 10^3 + 700 \cdot 9,8 \cdot \left( 3 - \frac{0,3}{2} \right) \right] \frac{0,3^2}{\sin 45^\circ} = 3,13 \text{ кН.}$$

Найдем теперь расстояние между центром давления и центром тяжести крышки:

$$h_n = \frac{\Delta p}{\rho g} = \frac{p_m}{\rho g} = \frac{5 \cdot 10^3}{9,8 \cdot 700} = 0,729 \text{ м.}$$

Тогда

$$l_T = \frac{h_n H - \frac{h}{2}}{\sin \alpha} = \frac{0,729 \cdot 3 - 0,15}{0,707} = 5,06 \text{ м.}$$

Момент инерции прямоугольной стенки относительно горизонтальной оси, проходящей через центр тяжести стенки:

$$J = \left( \frac{h}{\sin \alpha} \right)^3 \frac{h}{12} = \frac{h^4}{12 \sin^3 \alpha}.$$

Тогда

$$\Delta l = \frac{J}{l_T s} = \frac{h^4 \sin \alpha}{12 l_T h^2 \sin^3 \alpha} = \frac{h^2}{12 l_T \sin^2 \alpha} =$$

$$= \frac{0,09}{12 \cdot 5,06 \cdot 0,5} = 0,003 \text{ м.}$$

Найдем силу натяжения троса из уравнения моментов сил, взятых относительно оси шарнира

$$F \cdot OA \cos \alpha - P(OT + \Delta l) = 0.$$

Тогда

$$F = \frac{P(OT + \Delta l)}{h} = \frac{P \left( \frac{h}{2 \sin \alpha} + \Delta l \right)}{h} =$$

$$= \frac{3,13 \cdot 10^3}{0,3} \left( \frac{0,3}{2 \cdot 0,707} + 0,003 \right) = 2,24 \text{ кН.}$$



### Контрольные задания по теме

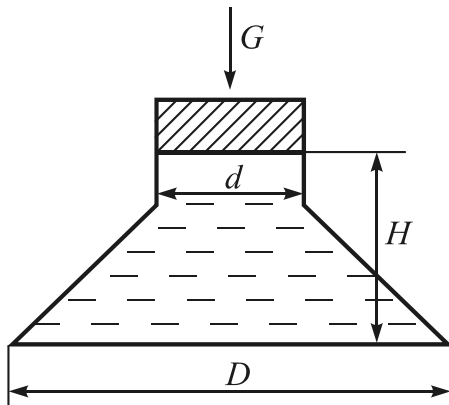


Рис. 2.14. К задаче 2.8

**Задача 2.8.** Дно сосуда (рис. 2.14), заполненного водой, имеет диаметр  $D = 1$  м. Глубина сосуда  $H = 0,7$  м. Вес и диаметр поршня соответственно равны –  $G = 300$  Н,  $d = 0,5$  м. Найти силу давления воды на дно сосуда.

*Ответ:* 6,59 кН.

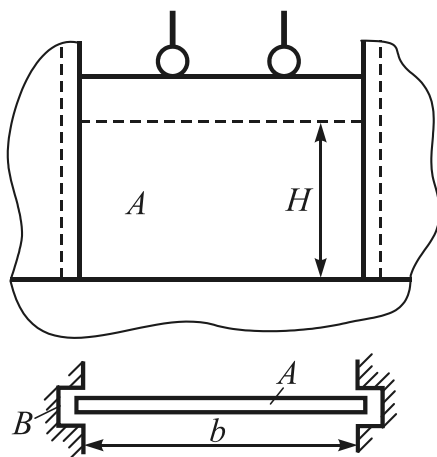


Рис. 2.15. К задаче 2.9

**Задача 2.9.** Вертикальный щит  $A$  (рис. 2.15), перекрывающий водослив плотины, может перемещаться в пазах  $B$  вверх и вниз. Глубина жидкости  $H = 1,4$  м, ширина щита  $b = 2,6$  м. Какую силу нужно приложить, чтобы поднять щит, если вес его  $G = 32$  кН, а коэффициент трения между щитом и поверхностью пазов  $l = 0,3$ ?

*Ответ:*  $F = 39,5$  кН.

**Задача 2.10.** Наклонный прямоугольный щит плотины шарнирно закреплен на оси  $O$  (рис. 2.16). Угол наклона щита  $\alpha = 60^\circ$ , а расстояние от его нижней кромки до оси шарнира  $a = 1,3$  м.

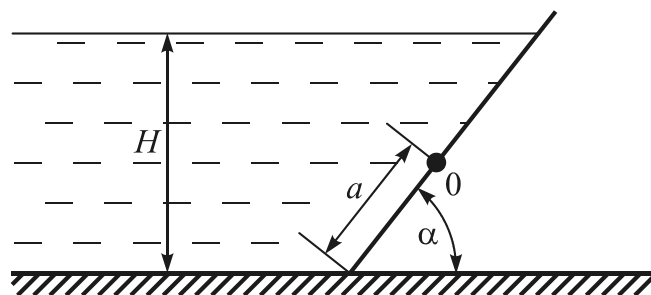


Рис. 2.16. К задаче 2.10

Вес щита не учитывать. Определить при каком уровне воды  $H$  щит опрокинется, если угол наклона щита  $\alpha = 60^\circ$ , а расстояние от его нижней кромки до оси шарнира  $a = 1,3$  м. Вес щита не учитывать.

*Ответ:*  $H = 3,38$  м.

**Задача 2.11.** Горизонтальная цилиндрическая цистерна (рис 2.17) диаметром  $d = 2,4$  м, заполнена бензином плотностью  $\rho = 760$  кг/м<sup>3</sup>. Уровень бензина в горловине находится на расстоянии  $H = 2,7$  м от дна. Цистерна герметично закрыта и избыточное давление на поверхности жидкости составляет 40 кПа. Определить силу давления жидкости на плоскую торцевую стенку. Найти также положение центра давления относительно центра тяжести стенки.

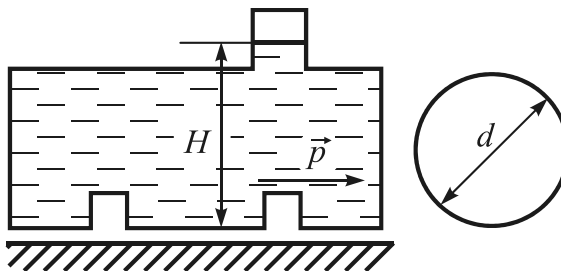


Рис. 2.17. К задаче 2.11

*Ответ:*  $P = 231$  кН,  $\Delta l = 0,052$  м.

**Задача 2.12.**

Закрытый резервуар высотой  $H = 10$  м (рис. 2.18) разделен на два отсека вертикальной прямоугольной перегородкой шириной  $b = 4$  м. В левом отсеке уровень нефти  $H_1 = 8$  м ( $\rho_n = 850$  кг/м<sup>3</sup>), в правом уровень воды  $H_2 = 5$  м ( $\rho_v = 1000$  кг/м<sup>3</sup>). Избыточное давление паров над нефтью  $p_{и} = 19,6$  кПа.

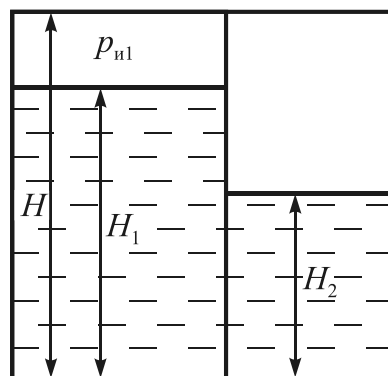


Рис. 2.18. К задаче 2.12

Определить равнодействующую сил давления на перегородку и точку ее приложения<sup>9</sup>.

*Ответ:*  $P = 136 \cdot 10^4$  Н; расстояние от низа перегородки до точки приложения равнодействующей сил давления равно 4,46 м. Сила  $P$  действует со стороны левого отсека.

<sup>9</sup> В левом отсеке, кроме силы давления нефти и паров на смоченную часть перегородки, нужно учесть силу давления паров на несмоченную часть стенки.

**Задача 2.13.** Квадратное отверстие со стороной  $a = 0,6$  м в стенке резервуара с водой (рис. 2.19) закрыто щитом  $OA$ , который прижимается грузом  $G$ , подвешенным на рычаге длиной  $x = 0,5$  м. Расстояние от верхней кромки отверстия до оси вращения  $Oh = 0,3$  м. Найти минимальный вес груза  $G$ , достаточный для удержания воды в резервуаре на уровне  $H = 2$  м, если избыточное давление на поверхности  $p_{и} = 5$  кПа. Будет ли удерживаться щит без груза, если над водой создать вакуум  $p_{в} = 19,6$  кПа? Найти в этом случае положение пьезометрической плоскости, силу давления на щит и положение центра давления.

Весом щита, рычага, а также трением в шарнире пренебречь.

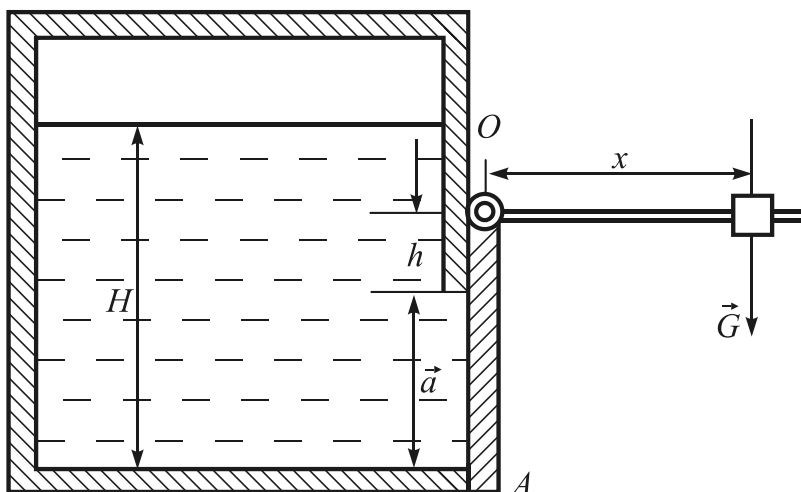


Рис. 2.19. К задаче 2.13

*Ответ:*  $G = 9,57$  кН. Щит будет удерживаться, так как сила  $P = 1,06$  кН направлена внутрь резервуара; пьезометрическая плоскость проходит по дну резервуара. Центр давления расположен на расстоянии  $2a / 3 = 0,4$  м от дна резервуара.

## 2.4. Сила статического давления жидкости на криволинейные стенки. Закон Архимеда

В общем случае система сил давления, приложенных к криволинейной поверхности, приводится к главному вектору и главному моменту сил давления.

В частных случаях (сфера, цилиндр с вертикальной или горизонтальной осью) система сил давления приводится только к их равнодействующей (главному вектору).

Равнодействующая сил давления  $\vec{P}$  определяется из выражения

$$|\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}. \quad (2.18)$$

Положение в пространстве вектора силы  $\vec{P}$  задано направляющими косинусами.

Примем, что ось  $z$  направлена вертикально вверх.

Горизонтальная составляющая  $P_r$  ( $P_x$  или  $P_y$ ) вычисляется по формуле

$$P_r = (p_t - p_a)S_B, \quad (2.19)$$

где  $S_B$  – площадь проекции рассматриваемой криволинейной поверхности на вертикальную плоскость, нормальную к соответствующей оси координат ( $yoz$  для силы  $P_x$ ,  $xoz$  для силы  $P_y$ );  $p_t$  – абсолютное давление в центре тяжести площади  $S_B$ ;  $p_a$  – атмосферное давление.

Направление действия силы  $P_r$  зависит от знака величины  $p_t - p_a$  (при  $p_t - p_a > 0$  – наружу, при  $p_t - p_a < 0$  – вовнутрь жидкости), причем линия ее действия проходит через центр давления площади  $S_R$ .

Вертикальная составляющая силы  $\vec{P}$  определяется весом тела давления:

$$P_z = \rho g V_{т.д}, \quad (2.20)$$

где  $V_{т.д}$  – объем тела давления.

*Телом давления* называется объем, ограниченный рассматриваемой криволинейной поверхностью, ее проекцией на пьезометрическую поверхность и боковой цилиндрической поверхностью, образующейся при проектировании (рис. 2.20).

Для криволинейной поверхности  $ABC$  (см. рис. 2.20) *телом давления* будет фигура  $ABCEFA$ , а для криволинейной поверхности  $ADC$  – фигура  $ADCEFA$ .

Направление действия вертикальной составляющей силы давления  $\vec{P}$  зависит от направления элементарных составляющих этой силы.

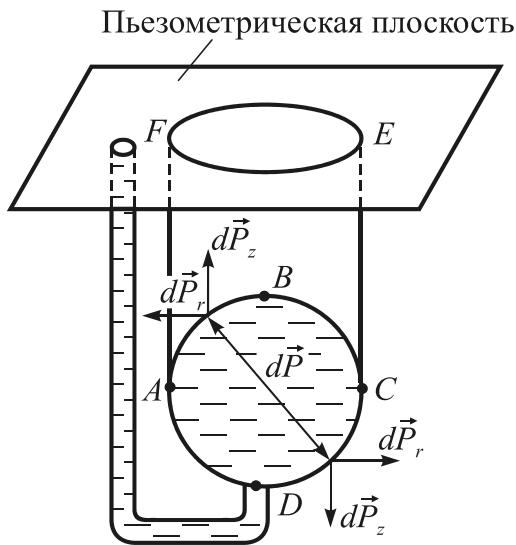


Рис. 2.20. К определению тела давления

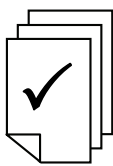
На примере рис. 2.20 видно, что давление в любой точке криволинейных поверхностей – как  $ABC$ , так и  $ADC$  – избыточное (пьезометрическая плоскость лежит выше этих поверхностей). Следовательно, элементарные силы давления  $d\vec{P}$ , действующие по нормали к касательной в любой точке этих поверхностей, направлены наружу.

Разложение силы давления на составляющие показывает, что вертикальная составляющая действует на поверхность  $ABC$  вверх,

а на поверхность  $ADC$  – вниз. Результирующая сила направлена вниз и равна весу реальной жидкости в объеме  $ABCD$ , являющемся результирующим объемом двух тел давления. Линия действия вертикальной составляющей силы  $\vec{P}$  проходит через центр тяжести рассматриваемого тела давления.

**Закон Архимеда** – на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила  $\vec{P}$ , равная по величине весу жидкости в объеме погруженной части тела  $V$ :

$$|P| = \rho g V. \quad (2.21)$$



**Пример 2.4.** Секторный щит радиусом  $R$  и шириной  $B$  (рис. 2.21) перегородивает канал с жидкостью.

Определить силу давления жидкости и направление ее действия.

*Решение:*

1. Вертикальная составляющая силы давления

$$P_z = \rho g V_{\text{т.д}},$$

где  $V_{\text{т.д}} = \pi R^2 B / 4$ .

Пьезометрическая поверхность в этой задаче совпадает со свободной поверхностью жидкости в канале, так как на ней давление атмосферное.

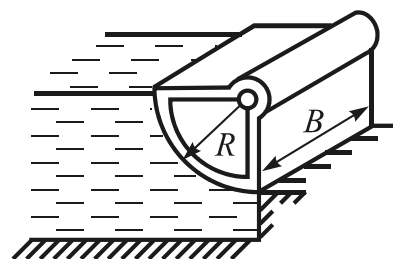


Рис. 2.21. К примеру 2.4



Сила  $\vec{P}_z$  приложена в центре тяжести объема тела давления и направлена вверх, так как любая элементарная сила давления жидкости  $d\vec{P}$  в любой точке щита дает при разложении вертикальную составляющую, направленную вверх.

2. Горизонтальная составляющая силы давления

$$P_r = (p_r - p_a)S_b = \rho g \frac{R}{2} RB$$

направлена слева направо (все  $d\vec{P}$  направлены от жидкости к стенке).

3. Результирующая сила давления жидкости

$$P = \sqrt{P_r^2 + P_z^2} = \rho g BR^2 \sqrt{\frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}} \approx 0,93 \rho g R^2$$

направлена по радиусу к оси щита; угол ее наклона к горизонту определяется из выражения:

$$\cos \alpha = P_r / P = \frac{1}{2 \cdot 0,93} = 0,538.$$

Следовательно,  $\alpha = 57^\circ 27'$ .

Выталкивающая Архимедова сила приложена в центре тяжести объема погруженной части тела, называемом центром водоизмещения.

Плавающее тело обладает остойчивостью (способностью возвращаться в состояние равновесия после получения крена) в случае, если точка пересечения линии действия выталкивающей силы с осью плавания (метацентр) лежит выше центра тяжести тела.



### Контрольные задания по теме

**Задача 2.14.** Вертикальный цилиндрический резервуар ( $d = 2$  м) закрыт сверху полусферической крышкой того же диаметра весом 19,6 кН и целиком заполнен водой. Затем в отверстие в верхней части крышки ввернули вертикальную трубку пренебрежимо малого диаметра и залили в нее воду. Определить при какой высоте воды в трубке вертикальная составляющая силы давления жидкости

уравновесит вес крышки? Как должна измениться эта высота, если в трубке находится не вода, а керосин ( $\rho = 810 \text{ кг/м}^3$ )?

*Ответ:*  $h = 0,303 \text{ м}$ ;  $\Delta h = 0,374 \text{ м}$ .

**Задача 2.15.** Полностью погруженный поплавок указателя уровня нефти, имеющий среднюю плотность  $900 \text{ кг/м}^3$ , плавает на границе раздела нефти и воды, находящихся в резервуаре-отстойнике. Плотность нефти –  $850 \text{ кг/м}^3$ , воды –  $1000 \text{ кг/м}^3$ . Определить, какая часть объема поплавка находится в воде.

*Ответ:*  $1/3$ .

**Задача 2.16.** Какой объем бензина ( $\rho = 740 \text{ кг/м}^3$ ) можно залить в железнодорожную цистерну внутренним объемом  $50 \text{ м}^3$  и массой  $23 \text{ т}$ , чтобы она еще сохраняла плавучесть в пресной воде? Будет ли при плавании цистерна устойчива?

*Ответ:*  $V = 39 \text{ м}^3$ ; да.

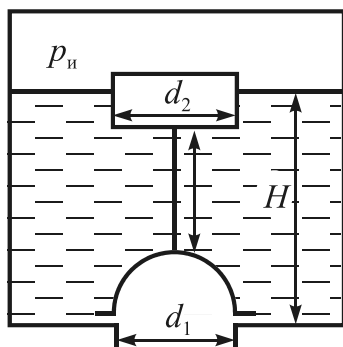


Рис. 2.22. К задаче 2.17

**Задача 2.17.** В днище резервуара с жидкостью ( $\rho = 800 \text{ кг/м}^3$ ) имеется круглое спускное отверстие ( $d = 10 \text{ см}$ ), закрытое полусферическим клапаном (рис. 2.22). Длина цепочки, связывающей поплавок с клапаном  $l = 0,95 \text{ м}$ , вес подвижных частей устройства  $G = 30 \text{ Н}$ , избыточное давление на свободной поверхности жидкости  $p_n = 49 \text{ кПа}$ . Определить, при каком диаметре цилиндрического поплавка  $d_2$  клапан автоматически откроется при достижении уровня жидкости в резервуаре  $H = 2 \text{ м}$ .

*Ответ:*  $d_2 = 0,295 \text{ м}$ .

## 2.5. Относительное равновесие жидкости

*Относительным равновесием жидкости* называется такое состояние, при котором каждая ее частица сохраняет свое положение относительно твердой стенки движущегося сосуда. При этом жидкость перемещается с сосудом как единое целое.

В случае относительного покоя на частицы жидкости массой  $dm$  действуют две массовые силы:

- сила тяжести

$$\vec{dG} = g dm;$$

- сила инерции

$$\vec{F} = -\vec{a} dm,$$

где  $\vec{a}$  – ускорение содержащего жидкость сосуда.

При относительном равновесии рассматриваются две задачи:

- определяется форма поверхности уровня (равного давления);
- выясняется характер распределения давления.

Очевидно, в этом случае следует учитывать силы инерции, дополняющие систему массовых сил, действующих в жидкости, находящейся в состоянии абсолютного покоя.

Для определения формы поверхности равного давления необходимо воспользоваться уравнением *поверхности уровня равного давления* (2.13).

При равномерном прямолинейном движении сосуда с жидкостью силы инерции отсутствуют и условия относительного равновесия совпадают с условиями равновесия в неподвижном сосуде.

В общем случае любое сложное движение сосуда с жидкостью можно представить в виде суммы трех простейших движений: поступательного по вертикали и горизонтали и вращательного.

**Прямолинейное равноускоренное движение сосуда.** При движении сосуда с постоянным ускорением  $\vec{a}$  в плоскости  $xOz$  под углом  $\alpha$  к горизонту (рис. 2.23) вектор напряжения массовых сил одинаков для всех точек жидкости.

В рассматриваемом случае поверхности уровня равного давления – параллельные плоскости, наклоненные к горизонтали под углом  $\varphi$ , для которого

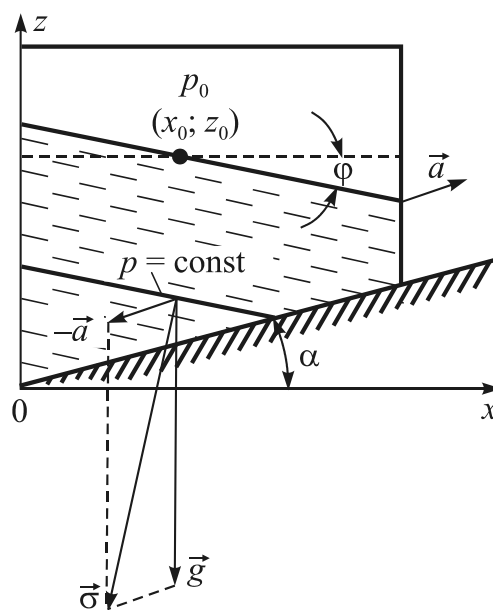


Рис. 2.23. Горизонтальное равноускоренное перемещение сосуда

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dz}{dx} = -\frac{a \cos \alpha}{g + a \sin \alpha}, \quad (2.22)$$

где  $x, z$  – координаты произвольной фиксированной точки свободной поверхности, определяемые объемом жидкости, находящейся в сосуде;  $\alpha$  – угол между направлением движения и горизонтальной плоскостью.

Распределение давления по вертикали описывается следующим соотношением

$$p = p_0 + \rho(g + a \sin \alpha)h, \quad (2.23)$$

где  $h$  – глубина точки под свободной поверхностью;  $p, p_0$  – абсолютное давление на глубине  $h$  и на свободной поверхности соответственно.

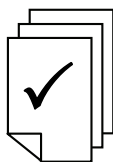
При горизонтальном движении сосуда (рис. 2.25)  $\alpha = 0$  и, соответственно, тангенс угла наклона свободной поверхности к горизонту находится следующим образом:

$$\operatorname{tg} \varphi = -\frac{a}{g}, \quad (2.24)$$

и распределение давления по вертикали имеет вид

$$p = p_0 + \rho gh.$$

При вертикальном движении сосуда (если  $\alpha = 90^\circ$ , то ускорение направлено вверх, если  $\alpha = 270^\circ$  – вниз)  $\varphi = 0$  и свободная поверхность горизонтальна.



**Пример 2.5.** Цистерна с нефтью движется по горизонтальному пути со скоростью  $v_0 = 60$  км/ч (рис. 2.24).

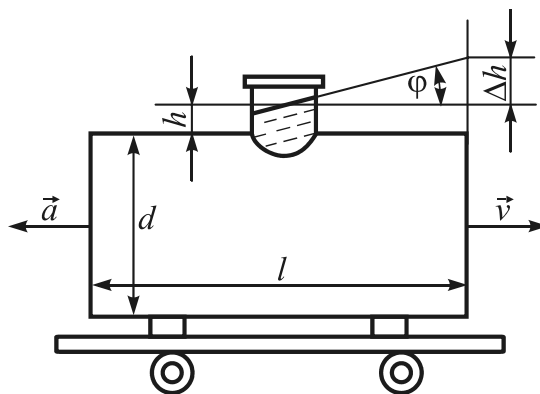


Рис. 2.24. К примеру 2.5

Размеры цистерны:  $d = 3$  м,  $l = 8$  м,  $h = 0,3$  м. Плотность нефти  $\rho = 850$  кг/м<sup>3</sup>. В некоторый момент времени поезд начинает тормозить и, пройдя путь длиной  $L = 100$  м, останавливается.

Считая движение прямолинейным равномерно-замедленным, определить силу  $P$  давления нефти на переднее днище цистерны при движении и в состоянии покоя.

*Решение.* При равномерно-замедленном движении ускорение

$$a = -\frac{v_0^2}{2L} = -\left(\frac{60 \cdot 10^3}{3600}\right)^2 \frac{1}{2 \cdot 100} = -1,39 \text{ м/с}^2;$$

$$\Delta h = \frac{l}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{8}{2} 0,142 = 0,568 \text{ м.}$$

Вычислим высоту, на которой установится продолжение плоскости свободной поверхности жидкости у передней стенки.

Сила давления жидкости на переднюю стенку цистерны:

$$P = \rho g h_t S,$$

где  $h_t$  – глубина погружения центра тяжести стенки под уровень свободной поверхности;  $S$  – площадь стенки.

Поскольку  $h_t = \Delta h + h + d/2$ , то

$$\begin{aligned} P &= \rho g \left( \Delta h + h + \frac{d}{2} \right) \frac{\pi d^2}{2} = \\ &= 850 \cdot 9,8 \cdot (0,568 + 0,3 + 1,5) \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 140 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Ускорение цистерны направлено влево, а напряжение силы инерции переносного движения – вправо. Используя формулу (2.24), определим угол  $\varphi$  наклона свободной поверхности жидкости к горизонту. Так как цистерна движется горизонтально ( $a = 0$ ), то

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= -\frac{a}{g} = \frac{1,39}{9,8} = 0,142; \\ \varphi &= 8,07^\circ. \end{aligned}$$

В состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения ( $\vec{a} = 0$ ) свободная поверхность жидкости горизонтальна, и сила, действующая на торцевую стенку, имеет вид

$$P = \rho g \left( h + \frac{d}{2} \right) \frac{\pi d^2}{2} = 850 \cdot 9,8 (0,3 + 1,5) \frac{3,14 \cdot 3^2}{4} = 106 \text{ кН.}$$

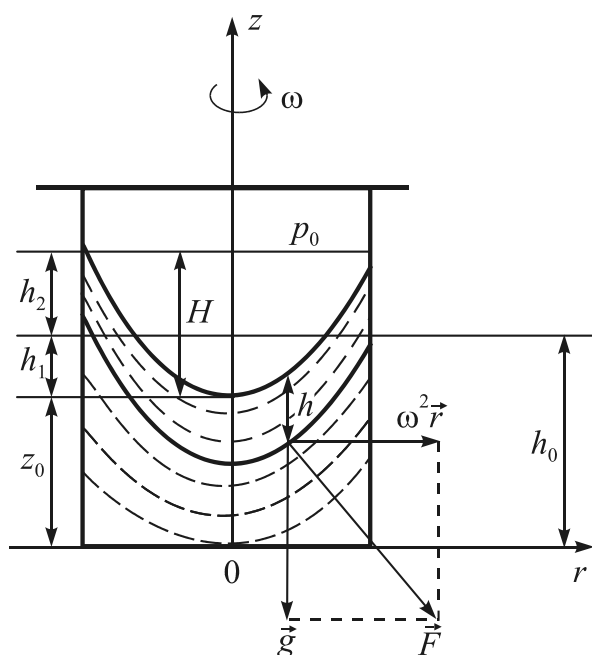


Рис. 2.25. Вращение цилиндрического сосуда вокруг вертикальной оси

**Равномерное вращение сосуда вокруг вертикальной оси.** В случае равномерного вращения цилиндрического сосуда вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 2.25) уравнение любой изобарической поверхности ( $p = \text{const}$ ) имеет вид

$$z = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g} - h, \quad (2.25)$$

где  $z$  – координата точки пересечения свободной поверхности с осью вращения;

$$h = \frac{p - p_0}{\rho g}. \quad (2.26)$$

Изобарические поверхности – параболоиды вращения, осью которых совпадает с осью  $oz$ , а вершины смещены вдоль этой оси. Форма изобарических поверхностей не зависит от плотности жидкости.

Изменение давления по вертикали ( $A$  – глубина точки под свободной поверхностью):

$$p = p_0 + \rho gh,$$

т. е. такое же, как в неподвижном сосуде.



**Пример 2.6.** Вертикальный цилиндрический сосуд диаметром  $D = 40$  см и высотой  $H = 100$  см наполнен до половины водой (рис. 2.26).

Определить, с каким предельным числом оборотов можно вращать этот сосуд около его геометрической вертикальной оси, чтобы из него не выливалась вода, а также определить силу давления жидкости на дно сосуда.

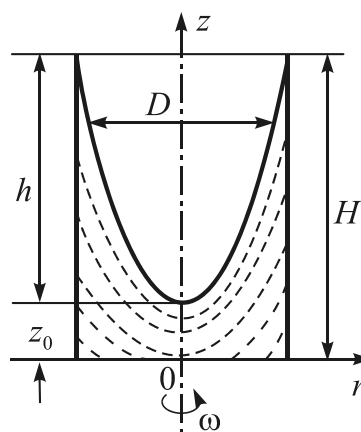


Рис. 2.26. К примеру 2.6

*Решение.* Из рис. 2.26 видно, что

$$H = z_0 + h.$$

В соответствии с формулами (2.25) и (2.26)

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 R^2}{4g};$$

$$h = \frac{\omega^2 R^2}{2g}.$$

Тогда

$$H = z_0 + h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

С другой стороны, начальный уровень в резервуаре  $h_0$  по условию равен  $H/2$  и, следовательно,

$$H = \frac{H}{2} + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Соответственно

$$\omega = \frac{\sqrt{2gH}}{R} = \frac{\sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 1}}{0,2} = 22,1 \text{ с}^{-1}.$$

Предельное число оборотов в минуту:

$$n = 60 \frac{\omega}{2\pi} = 211 \text{ об/мин.}$$

Для определения силы давления жидкости на дно сосуда найдем закон распределения избыточного давления, полагая  $p_0 = p_a$ .

Тогда

$$p_{\text{н}} = p - p_a = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2} + \rho g(z_0 - z).$$

Неизвестную величину вершины параболоида  $z_0$  определим по формуле

$$z_0 = h_0 - \frac{\omega^2 r^2}{2g} = \frac{H}{2} - \frac{H}{2} = 0,$$

т. е. параболоид свободной поверхности касается дна сосуда, и закон распределения избыточного давления имеет вид

$$p_{\text{н}} = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2g} - \rho g z;$$

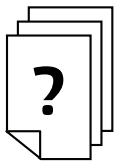
$$H = z_0 + h = h_0 + \frac{\omega^2 R^2}{4g}.$$

Для точек на дне сосуда ( $z = 0$ ) избыточное давление выглядит следующим образом:

$$p_{\text{и}} = \rho \frac{\omega^2 r^2}{2g}.$$

Силу давления на дно сосуда найдем как сумму элементарных сил давления, действующих на элементарные кольцевые площадки, равные  $2\pi r dr$ :

$$\begin{aligned} P &= \int_0^R p_{\text{и}} 2\pi r dr = \pi \rho \omega^2 \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} \rho \omega^2 R^4 = \\ &= \frac{\pi}{4} 10^3 \cdot 22,1^2 \cdot 0,2^4 = 614 \text{ Н.} \end{aligned}$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 2.18.** Призматический сосуд (рис. 2.27) длиной  $l = 3$  м и шириной (нормальной к плоскости рисунка) 1 м, перемещающийся горизонтально с постоянным ускорением  $a = 0,4 g$ , разделен на два отсека, заполненных водой до высоты  $h_1 = 1$  м и  $h_2 = 1,75$  м. Определить результирующую силу давления воды на перегородку, разделяющую отсеки.

*Ответ:*  $P = P_2 - P_1 = 2,17$  кН и ее линия действия проходит на расстоянии 0,738 м от дна резервуара.

**Задача 2.19.** Измеритель ускорения тела, движущегося горизонтально, представляет собой закрепленную на нем U-образную трубку малого диаметра, наполненную жидкостью (рис. 2.28).

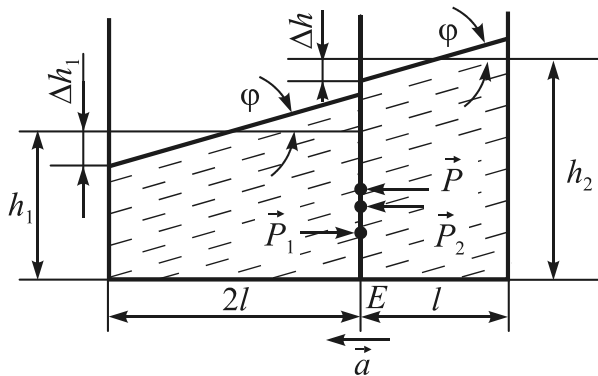


Рис. 2.27. К задаче 2.18

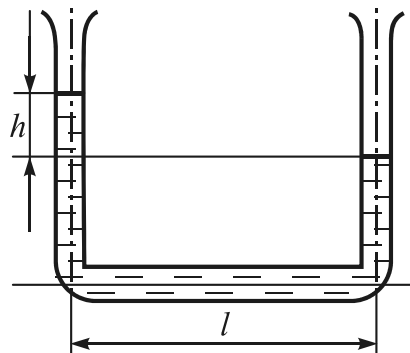


Рис. 2.28. К задаче 2.19



Определить, с каким ускорением движется тело, если при движении установилась разность уровней жидкости в коленах измерителя  $h = 75$  мм, при расстоянии между ними  $l = 250$  мм.

Ответ:  $a = 2,94$  м/с<sup>2</sup>.

**Задача 2.20.** Сосуд, имеющий форму усеченного конуса, заполнен водой до половины высоты и приводится во вращение вокруг своей вертикальной оси (рис. 2.29). Определить наибольшее число оборотов, при котором вода не будет выливаться из сосуда, если  $h = a = 0,8$  м и угол  $\alpha = 45^\circ$ .

Ответ:  $n_{\max} = 26,4$  об/мин =  $0,44$  об/с.

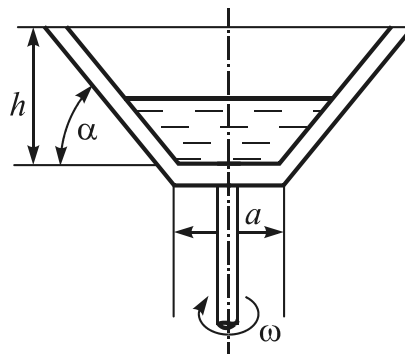


Рис. 2.29. К задаче 2.21

**Задача 2.21.** Закрытый цилиндрический сосуд радиусом  $r_1 = 50$  см равномерно вращается относительно вертикальной оси. При этом уровень жидкости в открытой трубке малого диаметра, установленной на расстоянии  $r_2 = 35$  см от центра, расположен на высоте  $h = 40$  см (рис. 2.30). Плотность жидкости равна  $800$  кг/м<sup>3</sup>; атмосферное давление –  $760$  мм рт. ст. Определить наибольшую угловую скорость, при которой сохранится относительное равновесие жидкости. Давление насыщенных паров жидкости равно  $49$  кПа.<sup>10</sup>

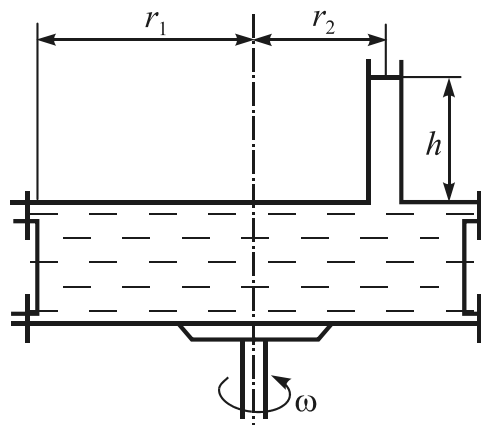


Рис. 2.30. К задаче 2.22

**Задача 2.22.** Закрытый сверху крышкой цилиндр с диаметром  $D = 0,9$  м и высотой  $H = 0,8$  м содержит воду в количестве  $W = 0,35$  м<sup>3</sup> и вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью  $\omega = 100$  с<sup>-1</sup>. Определить усилия, действующие при этом

<sup>10</sup> Равновесие жидкости нарушится, когда минимальное абсолютное давление будет равно давлению насыщенного пара жидкости.

на крышку цилиндра, если давление на поверхности воды атмосферное.

*Ответ:*  $P = 133$  кН.



### Контрольные вопросы по разделу

1. Что такое гидростатическое давление?
2. Назовите свойства гидростатического давления.
3. Запишите дифференциальное уравнение равновесия Эйлера.
4. Какой вид имеет дифференциальное уравнение поверхности уровня?
5. Перечислите и интерпретируйте свойства поверхности уровня равного давления.
6. Назовите условие равновесия невесомой жидкости.
7. Назовите условие равновесия жидкости в поле силы тяжести.
8. Дайте геометрическую и энергетическую интерпретацию основного уравнения гидростатики.
9. Как выглядят условия относительного равновесия жидкости в поле силы тяжести?
10. Какие вы знаете условия равновесия газа в поле силы тяжести?
11. В соответствии с какой формулой можно описать распределение давления воздуха по высоте?
12. Что описывает формула барометрического нивелирования?
13. Что такое равнодействующая сил давления, воспринимаемая стенкой?
14. Что называется центром давления?
15. Как определяется равнодействующая сил давления на плоскую горизонтальную поверхность?
16. Как выглядит поверхность равного давления для случая плоской горизонтальной поверхности?
17. На основании какого баланса определяется равнодействующая сил давления на произвольно ориентированную плоскую поверхность?
18. Каким выражением определяется положение центра давления относительно пьезометрической плоскости?
19. Каким выражением определяется расстояние между центром давления и центром тяжести смоченной поверхности?

20. Что называется телом давления?
21. Дайте словесное выражение закона Архимеда.
22. Что называется относительным покоем жидкости?
23. Какие массовые силы действуют на частицы жидкости в состоянии относительного покоя?
24. Каким соотношением описывается распределение давления в состоянии относительного покоя при равноускоренном движении сосуда с жидкостью?
25. Что представляют собой поверхности уровня равного давления при равноускоренном движении сосуда с жидкостью?
26. Каким соотношением описывается распределение давления в состоянии относительного покоя при равномерном вращении сосуда с жидкостью?
27. Что представляют собой поверхности уровня равного давления при равномерном вращении сосуда с жидкостью?



## КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА

### 3.1. Основные понятия кинематики жидкости и газа

*Методы Лагранжа и Эйлера кинематического исследования течения жидкости.* С целью получения исчерпывающей картины течения необходимо для каждой частицы жидкости знать ее положение в пространстве в каждый момент времени. Чтобы составить такую картину, необходимо, прежде всего, как-то обозначить отдельные частицы жидкости, чтобы отличать их друг от друга. Это можно сделать следующим образом.

В произвольный момент времени  $t = t_0$  отнесем рассматриваемое течение к произвольной системе координат (например, к прямоугольной). Тогда каждой частице жидкости будет соответствовать определенная тройка чисел  $a, b, c$ . Эти начальные пространственные координаты и будут служить обозначением рассматриваемой частицы. Пусть в произвольный момент времени  $t$  ее координаты будут  $x, y, z$ .

Следовательно, для составления картины течения необходимо знать функции:

$$\begin{cases} x = F_1(a, b, c, t), \\ y = F_2(a, b, c, t), \\ z = F_3(a, b, c, t). \end{cases} \quad (3.1)$$

Систему уравнений (3.1) называют *уравнениями Лагранжа*.

Для полной характеристики состояния движущейся жидкости необходимо знать еще давление  $p$ , а для жидкости переменной плотности  $\rho$  – также и плотность.

Однако доведение такого метода исследования течения жидкости до конечного численного результата удастся только в немногих, особенно простых случаях.

Поэтому обычно предпочитают пользоваться другим, более простым методом, позволяющим указать, что происходит в каждой точке пространства в каждый момент времени. Следовательно, при этом методе исследования индивидуальная судьба отдельных частиц оставляется без внимания.

Если рассматриваемое течение установившееся, т. е. не изменяющееся во времени, то для получения картины движения достаточно указать величину и направление скорости в каждой точке пространства, занятого потоком; кроме того, для полного описания состояния движения необходимо определить также давление, а при переменной плотности – и саму плотность. Если же течение неустановившееся, т. е. изменяющееся во времени, то скорость и давление (в необходимом случае и плотность) должны быть указаны для каждого момента времени.

Математически эти указания даются обычно в виде зависимостей, связывающих три проекции скорости  $u$ ,  $v$ ,  $w$  на прямоугольные оси координат (в необходимом случае также давление  $p$  и плотность  $\rho$ ) с пространственными координатами  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и временем  $t$ , т. е. в виде уравнений

$$\begin{cases} u_x = f(x, y, z, t), \\ u_y = f(x, y, z, t), \\ u_z = f(x, y, z, t). \end{cases} \quad (3.2)$$

Систему уравнений (3.2) называют *уравнениями Эйлера*, хотя Эйлеру были известны обе системы (3.1) и (3.2).

Кинематика одного и того же потока может изучаться как методом Эйлера, так и методом Лагранжа. Координаты Эйлера и Лагранжа связаны друг с другом. В большинстве случаев используют метод Эйлера.

***Установившееся и неустановившееся движение.*** Все случаи течения жидкости или газа можно разделить на две группы: *установившееся* и *установившееся* движение.

*Установившееся* течения описываются системой уравнений (3.2), т. е. в любой точке параметры, характеризующие поток, являются функцией не только координат, но и времени.

Движение жидкости или газа будет *установившимся*, если характеризующие его параметры не зависят от времени. В этом случае

уравнения, характеризующие распределение скорости течения жидкости, имеют вид

$$\begin{cases} u_x = f(x, y, z), \\ u_y = f(x, y, z), \\ u_z = f(x, y, z). \end{cases} \quad (3.3)$$

**Равномерное и неравномерное движение.** Установившееся течение может быть равномерным и неравномерным. При равномерном движении жидкости или газа скорости течения в сходственных точках постоянны независимо от координат этих точек. Примером такого движения может служить течение несжимаемой жидкости с постоянным расходом в трубе постоянного сечения.

**Линия тока, уравнение линии тока.** Линией тока называют кривую, проведенную внутри потока во всех точках касательную к скорости течения жидкости (рис. 3.1). При установившемся течении в каждой данной точке потока определяется скорость, величина и направление которой не зависят от времени, поэтому линия тока и траектория элементарно малой жидкой частицы совпадают.

Если движение неустановившееся, то в заданной точке в потоке направление скорости изменяется во времени (рис. 3.2).

Следовательно, с течением времени изменяются и проходящие через данную точку линии тока.

В точке потока с координатами  $x, y, z$  составляющие скорости вдоль осей координат  $u_x, u_y, u_z$ .

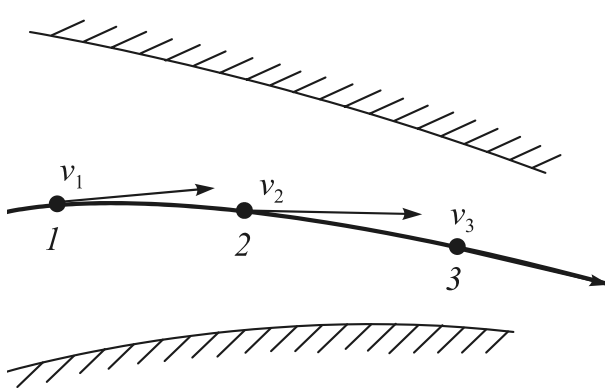


Рис. 3.1. Линия тока

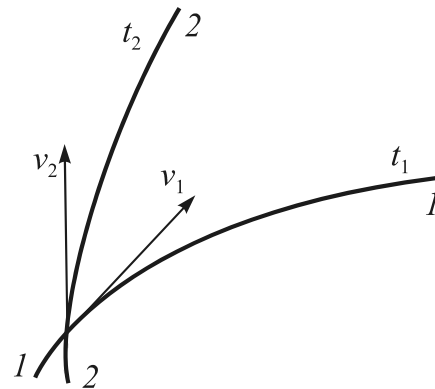


Рис. 3.2. Изменение направления линии тока при неустановившемся движении

При перемещении вдоль линии тока на расстояние  $ds$  в точку с координатами  $x + dx, y + dy, z + dz$ , получим

$$u_x / dx = u_y / dy = u_z / dz. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) представляет собой *уравнение линии тока*.

**Трубка тока, элементарная струйка, элементарный расход.**

В потоке жидкости проведем замкнутый контур, ограничивающий поверхность элементарно малой площади  $\Delta\omega$ . Через каждую точку контура может быть проведена линия тока (рис. 3.3).

Поверхность, образованная этими линиями тока, называется *трубкой тока*. Скорости жидкости – касательные к поверхности трубки тока, поэтому между жидкостью, движущейся в трубке тока, и остальным потоком нет обмена массами жидкости. Масса жидкости, текущей внутри трубки тока, называется *элементарной стружкой*.

Совокупность элементарных струек образует поток жидкости или газа.

Проведем в трубке тока сечение нормальное к направлению скорости. Такая поверхность называется *живым сечением* струйки. Произведение площади живого сечения и скорости называется *элементарным расходом* жидкости или газа.

Если провести сечение в потоке таким образом, чтобы его поверхность в любой точке была нормальна к направлению соответствующего вектора скоростей, то площадь этой поверхности будет равна сумме живых сечений струек. Такая поверхность называется *живым сечением потока*.

*Смоченный периметр* – это та часть периметра, вдоль которой жидкость соприкасается с твердыми стенками канала (трубы).

*Гидравлическим радиусом* называют отношение площади живого сечения к смоченному периметру.

*Средняя скорость потока жидкости* – отношение расхода к площади живого сечения потока.

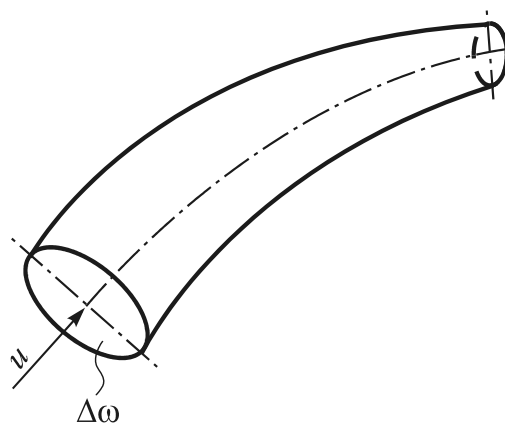


Рис. 3.3. Трубка тока

## 3.2. Уравнение неразрывности

*Уравнение неразрывности при одномерном описании установившихся потоков.* В реальных потоках жидкостей и газов материя нигде не исчезает и нигде вновь не создается. Поэтому мы можем рассматривать только такие скоростные поля, которые удовлетворяют требованию сохранения материи или массы.

Проще всего математически сформулировать это требование для установившихся движений. В этом случае через каждое поперечное сечение трубки тока должна протекать в единицу времени одна и та же масса жидкости

Пусть  $F$  есть поперечное сечение трубки тока в каком-либо месте,  $u$  – средняя скорость в этом сечении,  $\rho$  – плотность в этом сечении.

Тогда объем жидкости, протекающий в единицу времени через рассматриваемое сечение, будет равен произведению  $Fu$ , а масса жидкости, протекающая через это же сечение, будет равна  $\rho Fu$ .

Таким образом, требование сохранения массы сводится к тому, чтобы во всех поперечных сечениях одной и той же трубки тока величина  $\rho Fu$  имела бы постоянное значение, т. е. чтобы соблюдалось условие:

$$\rho Fu = \text{const.} \quad (3.5)$$

Отсюда следует, что внутри установившегося потока жидкая струйка нигде не может закончиться. Она либо должна простираться от одной границы рассматриваемого пространства до другой, либо должна быть замкнутой.

Для несжимаемых потоков уравнение (3.5) преобразуется к виду

$$Fu = \text{const.}$$

Согласно этому уравнению, скорость жидкой струйки обратно пропорциональна ее поперечному сечению.

Уравнение (3.5) приобретает особенно простой и наглядный смысл в том случае, когда весь поток можно рассматривать как одну жидкую струйку.

В этом случае поперечные сечения жидкой струйки заранее известны, и средняя скорость в каждой точке такого несжимаемого потока определяется из уравнения



$$Fu = Q,$$

где  $Q$  – так называемый объемный расход жидкости (или мощность потока), т. е. объем, протекающий через поперечное сечение потока в единицу времени.

Для сжимаемых потоков имеет место аналогичное уравнение

$$\rho Fu = G,$$

где  $G$  – масса, протекающая через поперечное сечение потока в единицу времени, т. е. массовый расход жидкости или газа.

Но так как в сжимаемых потоках плотность зависит от давления, то теперь для определения скорости одного только приведенного уравнения недостаточно – требуется дополнительно уравнение состояния жидкости или газа.

**Вид уравнения неразрывности для установившегося движения несжимаемой среды.** При выводе дифференциальной формы условия сплошности (неразрывности) будем двигаться от простого к сложному.

Если поток установившийся и несжимаемый, то для его описания достаточно только одной независимой переменной, а именно расстояния рассматриваемого поперечного сечения от какой-нибудь начальной точки, измеренного вдоль центральной линии трубки тока. В таком случае говорят об одномерном представлении потока в отличие от трехмерного представления, когда полностью учитывается пространственное изменение скорости и других величин.

При трехмерном рассмотрении течений, математическое выражение условия сохранения массы проще всего получить, если вычислить количество жидкости, втекающей и вытекающей в небольшой параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  (рис. 3.4), и приравнять эту разность к изменению массы в рассматриваемом объеме.

Выполним эти вычисления для несжимаемой жидкости.

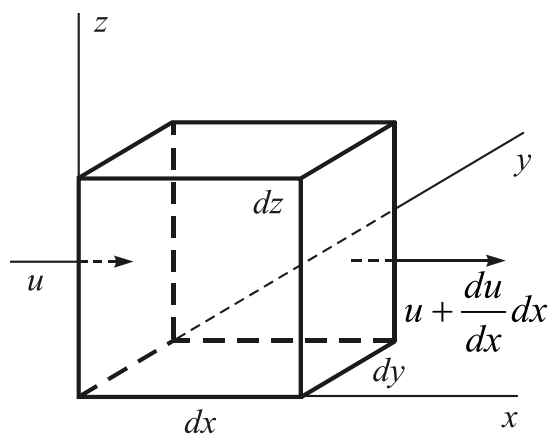


Рис. 3.4. К выводу уравнения неразрывности несжимаемой жидкости

Обозначим проекции скорости на оси координат через  $u$ ,  $v$ ,  $w$ .

Тогда в направлении оси  $x$  в параллелепипед втекает слева в единицу времени количество жидкости  $udydz$ , а справа, где скорость  $u$  уже изменилась и стала равной

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx,$$

вытекает количество жидкости

$$\left(u + \frac{\partial u}{\partial x} dx\right) dydz.$$

Условие сохранения массы требует, чтобы сумма трех полученных приращений была равна нулю:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) dx dy dz = 0.$$

или, учитывая, что  $dx dy dz$  не равно нулю, мы получаем уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3.6)$$

Это уравнение называется *уравнением неразрывности для установившегося движения несжимаемой среды*.

**Обобщенная форма уравнения неразрывности.** Перейдем к выводу общей формы уравнения неразрывности. Если движение неустановившееся и среда сжимаема, то представленный на рис. 3.4 массовый баланс преобразуется согласно рис. 3.5.

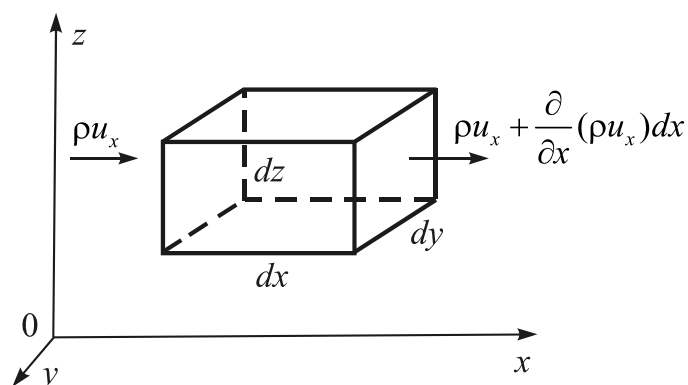


Рис. 3.5. Схема течения потока через стенки элементарного параллелепипеда

Суммарное изменение массы жидкости (газа) в фиксированном объеме  $dx dy dz$  за время  $dt$ :

$$-\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz \delta t.$$

Объем  $dx dy dz$  вполне определенный, и его величина не зависит от времени.

Изменение массы в объеме  $dx dy dz$  может произойти только за счет изменения плотности за время  $dt$ :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dt dx dy dz.$$

Для сохранения сплошности (неразрывности) жидкости должно быть удовлетворено условие

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right) dt dx dy dz = -\left(\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z}\right) dx dy dz \delta t.$$

Величина  $(dx dy dz dt)$  входит в левую и правую части равенства, поэтому условие соблюдения сплошности потока в точке будет

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.7) представляет собой обобщенную форму уравнения неразрывности.

Пусть жидкость где-либо граничит с твердым телом или с другой жидкостью. Из условия неразрывности потока следует, что нигде не должно возникать ни разрывов жидкости, ни взаимного проникновения обоих веществ. Для этого, очевидно, необходимо, чтобы составляющие скорости, перпендикулярные к поверхности соприкосновения этих двух веществ, были одинаковы с обеих сторон этой поверхности. Если рассматривается неподвижное тело или твердая стенка, обтекаемая жидкостью, то составляющая скорости жидкости, перпендикулярная к поверхности тела или к стенке, должна быть здесь равна нулю. На составляющую скорости, параллельную стенке, условие неразрывности не налагает никаких ограничений, следовательно, эта составляющая может иметь любые значения.

### 3.3. Уравнение движения

*Движения невязкой жидкости вдоль линии тока.* В покое жидкости действуют и дают уравновешенную систему два рода сил:

- силы тяжести (и другие массовые силы);
- разности сил давлений.

Эти же силы действуют и в движущейся жидкости, но здесь к ним присоединяется еще трение жидкости, которое следует рассматривать как сопротивление деформации.

Обычно принято основные законы движения жидкостей выводить на основе идеализированного представления о жидкости, лишенной трения, и только после этого учитывать, какие изменения вносит наличие трения в идеальное поведение жидкости.

Мы будем следовать этому пути, причем предположим также, что рассматриваемая нами идеальная жидкость обладает также свойством несжимаемости, следовательно, никаких изменений объема при движении не происходит.

Для того чтобы найти соотношение между давлением и массовой силой, с одной стороны, и кинематическими величинами, с другой, будем исходить из основного закона динамики: *результатирующая всех действующих на выделенный объем жидкости сил равна массе умноженной на ускорение.*

Выделим в движущейся жидкости частицу в виде небольшого цилиндра с осью, расположенной вдоль линии тока (рис. 3.6).

Если в жидкости трение отсутствует, то на выделенный цилиндр действует, прежде всего, разность давлений.

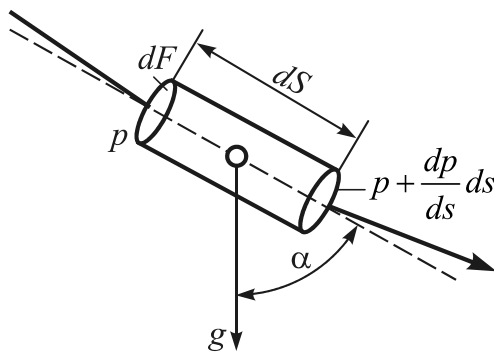


Рис. 3.6. Баланс сил при движении невязкой жидкости вдоль линии тока

Пусть давление на основании цилиндра, расположенное выше по течению, равно  $p$ , тогда сила, действующая на это основание, равна  $p dF$ .

На основании цилиндра, лежащем ниже по течению, давление отличается от  $p$  на величину  $dp$  и равно

$$p + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right) ds.$$

Следовательно, за счет разности давлений на выделенный цилиндр действует сила давления, равная

$$pdF - \left(p + \frac{\partial p}{\partial s}\right)dsdF = -\frac{\partial p}{\partial s}dsdF. \quad (3.8)$$

Кроме силы давления на жидкость действует массовая сила (например, сила тяжести), величина которой, отнесенная к единице массы, пусть будет  $g$ . На выделенный цилиндр действует в направлении течения составляющая этой силы, равная

$$\rho dF ds \cdot g \cos \alpha, \quad (3.9)$$

где  $\alpha$  – угол между линией действия массовой силы и линией тока

Теперь нам остается определить составляющую ускорения в направлении течения, т. е. касательное ускорение.

Пусть скорость частицы равна  $w$ . Величина  $w$  зависит от положения частицы на линии тока и от времени, следовательно, она является функцией от  $s$  и  $t$ .

Поэтому для касательного ускорения мы будем иметь выражение:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial s} \frac{ds}{dt} + \frac{\partial w}{\partial t}$$

или, принимая во внимание, что  $\frac{ds}{dt} = w$

$$\frac{dw}{dt} = w \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.10)$$

В этом равенстве величина  $w \frac{\partial w}{\partial s}$  выражает ту часть ускорения, которая возникает вследствие перемещения частицы жидкости в точку потока с другой скоростью течения, а величина  $\frac{\partial w}{\partial t}$  –

та часть ускорения, которая зависит от изменения состояния потока в данной точке во времени. При установившемся течении вторая составляющая ускорения равна нулю.

Применяя основной закон динамики, и учитывая (3.8) – (3.10), получим

$$-\frac{\partial p}{\partial s} dsdF + \rho dF ds \cdot g \cos \alpha = \rho dF ds \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \right].$$

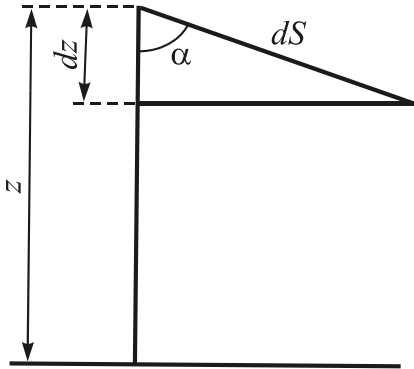


Рис. 3.7. К выводу уравнения Бернулли

Так как все члены данного уравнения содержат общий множитель  $dFds$ , то его можно отбросить (это означает, что конечный результат нашего вывода не зависит от произвольно выбранного объема частицы жидкости).

Разделив обе части уравнения на  $dFds$ , мы окончательно получим

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} + g \cos \alpha = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.11)$$

Массовой силой обычно является только одна сила тяжести.

Тогда величину  $g$  можно считать постоянной по модулю и направлению.

Введем систему координат с осью  $z$ , направленной вертикально вверх (рис. 3.7).

Из рис. 3.7 видно, что в этом случае

$$\cos \alpha = -\frac{\partial z}{\partial s}.$$

Соответственно (3.11) можно преобразовать к виду

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (3.12)$$

Уравнение (3.12) и есть искомое *уравнение невязкой несжимаемой жидкости в одномерном представлении*.

**Уравнение движения невязкой жидкости.** При трехмерном рассмотрении задач о движении жидкостей необходимо использовать три дифференциальных уравнения движения вдоль пространственных координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Выведем эти уравнения, исходя из основного закона динамики: *результатирующая действующих на выделенный объем жидкости сил равна массе, умноженной на ускорение*.

Выделим в движущейся жидкости (в обобщенном понятии) небольшой параллелепипед со сторонами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными соответственно осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Объем этого параллелепипеда равен  $dx dy dz$ , а масса равна плотности, умноженной на этот объем.

В направлении оси  $x$  результирующая сила давления имеет вид

$$P_x = -\partial p / \partial x dx dy dz.$$

Аналогичным образом для осей  $y$  и  $z$ :

$$P_y = -\partial p / \partial y dx dy dz;$$

$$P_z = -\partial p / \partial z dx dy dz.$$

Проекции массовой силы на оси координат, отнесенные к единице массы, обозначим  $X, Y, Z$ .

На массу параллелепипеда по направлениям осей координат будут действовать силы

$$X dx dy dz;$$

$$Y dx dy dz;$$

$$Z dx dy dz,$$

где  $X, Y, Z$  – отнесенные к единице массы проекции массовой силы на оси координат.

Обозначим проекции скорости на оси координат через  $u_x, u_y, u_z$ .

Тогда согласно основному закону динамики:

$$\begin{cases} \frac{du_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + X, \\ \frac{du_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + Y, \\ \frac{du_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + Z, \end{cases} \quad (3.13)$$

где  $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u_x \frac{\partial u}{\partial x} + u_y \frac{\partial u}{\partial y} + u_z \frac{\partial u}{\partial z}$ .

Система уравнений (3.13) описывает пространственное движение невязкой жидкости в проекциях на оси координат.

Систему уравнений (3.13) можно получить и из системы дифференциальных уравнений равновесия (2.11), помня, что она отражает условие, что проекции результирующих сил, действующих на выделенный объем жидкости в направлении осей координат, при равновесии равны нулю:

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho X, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho Y, \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho Z. \end{cases}$$

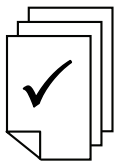
Подставив в левые части этой системы инерционные силы  $\rho \frac{du}{dt}$  (т. е. предполагая уже не статику, а движение) и разделив на  $\rho$  получим систему (3.13).

**Уравнение движения вязкой жидкости в ламинарном режиме течения.** Применительно к течению реальных жидкостей различают силы:

- обусловленные взаимодействием жидкости и окружающей среды (сила тяжести, сила механического давления, сила трения на границе жидкости с твердой стенкой);
- возникающие в самой жидкости (инерционная сила, вызванная ускорением, и сила вязкого трения, связанная с наличием градиента скорости в жидкости).

Трение жидкости проявляется при этом в виде силы, взаимодействия между слоями жидкости. Эта сила пропорциональна градиенту скорости жидкости, т. е. изменению скорости, происходящему на единице длины в направлении, перпендикулярном направлению движения.

Чаще всего рассматривается не сама сила, а *напряжение*<sup>11</sup>.



Как указывалось ранее, величина силы взаимодействия слоев жидкости, приходящаяся на единицу площади, называется *касательным напряжением*. Например, для составляющих касательного напряжения в направлении оси  $x$  различают взаимодействия слоев в направлениях осей  $y$  и  $z$  –  $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ , пропорциональные соответственно  $\frac{\partial u_x}{\partial y}$  и  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ .

<sup>11</sup> Напомним, что:

- напряженным состоянием в какой-либо точке называется совокупность напряжений во всех сечениях, проходящих через заданную точку;
- результирующая внутренних сил, отнесенная к единице площади сечения, называется напряжением.



Кроме касательных напряжений между слоями жидкости имеются и так называемые *нормальные напряжения*, включающие как напряжения, связанные с силами давления, так и сдвиговые напряжения, связанные с внутренними силами вязкости.

*Уравнение движения вязкой жидкости в напряжениях.* В соответствии с вышесказанным, при выводе уравнения движения вязкой жидкости преобразуем систему уравнений движения невязкой жидкости (3.13) в систему уравнений движения вязкой жидкости с использованием компонент напряжений (нормальных и касательных) по осям координат.

Если в потоке жидкости выделить элементарный объем  $dV = dx dy dz$  (рис. 3.8), то действующие на него со стороны окружающей жидкости силы можно представить в виде напряжений на боковых поверхностях.

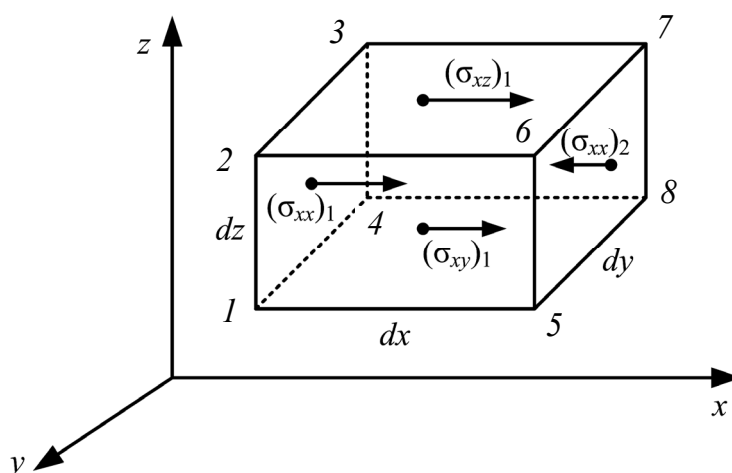


Рис. 3.8. Разложение вектора напряжений

В общем случае напряжение на каждой боковой поверхности направлено к ней под углом и может быть разложено на три составляющие, параллельные осям координат.

Например, напряжение  $\sigma_x$ , действующее на поверхность  $(dy, dz)$  перпендикулярную оси  $x$ , можно разложить на составляющие  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$ . Составляющие  $\sigma_{xy}$  и  $\sigma_{xz}$  являются касательными напряжениями (напряжениями сдвига). Составляющая  $\sigma_{xx}$  является нормальным напряжением, вызывающим растяжение или сжатие.

При этом часть нормального напряжения расходуется на создание давления, а часть, пропорциональная скорости деформации растяжения или сжатия, — на преодоление сил вязкостного трения:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= -p + \bar{\sigma}_x; \\ \sigma_{yy} &= -p + \bar{\sigma}_y; \\ \sigma_{zz} &= -p + \bar{\sigma}_z,\end{aligned}\tag{3.14}$$

где  $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\sigma}_z$  – собственно вязкие нормальные напряжения в направлении осей.

Определим составляющие напряжений на гранях, представленного на рис. 3.8 параллелепипеда, с использованием градиентов их изменений в соответствующих направлениях:

$(\sigma_{xx})_1, (\sigma_{xx})_2 = (\sigma_{xx})_1 + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx$  – нормальные напряжения, относящиеся, соответственно, к плоскостям (1-2-3-4), (5-6-7-8);

$(\sigma_{xy})_1, (\sigma_{xy})_2 = (\sigma_{xy})_1 + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy$  – касательные напряжения (напряжения сдвига), относящиеся соответственно к плоскостям (1-2-6-5), (4-3-7-8);

$(\sigma_{xz})_1, (\sigma_{xz})_2 = (\sigma_{xz})_2 + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz$  – касательные напряжения, относящиеся соответственно к плоскостям (2-3-7-6), (1-4-8-5).

Соответственно, результирующие напряжения на гранях, представленного на рис. 3.6 параллелепипеда в направлении оси  $x$  имеет вид

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} dx, \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} dy, \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} dz.$$

Учитывая данные соотношения, преобразуем систему уравнений (3.8), описывающую пространственное движение невязкой жидкости в проекциях на оси координат, применительно к случаю вязкой жидкости.

Следовательно, *система уравнений движения вязкой жидкости в напряжениях* записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \rho \frac{du_x}{dt} = \rho X + \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{du_y}{dt} = \rho Y + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z}, \\ \rho \frac{du_z}{dt} = \rho Z + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}. \end{cases}\tag{3.15}$$

Второе и третье уравнения в (3.15) для компонент уравнения движения в направлениях осей  $y$  и  $z$  могут быть получены по аналогии с первым уравнением движения в направлении оси  $x$ .

*Пространственное уравнение движения вязкой жидкости.* Расшифруем вязкостные напряжения в (3.15) через соответствующие градиенты компонент скорости и с учетом выражения для нормальных напряжений, получим:

– для направления вдоль оси  $x$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(-p + \sigma_x) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial x}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_x}{\partial y}\right);\end{aligned}\tag{3.16}$$

– для направления вдоль оси  $y$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(-p + \sigma_x) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial y}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial x}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial z}\right);\end{aligned}\tag{3.17}$$

– для направления вдоль оси  $z$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(-p + \sigma_z) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_z}{\partial z}\right); \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu \frac{\partial u_y}{\partial z}\right).\end{aligned}\tag{3.18}$$

Подставив (3.16) – (3.18) в (3.15), получим

$$\begin{cases} \rho \frac{du_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u_x, \\ \rho \frac{du_y}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta u_y, \\ \rho \frac{du_z}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u_z, \end{cases} \quad (3.19)$$

где символ  $\Delta$  введен для сокращенного обозначения операции дифференцирования компонент скорости движения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Система уравнений (3.19) представляет собой пространственное описание *ламинарного (слоистого)* режима движения вязкой жидкости.

В данном режиме использовался коэффициент вязкости  $\mu = \text{const}$ , зависящий только от рода рассматриваемого вещества в жидком или газообразном состоянии. Это позволяет вынести данный коэффициент из-под знака дифференцирования.

При турбулентном режиме течения система уравнений (3.19) преобразуется посредством замены коэффициента вязкости  $\mu$  на турбулентный коэффициент вязкости  $\mu_{\text{тур}}$ . Данный коэффициент вязкости расшифровывается в рамках соответствующей модели турбулентности.

Например, в рамках модели пути смешения Прандтля или  $k - \varepsilon$  модели турбулентности.

Следует также отметить, что численное значение величины  $\mu_{\text{тур}}$  превышает численное значение коэффициента вязкости  $\mu$  обычно в десятки и даже сотни тысяч раз.

Величина  $\mu_{\text{тур}}$ , кроме численного значения, отличается от обычной вязкости  $\mu$  еще и тем, что она изменяется при переходе от одной точки потока к другой. В частности, при приближении к стенке она стремится к нулю.

### 3.4. Гидромеханическое подобие потоков вязких жидкостей

*Теория подобия* (общие положения). Теория подобия – это совокупность положений и средств, которые разрешают установить

наличие подобия между моделью и оригиналом или обнаружить способ получения такого подобия.

Подобие определяет существование некоторых масштабных соотношений, т. е. масштабных коэффициентов, характеризующих пропорциональность *сходственных* параметров.

*Сходственными* называются такие точки систем, координаты которых удовлетворяют *геометрическому подобию*.

*Геометрическое подобие* предполагает наличие масштабных коэффициентов, характеризующих геометрию модели и объекта-оригинала.

Пропорциональность параметров – это лишь частный случай подобия физических процессов. Соблюдение соответствия модели и природы, отвечающее геометрическому подобию, не раскрывает подобия физических явлений.

*Физическое подобие* достигается при одинаковой физической природе подобных явлений. Физическое подобие требует, кроме геометрического подобия, соблюдения кинематического подобия, при котором существует подобие скоростей и ускорений в соответствующих точках модели и природы, а также соблюдения динамического подобия, т. е. подобия сил в соответствующих точках модели и природы.

Физическое подобие может быть полным, неполным и приближенным.

Полное подобие – это подобие протекания во времени и пространстве физических процессов, достаточно полно характеризующих изучаемое явление. Обеспечение полного подобия – основная задача исследования. Однако в процессе исследований не всегда удается обеспечить полное моделирование. Исследователи вынуждены прибегать к неполному или приближенному подобию.

При неполном подобии обеспечивается подобие исследуемого процесса только во времени или только в пространстве.

В случае приближенного подобия допускается некоторое искажение в отношении какого-либо физического явления на исследуемой модели, допускают независимость влияющих параметров. При этом оценка влияющих параметров производится на основе предварительных оценок или на основе анализа ранее выполненных подобных исследований.

*Математическое подобие* требует соответствия сходственных параметров сравниваемых процессов различной физической

природы, т. е. математическое подобие возможно для двух различных физических процессов, но описываемых одними и теми же дифференциальными уравнениями. Такое подобие называют *аналоговым*.

Необходимые и достаточные условия подобия отображаются в виде трех основных теорем подобия: первая и вторая определяют необходимые, а третья – достаточные условия сходства.

*Теорема 1.* Подобные явления имеют определенные сочетания параметров, называемых критериями подобия, численно одинаковыми для подобных явлений.

*Теорема 2.* Всякое полное уравнение физического процесса, записанное в определенной системе единиц, может быть представлено функциональной зависимости между критериями подобия, полученными из изучаемых в процессе величин.

*Теорема 3.* Необходимыми и достаточными условиями обеспечения подобия двух систем являются пропорциональность похожих параметров, которые входят в условия однозначности, и равенство критериев подобия явлений.

При этом под критериями подобия понимают идентичные по форме алгебраические записи и численно равные для подобных объектов степенные комплексы (произведения или отношение) определенных групп параметров, которые характеризуют подобные объекты, в частности, модель и оригинал. Они являются обобщенными характеристиками подобных процессов и систем; с их помощью устанавливается наличие и вид взаимно-однозначного соответствия между моделью и оригиналом.

Чтобы получить критерии подобия при моделировании процессов, вводят масштабы для *сходственных величин* в модели и объекте-оригинале:

$$C_l = \frac{l_1''}{l_1'} = \frac{l_2''}{l_2'} = \dots = \frac{l_i''}{l_i'}$$

где  $l_1', l_2', \dots, l_i'$  – линейные размеры, характеризующие геометрию первой системы;  $l_1'', l_2'', \dots, l_i''$  – линейные размеры, характеризующие геометрию второй системы;  $C_l$  – константа *геометрического подобия*.

При моделировании процессов, связанных с изменением свойств системы во времени, должно соблюдаться *временное подобие*. Это значит, что частицы в образце и модели, находящиеся в сходственных точках, проходят геометрически подобные траектории за промежутки времени, находящиеся в постоянных соотношениях. Сходственные моменты времени наступают по истечении периодов времени  $\tau'$  и  $\tau''$ , имеющих общее начало отсчета и связанных между собой константой временного подобия  $C_\tau$ :

$$C_\tau = \frac{\tau''}{\tau'}.$$

При *геометрическом подобии* для двух, например, подобных труб, одинаково отношение их длин  $l$  к диаметрам  $d$

$$d' / l' = d'' / l'' = \Gamma_1,$$

где  $\Gamma_1$  – инвариант, называемый также симплексом *геометрического подобия*.

С помощью инварианта, или симплекса геометрического подобия  $\Gamma_1$  все подобные геометрические размеры выражаются в относительных величинах, например по отношению к длине.

При геометрическом и временном подобии соблюдается подобие полей скоростей, температур, концентраций и других физических величин, т. е.

$$C_v = v'' / v';$$

$$C_t = t'' / t';$$

$$C_c = c'' / c',$$

где  $C_v, C_t, C_c$  – соответствующие константы подобия скоростей, температур, концентраций.

Из сформулированных выше условий подобия вытекает идентичность отношений двух значений какого-либо свойства образца и двух значений этого же свойства модели для сходственных условий.

**Гидромеханическое подобие.** Как указывалось выше, рассмотренные условия подобия геометрических, физических и других характеристик потоков являются необходимыми, но недостаточными условиями для их подобия.

Достаточные условия подобия выявляются исходя из того, что процессы в этих потоках должны описываться одними и теми же дифференциальными уравнениями.

Если для двух потоков около или внутри геометрически подобных тел картины линий тока также геометрически подобны, то такие потоки называются механически подобными.

Весьма важно найти условия, при которых для внешне геометрически подобных потоков осуществляется также и механическое подобие.

Для этого, очевидно, необходимо, чтобы в подобно расположенных точках сравниваемых потоков отношения трех сил: *силы давления, силы трения и силы инерции* были одинаковыми.

Так как, согласно использованному нами при выводе уравнений движения основному закону динамики, эти три силы уравновешивают друг друга, то мы можем ограничиться рассмотрением только двух из них и, соответственно, выберем *силу инерции и силу вязкостного трения*.

Различные геометрически подобные потоки мы будем сравнивать друг с другом при помощи каких-либо характерных параметров (например длин, скоростей).

За характерную длину можно взять, например, диаметр или длину тела, ширину канала и т. п.

За характерную скорость – скорость движения тела или среднюю скорость в определенном сечении канала.

Плотность и вязкость в различных потоках также могут иметь различные значения.

Итак, если вспомнить уравнение движения и, в частности, ее левую часть

$$\rho \frac{du}{dt},$$

которая характеризует силы инерции, то развернув данное соотношение, получим

$$\rho \frac{du}{dt} = \rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + \dots \right).$$

Тогда можно записать, что в подобных потоках должны относиться друг к другу как симплексы



$$v^2 / l,$$

где  $v$  – характерная скорость;  $l$  – характерный размер.

Действительно, если два потока подобны, то значения скорости  $u$  в соответственных точках обоих потоков, а потому и малые разности  $du$  этих значений должны относиться друг к другу как характерные скорости  $v_1$  и  $v_2$ . Длины  $x$ , а также их малые разности  $dx$  должны относиться друг к другу как характерные длины  $l_1$  и  $l_2$ .

При выводе симплекса подобия  $u^2 / l$  мы ограничились только первым слагаемым в выражении для инерционной силы, так как все остальные слагаемые имеют ту же размерность.

На основании аналогичных соображений составляющие силы трения, в соответствии с их выражением

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dots \right)$$

относятся друг к другу в подобных потоках как выражения

$$\mu \frac{v}{l^2}.$$

Таким образом, сформулированное выше условие механического подобия сводится к тому, что в геометрически подобных потоках подобно отношение величин  $\frac{\rho v^2}{l}$  и  $\frac{\mu v}{l^2}$ , т. е.

$$\frac{\rho v^2}{l} : \frac{\mu v}{l^2} = \frac{\rho v l}{\mu} = \text{Re}.$$

Число  $\text{Re}$  называется *числом Рейнольдса* в честь английского ученого Осборна Рейнольдса, открывшего данный закон подобия.

Поскольку это выражение представляет собой отношение двух сил, отнесенных к единице объема, т. е. двух величин с одинаковой размерностью, оно является отвлеченным, безразмерным числом.

Следовательно, два геометрически подобных потока 1 и 2 будут подобны также и механически, если для них имеет место равенство:

$$\frac{\rho_1 v_1 l_1}{\mu_1} = \frac{\rho_2 v_2 l_2}{\mu_2},$$

т. е.

$$Re_1 = Re_2.$$

Таким образом, какое-либо состояние потока вязкой жидкости можно охарактеризовать числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\rho v l}{\mu} = \frac{v l}{\nu}. \quad (3.20)$$

Если число Рейнольдса мало, то это означает, что в потоке преобладают силы вязкости.

Наоборот, если число Рейнольдса велико, то главную роль в потоке играют силы инерции.

Для обоих этих случаев законы движения жидкостей и законы сопротивления, возникающего при движении, очень сильно отличаются друг от друга

Из равенства (3.20) видно, что на состояние потока существенное влияние оказывают, наряду с вязкостью, также пространственные размеры, определяющие движение жидкости, и скорости.

Если пространственные размеры, определяющие движение жидкости, очень малы, то законы движения, соответствующие малым числам Рейнольдса, имеют место при всех практически возможных скоростях.

Если пространственные размеры велики, то законы движения справедливы только при очень малых скоростях или для очень вязких жидкостей

### 3.5. Вихревые и потенциальные течения

Все движения жидкостей подразделяются на *вихревые* и *потенциальные* течения.

Рассмотрим поле скоростей жидкости  $v(r)$  в какой-то фиксированный момент времени. Возьмем в жидкости произвольный замкнутый контур  $C$  и на нем установим положительное направление обхода (рис. 3.9).

Пусть  $\tau$  – единичный вектор касательной, а  $ds$  – элемент длины контура, проведенный в положительном направлении.

Интеграл

$$\Gamma = \oint_C v_\tau ds = \left( \int_C v ds \right)$$

называется *циркуляцией вектора скорости* по контуру  $C$ .

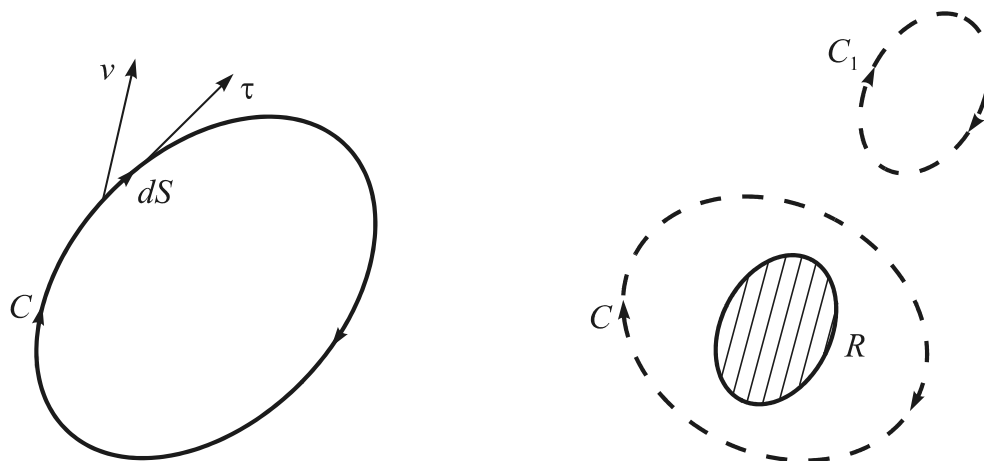


Рис. 3.9. К выводу понятий *вихревые* и *потенциальные* течения

Если циркуляция скорости по любому замкнутому контуру обращается в нуль, то движение жидкости называется *потенциальным*.

В противном случае движение называется *вихревым*.

Можно в общем виде показать, что произвольное движение жидкости можно разложить на *вращение* и *потенциальное течение*, причем угловая скорость вращения и ее направление в пространстве могут непрерывно меняться от точки к точке.

**Вихревое движение.** *Вихревое движение* – движение жидкости или газа, при котором мгновенная скорость вращения элементарных объемов среды  $\Gamma$  не равна нулю:

$$\Gamma = 2\pi r v = 2\pi r^2 \omega,$$

где  $\omega$  называют *вектором вихря* или просто *завихренностью*.

Количественной мерой *завихренности* служит вектор ротор скорости  $\text{rot } v$

$$\omega = \text{rot } v,$$

где  $v$  – скорость жидкости.

Вообще, для произвольного движения ротор скорости  $v$  определяется своими проекциями на произвольное направление следующим образом.

Берется произвольный бесконечно малый контур с площадью  $\Delta S$  и внешней нормалью  $n$ . Проекция вектора  $\text{rot } v$  на направление нормали  $n$  определяется соотношением

$$\text{rot } v = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Gamma}{\Delta S}. \quad (3.21)$$

Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед. Циркуляция по контуру, образованному нижней гранью параллелепипеда, в поле вектора  $\vec{v}$  будет записана как

$$\begin{aligned} v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dy\right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dx\right) dx - v_y dy = \\ = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dx dy. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Соотношение (3.22) мы получили, обходя плоский контур, расположенный в координатной плоскости  $xu$ , слева направо, т. е. против часовой стрелки.

Разделив на площадь контура  $dx dy$ , получим проекцию вектора ротора на ось  $z$ .

Аналогичные соотношения можно получить и для других координатных плоскостей.

Таким образом, декартовы координаты вектора ротора будут иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \text{rot}_x v = \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}, \\ \text{rot}_y v = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \text{rot}_z v = \frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.23)$$

Векторное поле вихря удобно характеризовать некоторыми геометрическими образами.

*Вихревой линией* называется линия, касательная к которой в каждой точке направлена по вектору вихря.

Совокупность вихревых линий, проходящих через замкнутую кривую, образует *вихревую трубку*.

Поток вектора вихря через любое сечение вихревой трубки одинаков. Он называется интенсивностью вихревой трубки и равен *циркуляции вектора скорости* по произвольному контуру  $C$ , однократно охватывающему вихревую трубку.

За редким исключением движение жидкости или газа почти всегда бывает вихревым.

Так, вихревым является *ламинарное течение* в круглой трубе, когда скорость распределяется по *параболическому закону*, течение в *пограничном слое* при плавном обтекании тела и в следе за плохо обтекаемым телом.

Вихревой характер носит любое *турбулентное течение*.

В этих условиях выделение класса «вихревое движение» оказывается осмысленным, благодаря тому, что при преобладании инерционных сил над вязкими силами (при очень больших числах Рейнольдса) типична локализация *завихренности* в обособленных массах жидкости – *вихрях* или *вихревых зонах*.

Если при движении область, охватываемая вихревым контуром, сужается, то интенсивность вращательного движения внутри него возрастает.

Это важный механизм концентрации *завихренности*, реализующийся, например, при вытекании жидкости из отверстия в дне сосуда (ванны), при образовании водоворотов вблизи нисходящих потоков в реках, и определяющий образование циклонов и тайфунов в зонах пониженного атмосферного давления, в которые происходит подтекание (конвергенция) воздушных масс.

Если обтекание тела происходит при больших числах Рейнольдса, *завихренность* порождается в узких зонах – в пограничном слое – проявлением вязких эффектов, а затем сносится в основной поток, где формируются отчетливо видимые вихри, некоторое время эволюционирующие и сохраняющие свою индивидуальность. Особенно эффектно это проявляется в образовании за плохообтекаемым телом регулярной *вихревой дорожки* Кармана. Вихреобразование в следе за плохообтекаемым телом определяет основную часть лобового сопротивления тела.

При больших числах Рейнольдса движение *турбулизируется*, и диффузия завихренности определяется много большим коэффициентом *эффективной турбулентной вязкости*, не являющимся константой для жидкости и сложным образом зависящим от характера движения.

**Потенциальное течение** – безвихревое движение жидкости или газа, при котором деформация и перемещение малого объема жидкости происходит без вращения (вихря), т. е. ротор скорости  $v$  обращается в нуль

$$\operatorname{rot} v = 0. \quad (3.24)$$

При потенциальном течении скорость жидкости может быть представлена следующим образом:

$$\vec{v} = \nabla\varphi(x, y, z),$$

где  $\varphi(x, y, z)$  некоторая скалярная функция, называемая *потенциалом скорости* течения.

Значит, при потенциальных течениях проекции скорости  $v$  частицы жидкости на оси координат представляются в виде частных производных

$$\begin{cases} v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \\ v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \\ v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}. \end{cases} \quad (3.25)$$

Движение реальных жидкостей будет потенциальным в тех областях, где действие сил вязкости ничтожно мало по сравнению с действием сил давления и в которых нет завихрений, образовавшихся за счет срыва со стенок пограничного слоя или за счет неравномерного нагревания. Необходимым и достаточным условием потенциальности течения, вытекающим из соотношений (3.23), (3.24) являются равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial y}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Наиболее очевидным примером течений, в которых реализуется потенциальное течение, является *идеальная жидкость*<sup>12</sup> – воображаемая несжимаемая жидкость, в которой отсутствуют вязкость, внутреннее трение и теплопроводность. Так как в ней отсутствует внутреннее трение, то нет касательных напряжений между двумя соседними слоями жидкости.

Для изучения потенциальных течений достаточно определить потенциал скоростей с помощью *уравнения неразрывности*, соотношения (3.25) и уравнения физического состояния.

Для несжимаемой жидкости уравнение неразрывности имеет вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0,$$

и поэтому изучение потенциальных течений сводится к решению уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

с учетом граничных условий на твердых стенках и на свободной поверхности – условий безотрывности обтекания твердых стенок и условия постоянства давления на свободной поверхности жидкости.

### 3.6. Природа турбулентности

**Понятие о ламинарном и турбулентном течениях.** Турбулентность, турбулентное течение – явление, заключающееся в том, что при увеличении скорости течения жидкости или газа в среде самопроизвольно образуются многочисленные

---

<sup>12</sup> Моделью идеальной жидкости пользуются при теоретическом рассмотрении задач, в которых вязкость не является определяющим фактором и ею можно пренебречь. В частности, такая идеализация допустима во многих случаях течения, рассматриваемых гидроаэромеханикой, и дает хорошее описание реальных течений жидкостей и газов на достаточном удалении от омываемых твердых поверхностей и поверхностей раздела с неподвижной средой. Математическое описание течений идеальных жидкостей позволяет найти теоретическое решение ряда задач о движении жидкостей и газов в каналах различной формы, при истечении струй и при обтекании тел.

*нелинейные волны*<sup>13</sup>. Их размер и амплитуда меняются хаотически в некотором интервале. Они возникают чаще всего либо на границе, у стенки, и/или при разрушении или опрокидывании волны. Такие волны могут образоваться на струях.

Турбулентность экспериментально открыта английским инженером Рейнольдсом в 1883 г. при изучении течения несжимаемой жидкости (воды) в трубах.

Вследствие нелинейных волн любые параметры среды: (скорость, температура, давление, плотность) могут испытывать хаотические колебания, т. е. непериодически изменяться от точки к точке и во времени.

В турбулентном течении мгновенные параметры среды распределены по случайному закону. Этим турбулентные течения отличаются от *ламинарных* (слоистых) течений.

Наглядным примером различий турбулентных и ламинарных течений может служить рис. 3.10.

Обычно турбулентность наступает при превышении некоторого критического параметра, например числа Рейнольдса.



Рис. 3.10 Ламинарное (на переднем плане) и турбулентное (на заднем плане) течение вокруг субмарины

---

<sup>13</sup> *Нелинейная волна* – волна, которая обладает нелинейными свойствами. Их амплитуды нельзя складывать при столкновении. Свойства таких волн сильно меняются при малых изменениях параметров. Нелинейные волны называют диссипативными структурами.



Для каждого вида течения существует критическое число Рейнольдса  $Re_{кр}$ , которое, как принято считать, определяет переход от ламинарного к турбулентному течению.

При  $Re < Re_{кр}$  течение происходит в ламинарном режиме, при  $Re > Re_{кр}$  – возможно возникновение турбулентности.

Критическое значение числа Рейнольдса зависит от конкретного вида течения (течение в круглой трубе, обтекание шара и т. п.).



Например, для стабилизированного изотермического потока жидкости в прямой круглой трубе с очень гладкими стенками  $Re_{кр} \sim 2300$ . Для движения пленки жидкости с относительно гладкой поверхностью раздела с газом при двухфазном потоке  $Re_{кр} \sim 20-120$ .

Значения  $Re$  выше критического и до определенного предела относятся к переходному (смешанному) режиму течения жидкости, когда турбулентное течение более вероятно, но ламинарное иногда тоже наблюдается – неустойчивая турбулентность.

Числу  $Re_{кр} = 2300$  соответствует интервал 2300–10 000; для упомянутого примера с тонкими пленками это (20–120)–1600. Число Рейнольдса как критерий перехода от ламинарного к турбулентному режиму течения и обратно относительно хорошо действует для напорных потоков. Стоит отметить, что для газов  $Re_{кр}$  достигается при значительно больших скоростях, чем у жидкостей, поскольку у первых куда больше кинематическая вязкость (в 10–15 раз).

Турбулентное течение с большим числом Рейнольдса называют *развитой турбулентностью*. При разных граничных условиях оно всегда приводит к созданию одного и того же профиля скоростей. Это свойство независимости параметров от числа Рейнольдса называют *автомодельностью*<sup>14</sup> течения. Наблюдается экспериментально в струях или в пограничном слое.

При математическом описании турбулентных течений используется ряд постулатов и, в частности, *теорема о количестве движения для потоков с пульсациями*.

*Теорема о количестве движения для потоков с пульсациями скорости.* Среди неустановившихся течений часто встречаются

<sup>14</sup> *Автомодельное течение* – течение жидкости (газа), которое остается механически подобным (см. п. 3.4) самому себе при изменении одного или нескольких параметров, определяющих это течение.

такие, в которых скорость в каждой точке пространства, хотя и изменяется со временем (причем иногда даже значительно и очень неравномерно), тем не менее в среднем она остается постоянной для любого достаточно большого промежутка времени.

Совокупность таких средних значений скорости во всех точках пространства определяет собой некоторое установившееся течение.

Действительное, т. е. неустановившееся, течение в таких случаях принято называть течением, в среднем установившимся.

Введем следующие обозначения для компонент скоростей течений в среднем установившихся:

$u, v, w$  – мгновенные значения компонент реальной скорости течения;

$\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$  – осредненные за протяженный промежуток времени значения компонент реальной скорости течения;

$u', v', w'$  – мгновенные отклонения от средних значений компонент реальной скорости течения:

$$\begin{cases} u = \bar{u} + u', \\ v = \bar{v} + v', \\ w = \bar{w} + w'. \end{cases}$$

При этом согласно определению, средние значения величин  $u', v', w'$ , называемые *пульсациями скорости* или *пульсационными скоростями*, равны нулю –  $\bar{u}' = 0, \bar{v}' = 0, \bar{w}' = 0$ .

Например

$$\bar{u} = (\overline{\bar{u} + u'}) = (\bar{u} + \bar{u}') = \bar{u},$$

т. е.

$$\bar{u}' = 0.$$

В тоже время

$$\overline{u'^2} \neq 0.$$

Применяя *теорему о количестве движения* к турбулентным течениям, нельзя оперировать только со средней скоростью. Необходимо учитывать также пульсации скорости, составляя для этого средние значения всех количеств движения, переносимых через неподвижную контрольную поверхность.

Вычислим составляющую количества движения вдоль оси  $x$  для участка контрольной поверхности, перпендикулярной оси  $x$ .

Масса жидкости, переносимой через единицу контрольной поверхности за единицу времени за счет пульсационной составляющей скорости  $u'_y$ , равна  $\rho u_x$ .

Соответственно, при этом переносится количество движения равное  $\rho u_x u'_y$ .

Расшифровывая это выражение через средние значения и пульсации скорости, получим

$$\rho u_x u'_y = \rho u'_y (\bar{u}_x + u'_x) = \rho (\bar{u}_x u'_y + u'_x u'_y).$$

Или усредняя за некоторый достаточно продолжительный период времени

$$\overline{\rho u_x u'_y} = \rho (\overline{\bar{u}_x u'_y} + \overline{u'_x u'_y}) = \overline{\rho u'_x u'_y},$$

так как  $\overline{u'_y} = 0$ .

Таким образом, в турбулентном режиме течения к количеству движения в среднем установившегося (без пульсаций) надо прибавить количество движения пульсации, т. е. дополнительное («пульсационное») напряжение.

Предполагая (в рамках модели турбулентности Прандтля), что  $u'$  пропорционально  $\frac{\partial u}{\partial y}$  с некоторым коэффициентом  $l$ , получим

$$\begin{aligned} \sigma' &= \overline{\rho u'_x u'_y} = \rho \left( l \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \left( l \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right) = \\ &= \rho l^2 \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Длина  $l$ , которая, согласно данной модели турбулентности Прандтля, называется длиной пути смешения, имеет некоторое родство с длиной пути свободного пробега молекул в кинетической теории газов.

Для того чтобы формула (3.27) давала для положительного значения  $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$  положительное значение касательного напряжения,

а для отрицательного значения  $\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y}$  – отрицательное значение касательного напряжения, запишем (3.27) в следующем виде:

$$\tau' = \rho l^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right| \left( \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} \right). \quad (3.28)$$

Обозначив первые три множителя в правой части (3.28) буквой  $A$ , соотношение (3.28) можно представить как

$$\tau' = A \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}. \quad (3.29)$$

Соотношение (3.29) по своей структуре формально совпадает с записью вязкого касательного напряжения

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Таким образом, величина имеет размерность вязкости, которую формально можно рассматривать как коэффициент турбулентной вязкости  $\mu_t$ . Это позволяет отойти от модели турбулентности на основе пути смешения и записать (3.23) в общем виде

$$\tau' = \mu_t \frac{\partial u}{\partial y}.$$

В настоящее время имеется множество полуэмпирических теорий для определений «кажущейся» турбулентной вязкости.

**Форма уравнения движения турбулентного потока жидкости.** В рамках представленного выше подхода, задачи для описания ламинарного и турбулентного режимов течения несжимаемой жидкости становятся идентичными, но при этом возникает проблема поиска метода вычисления «кажущейся» турбулентной вязкости.

Эта проблема возникает еще и вследствие того, что величина турбулентной вязкости может на несколько порядков превышать величину физической вязкости<sup>15</sup>.

---

<sup>15</sup> Это дало основание Ричардсону сказать крылатую фразу о том, что турбулентная вязкость воды равна вязкости ламинарного меда.

Порядок величины вязкого касательного напряжения в соответствии с формулой Ньютона будет

$$\tau \approx \mu \frac{u}{d}.$$

Вычислим отношение

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{d\rho \overline{u'_x u'_y}}{\mu u_x}.$$

Если  $|u'_x| = |u'_y| \approx 0,1 \overline{|u_x|}$ , тогда

$$\frac{\tau'}{\tau} = \frac{0,01\rho \overline{|u_x|}^2 d}{\mu u_x} = 0,01 \text{Re}.$$

Предполагая  $\text{Re} = 10^4$ , получим  $\frac{\tau'}{\tau} = 10^2$ .

Кроме численного значения, турбулентная вязкость  $\mu_T$  отличается от обычной вязкости  $\mu$  еще тем, что она изменяется при переходе от одной точки потока к другой и, в частности, при приближении к стенке она стремится к нулю.

Используя понятия дополнительного «турбулентного» напряжения и «турбулентной» вязкости, систему уравнений движения установившегося несжимаемого ламинарного потока (3.19) можно записать применительно к движению турбулентного потока в следующем виде

$$\begin{cases} \rho \frac{du_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \nabla(\mu_{\text{эф}} \nabla u_x), \\ \rho \frac{du_y}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \nabla(\mu_{\text{эф}} \nabla u_y), \\ \rho \frac{du_z}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \nabla(\mu_{\text{эф}} \nabla u_z), \end{cases} \quad (3.30)$$

где  $\mu_{\text{эф}} = \mu + \mu_T$ , а символ  $\nabla$  означает операцию дифференцирования компонент скорости движения

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}.$$

Или, учитывая, что  $\mu$  зависит только от рода жидкости

$$\begin{cases} \rho \frac{du_x}{dt} = \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \Delta u_x + \nabla(\mu_T \nabla u_x), \\ \rho \frac{du_y}{dt} = \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \Delta u_y + \nabla(\mu_T \nabla u_y), \\ \rho \frac{du_z}{dt} = \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \Delta u_z + \nabla(\mu_T \nabla u_z), \end{cases}$$

где символ  $\Delta$  означает операцию дифференцирования компонент скорости движения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Необходимость использовать для описания течения несжимаемой вязкой жидкости систему уравнений движения (3.19) для ламинарного режима движения, или систему уравнений движения (3.30) для турбулентного режима движения можно определить по значению числа Рейнольдса. Критическое число Рейнольдса, при котором происходит переход от ламинарного к турбулентному режиму течения, принимается равным  $\sim 3200$ . При этом надо иметь в виду, что полный переход к развитому турбулентному режиму течения происходит при числах Рейнольдса  $\sim 10^5$ .

### 3.7. Уравнение Бернулли

*Уравнение Бернулли для невязких жидкостей.* В п. 3.3 мы из рассмотрения течения жидкости вдоль линии тока, вывели уравнение движения невязкой несжимаемой жидкости в одномерном представлении

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t},$$

где  $w$  – скорость в рассматриваемой точке потока;  $z$  – высота рассмотрения;  $g$  – ускорение свободного падения.

Если рассматриваемое движение установившееся (т. е. последний член в уравнении (3.12) равен нулю), и среда несжимаемая

(т. е. плотность постоянная), то все члены уравнения (3.12) представляют собой производные по  $s$ , и поэтому его можно интегрировать вдоль линии тока:

$$-\int_s \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - g \frac{\partial z}{\partial s} \right) = \int_s \left( \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{w^2}{2} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \right).$$

Интегрирование приводит к следующему так называемому *уравнению Бернулли*:

$$\frac{p}{\rho} + gz + \frac{w^2}{2} = \text{const.} \quad (3.31)$$

Уравнение (3.31) является основным уравнением при одномерном рассмотрении задач о движении жидкостей, но в то же время оно имеет фундаментальное значение для всей гидромеханики. Оно выражает собой закон сохранения содержащейся в единице массы механической энергии движущейся жидкости, а именно: первый член есть не что иное, как работа сил давления, второй – потенциальная энергия силы тяжести и третий – кинетическая энергия.

**Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.** Применение уравнения Бернулли к потоку вязкой жидкости становится возможным при соблюдении следующего условия: течение жидкости в рассматриваемых сечениях должно быть плавно изменяющимся.

При течении реальной жидкости силы, определяемые вязкими напряжениями, производят работу, целиком и необратимо превращающуюся в тепловую энергию

Рассмотрим баланс энергии массы жидкости в произвольном канале между двумя сечениями. Ограничим характер течения следующими условиями:

- движение жидкости установившееся;
- распределение давления в сечениях 1 и 2 подчиняется гидростатическому закону, скорости в любой точке каждого сечения одинаковы;
- обмен теплом и механической энергией с внешней средой отсутствует.

Энергия единицы массы, веса или объема движущейся жидкости равна сумме механической и внутренней энергии. По закону

сохранения энергии в рассматриваемом случае суммарное количество энергии остается постоянным.

При течении жидкости от одного сечения канала к другому происходит процесс необратимого превращения части механической энергии во внутреннюю (тепловую) энергию. Следовательно, вдоль потока при отсутствии подвода тепла или механической энергии извне механическая энергия потока снижается и соответственно увеличивается внутренняя энергия.

Работа сил вязкости, произведенная между двумя сечениями потока и отнесенная к единице массы, веса или объема движущейся жидкости, называется потерями механической энергии, или *гидравлическими потерями*. Если эта работа отнесена к единице веса, то гидравлические потери называются *потерями напора*.

Обозначим давление в выбранных сечениях потока  $p_1$  и  $p_2$ , расстояние от центров тяжести этих сечений до произвольной плоскости сравнения –  $z_1$  и  $z_2$ , скорости в них –  $u_1$  и  $u_2$ , потери напора –  $h_w$ .

Тогда уравнение Бернулли можно записать в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{u_2^2}{2g} + h_w. \quad (3.32)$$

В этом уравнении  $h_w$  (потери напора) – величина линейная. Она представляет собой разность ординат  $H = z + p / \gamma + u^2 / (2g)$ , вычисленных для любых двух выбранных сечений. Линия полного напора не горизонтальна – каждая последующая ее ордината меньше предыдущей на величину  $h_w$ .

Потери напора, отнесенные к единице длины, называются *гидравлическим уклоном*:

$$i = \frac{\Delta(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{u^2}{2g})}{\Delta l},$$

где  $\Delta l$  – расстояние между рассматриваемыми сечениями.

*Пьезометрическим уклоном* называется отношение

$$i = \frac{\Delta(z + \frac{p}{\gamma})}{\Delta l}.$$



Гидравлический уклон всегда меньше нуля; пьезометрический уклон может быть как отрицательным, так и положительным.

Уравнение (3.32) записано при условии равенства скоростей по сечению канала, т. е. при условии линейного профиля скоростей.

В реальных потоках, вследствие прилипания жидкости к ограничивающей поверхности канала, профиль скоростей отличается от линейного профиля и не может быть охарактеризован одним ее значением. В этом случае значение скорости в уравнении (3.32) следует понимать как осредненное по реальному профилю значение. Вместе с тем возникает вопрос, насколько удельные значения кинетической энергии, рассчитанные по реальному профилю скоростей и по осредненному значению скорости, различаются между собой.

Отношение удельной кинетической энергии потока, рассчитанное по реальному профилю скоростей и по осредненному значению скорости называется коэффициентом кинетической энергии, или коэффициентом Кориолиса:

$$\alpha = \int \rho u^2 ds / \rho \bar{u}^2, \quad (3.33)$$

где интегрирование ведется по сечению канала.

Коэффициент Кориолиса меняется в достаточно широких пределах: при равенстве скоростей во всех точках сечения потока  $\alpha = 1$ , при параболическом распределении скоростей  $\alpha = 2$ .

С учетом (3.33) уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости с учетом реального профиля скоростей может быть записано в следующем виде:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{\alpha_1 u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{\alpha_2 u_2^2}{2g} + h_w. \quad (3.34)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи применения уравнения Бернулли.



**Пример 3.1.** Определить статический напор при течении несжимаемой жидкости в трубе постоянного сечения (рис. 3.11).

*Решение.* В сечении 1-1 давление  $p_1$ , расстояние от центра тяжести сечения до произвольной плоскости сравнения  $z_1$ , средняя скорость течения  $v_1$ , в сечении 2-2 давление  $p_2$ , расстояние от центра тяжести сечения до плоскости сравнения  $z_2$  и средняя скорость течения  $v_2$ .

Если бы в трубе текла невязкая жидкость, то в сечениях 1-1 и 2-2 на основании уравнения Бернулли полные напоры были бы одинаковыми, т. е.

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}.$$

В рассматриваемом случае сечение трубы постоянно, следовательно (из условия неразрывности)  $v_1 = v_2$ .

Поэтому при течении невязкой жидкости статический напор будет постоянным

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g}.$$

При течении реальной (вязкой) жидкости между сечениями 1-1 и 2-2 произойдут гидравлические потери  $h_w$ . Так как при течении в трубе постоянного диаметра  $v_1 = v_2$  и, соответственно,  $\alpha_1 = \alpha_2$ , то уравнение (3.34) преобразуется к виду

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + h_w,$$

т. е. статический напор в сечении 2-2 уменьшится по сравнению с сечением 1-1 на величину  $h_w$ :

$$z_2 + \frac{p_2}{\rho g} = z_1 + \frac{p_1}{\rho g} - h_w.$$

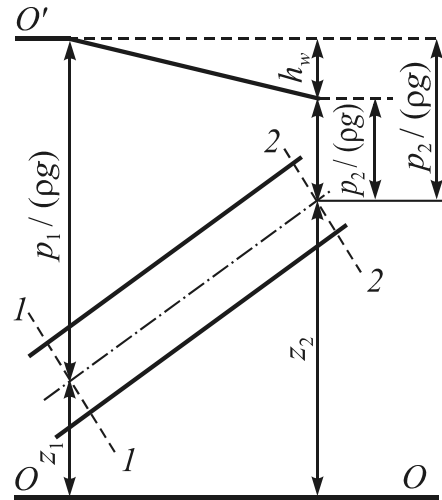


Рис. 3.11. К примеру 3.1

**Пример 3.2.** Определить скорость течения жидкости по показанию дифференциального манометра (трубки Пито – Прандтля – рис. 3.12).

**Решение.** Выберем в потоке линию тока, проходящую через точку  $a$ . Примем значения давления и скорости потока на рассматриваемой линии тока

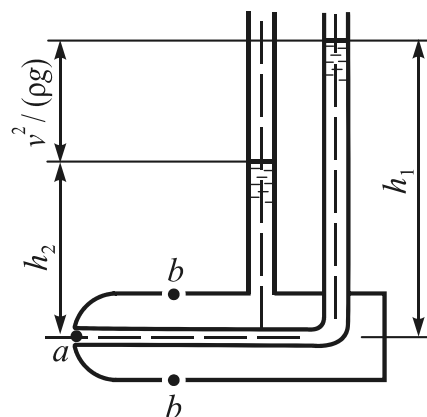
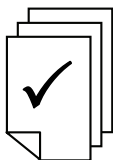


Рис. 3.12. К примеру 3.2



на достаточном удалении от точки  $a$  в точке  $c$  соответственно  $p_0$  и  $v_0$ .

Напишем уравнение Бернулли для линии тока в точках  $c$  и  $a$ :

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_a + \frac{\rho v_a^2}{2}.$$

Если «затормозить» поток в точке  $a$ , т. е. положить  $v_a = 0$ , то  $p_a$  будет соответствовать полному (статическому и динамическому) давлению в потоке:

$$p_a = p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2}.$$

Полному давлению в потоке будет соответствовать уровень  $h_1$  дифференциального манометра (рис. 3.12).

Для линии тока, примыкающей к точкам  $b$  (впускные отверстия), уравнение Бернулли будет иметь вид

$$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} = p_b + \frac{\rho v_b^2}{2}.$$

Так как  $v_b = v_0$ , то  $p_b = p_0$ . Соответственно в непроточную область дифференциального манометра передается статическое давление  $p_0$ . Этому давлению будет соответствовать уровень  $h_2$ .

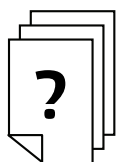
Тогда

$$h_1 - h_2 = p_a - p_0 = \frac{\rho v_0^2}{2},$$

т. е. дифференциальный манометр регистрирует динамическую составляющую полного давления в потоке.

Следовательно,

$$v_0 = [2(h_1 - h_2) / \rho]^{0,5}.$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 3.1.** В закрытом сосуде (рис. 3.13) под давлением  $p_1$  находится несжимаемая среда с плотностью  $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$ . Во внешнем пространстве давление  $p_0$  равно атмосферному давлению. При решении задачи исходить из условия неподвижности среды

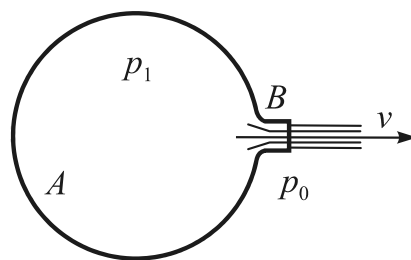
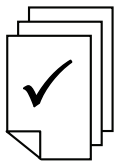


Рис. 3.13. К задаче 3.1

внутри сосуда на удалении от выходного отверстия (в точке  $A$ ). Принять также коэффициент сжимаемости струи в сечении  $B$  равным единице. Определить среднюю скорость  $v_B$  потока в сечении  $B$ , принимая, что избыточное давление в сосуде равно 500 Па.



*Указание.* Уравнение Бернулли следует записать для точки  $A$ , противоположной выходному отверстию, и выходного отверстия. Решение искать исходя из условия сохранения механической энергии и малости (по сравнению с выходным отверстием) кинетической энергии жидкости в точке  $A$ .

$$\text{Ответ: } v_B = \left[ \frac{2(p_A - p_0)}{\rho} \right]^{0,5} = 28,9 \text{ м/с.}$$

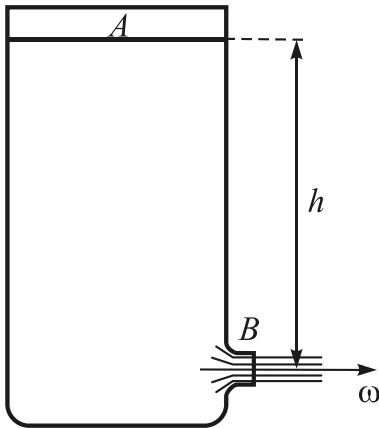


Рис. 3.14. К задаче 3.2

**Задача 3.2.** В открытом сосуде находится несжимаемая среда с плотностью  $\rho$  (рис. 3.14). Давление во внешнем пространстве  $p_0$  равно атмосферному давлению. Высота столба жидкости  $h$  от уровня  $B$  (выпускное отверстие) до уровня  $A$  равна 2 м. Принять коэффициент сжимаемости струи в сечении  $B$  равным единице. Определить среднюю скорость  $v_B$  потока в сечении  $B$ , исходя из условия  $d_A \gg d_B$ , где  $d_A$  и  $d_B$  – внутренний диаметр сосуда и выпускного отверстия соответственно<sup>16</sup>.

$$\text{Ответ: } v_B = (2gh)^{0,5} = 6,3 \text{ м/с.}$$

**Задача 3.3.** Манометр, установленный на трубопроводе, показывает давление 0,8 МПа. Определить суточную потерю воды через трещину трубопровода, площадь которой составляет 4 мм<sup>2</sup>.

$$\text{Ответ: } 6,5 \text{ м}^3/\text{сут.}$$

**Задача 3.4.** Глубина погружения центра отверстия  $H = 2$  м, давление над поверхностью жидкости 150 кПа, атмосферное давление 0,1 МПа, диаметр отверстия 30 мм, коэффициент расхода  $\mu = 0,6$ . Определить начальные объемные  $Q$  и массовые  $G$  расходы

<sup>16</sup> См. указание к задаче 3.1, относя точку  $A$  к свободной поверхности жидкости в сосуде.

воды и бензина ( $\rho_6 = 750 \text{ кг/м}^3$ ), если истечение происходит из закрытого сосуда большого объема в атмосферу через малое отверстие в тонкой стенке.

*Ответ:*  $Q_в = 4,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$  и  $Q_6 = 4,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ ;  $G_в = 4,2 \text{ кг/с}$  и  $G_6 = 3,7 \cdot 10^{-3} \text{ кг/с}$ .

**Задача 3.5.** Определить расстояние  $l$ , на которое будет падать струя воды при истечении из бака, сообщающегося с атмосферой, через малое отверстие в тонкой стенке. Напор в баке  $H = 5 \text{ м}$ ,  $h = 1 \text{ м}$  (рис. 3.15).

*Ответ:* 4,5 м.

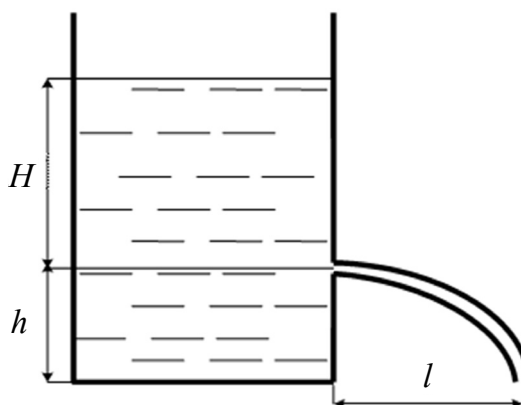


Рис. 3.15. К задаче 3.5

**Задача 3.6.** Глубины погружения центров малых отверстий (рис. 3.16) – величины постоянные и равные  $h_1 = 2 \text{ м}$  и  $h_2 = 1,5 \text{ м}$ . Давления в сосудах равны  $p_1 = 0,3 \text{ МПа}$  и  $p_2 = 0,15 \text{ МПа}$ . Вычислить постоянный полный напор, определяющий скорость истечения воды из сосуда А в сосуд В и из сосуда в атмосферу

*Ответ:* 13,8 м и 6,6 м.

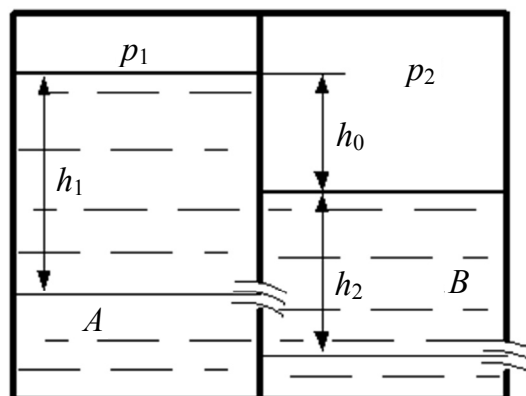


Рис. 3.16. К задаче 3.6

**Задача 3.7.** Открытый резервуар делится при помощи вертикальных перегородок на три части, сообщающиеся с друг другом (рис 3.17). Определить расход воды через систему и найти распределение напоров  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3$ , если диаметры отверстий равны  $d_1 = 90 \text{ мм}$ ,  $d_2 = 60 \text{ мм}$  и  $d_2 = 70 \text{ мм}$  и постоянный напор  $H = 2,5 \text{ м}$ , коэффициент расхода  $\mu = 0,6$ .

*Ответ:*  $Q = 9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}$ ,  $H_1 = 0,28 \text{ м}$ ,  $H_2 = 1,44 \text{ м}$  и  $H_3 = 0,78 \text{ м}$ .

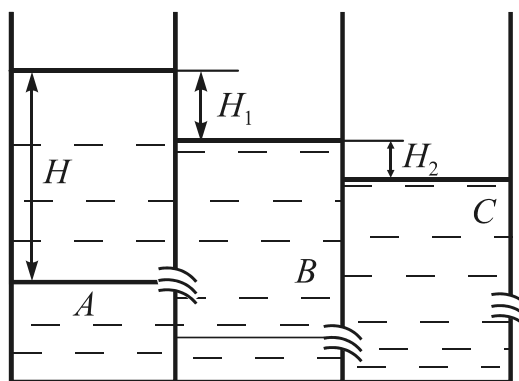


Рис. 3.17. К задаче 3.7

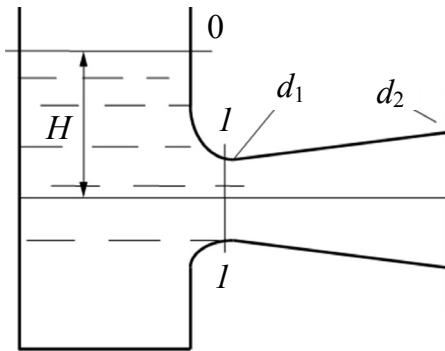


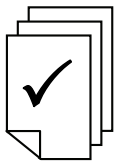
Рис. 3.18. К задаче 3.8

**Задача 3.8.** Жидкость вытекает из открытого резервуара в атмосферу через трубу (рис. 3.18), имеющую плавное сужение до диаметра  $d_1$ , а затем постепенное расширение до  $d_2$ . Истечение происходит под действием напора  $H = 3$  м.

1. Пренебрегая потерями энергии, определить абсолютное давление  $P$  в узком сечении трубы  $1-1$ , если:

- соотношение диаметров  $d_2 / d_1 = \sqrt{2}$ ;
- атмосферное давление соответствует  $h_3 = 750$  мм рт. ст.; плотность жидкости  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

2. Найти напор  $H_{кр}$ , при котором абсолютное давление в сечении  $1-1$  будет равно нулю.



*Указание.* Уравнение Бернулли следует записать два раза, например для сечений  $0-0$  и  $2-2$ , а затем для сечений  $1-1$  и  $2-2$ .

*Ответ:*  $P = 0,012$  МПа,  $H_{кр} = 4,3$  м.

### 3.8. Относительное движение жидкости и твердого тела

**Сопротивление жидкостей движущимся в них телам.** Сопротивление тела, движущегося в жидкости, всегда можно разложить на две части: на сопротивление, обусловленное разностью давлений, и сопротивление, обусловленное трением. При этом результирующая всех сил давления и будет *сопротивлением давления*, а результирующая всех сил трения – *сопротивлением трения*.

Согласно современным представлениям, сопротивление жидкости движущемуся в ней телу является результатом разностей давлений в его носовой и кормовой частях, а также касательных напряжений, возникающих при обтекании тела. Причем влияние разности давлений в общем случае преобладает. Эта разность может быть принята пропорциональной динамическому давлению (т. е. динамическому напору) и площади, на которую эта разность давлений действует, т. е. сила сопротивления  $f_{сопр}$

$$f_{\text{сопр}} = cF \frac{\rho u^2}{2}, \quad (3.35)$$

где  $F$  – площадь, на которую воздействует результирующее давление;  $c = f(\text{Re})$  – коэффициент пропорциональности (коэффициент сопротивления) есть функция числа Рейнольдса.

Весьма важным является вопрос: какая численная связь существует между сопротивлением, которое встречает тело при своем движении в покоящейся жидкости, и силой, с которой движущаяся жидкость действует на покоящееся тело.

Если жидкость движется во всех своих частях равномерно, то между обоими указанными случаями не может быть никакой разницы.

Однако если движение жидкости не является совершенно равномерным во всех ее частях (как это имеет место при турбулентном течении), то разница между обоими указанными случаями все же имеется.

Как правило, во втором случае, т. е. при обтекании неподвижного тела, сопротивление больше, чем при движении тела в покоящейся жидкости.

**Пограничный слой.** При движении вязкой жидкости вдоль твердой поверхности в непосредственной близости от нее образуется слой, в пределах которого интенсивность действия сил вязкости велика и соизмерима с интенсивностью действия сил инерции и гидродинамического давления. Влияние вязкости приводит к тому, что внутри рассматриваемого слоя скорость резко меняется от нуля (условие «прилипания») до значения скорости набегающего на тело невозмущенного потока. Эта область течения называется *пограничным слоем*.

Введение понятия пограничного слоя позволяет разделить весь поток на две области течения: пограничный слой и внешний поток.

Каждую из областей можно рассчитывать отдельно. Однако деление потока на две области не означает, что они являются изолированными и не связанными друг с другом. Граница между ними может быть проведена лишь условно, при этом в расчетах ее обычно назначают из условия, когда скорость на внешней границе пограничного слоя отличается от скорости внешнего невозмущенного потока на заданную малую величину (например, на 1 или 0,5%).

Следует отметить, что толщина пограничного слоя существенным образом зависит как от характера течения набегающего потока, так и от формы обтекаемого тела.

Для случая обтекания полубесконечной пластины при относительно малых числах Рейнольдса, толщина пограничного слоя  $\delta$  изменяется по длине пластины  $x$  в соответствии с соотношением

$$\delta = 5,2 \sqrt{\frac{\nu x}{u_\infty}}, \quad (3.36)$$

где  $\nu$  – коэффициент динамической вязкости;  $u_\infty$  – скорость на внешней границе пограничного слоя.

Пограничный слой может быть как ламинарным, так и турбулентным. Переход от одного режима течения к другому определяется размерами тела, интенсивностью увеличения толщины слоя, степенью турбулентности набегающего потока и т. п.

Как указывалось выше, сопротивления при обтекании твердого тела (кроме пластины, ориентированной вдоль векторов скорости набегающего потока) жидкостью или газом определяются не столько касательными напряжениями, возникающими на твердой границе, сколько влиянием образующейся за телом области вихревого течения. Образование этой области связано с явлением *отрыва пограничного слоя*.

При обтекании тела с резко меняющимся профилем поверхности отрыв пограничного слоя является следствием проявления инерции жидких частиц в пределах пограничного слоя.

При обтекании плавной криволинейной поверхности отрыв пограничного слоя связан с характером изменения давления вблизи твердой поверхности (рис. 3.19).

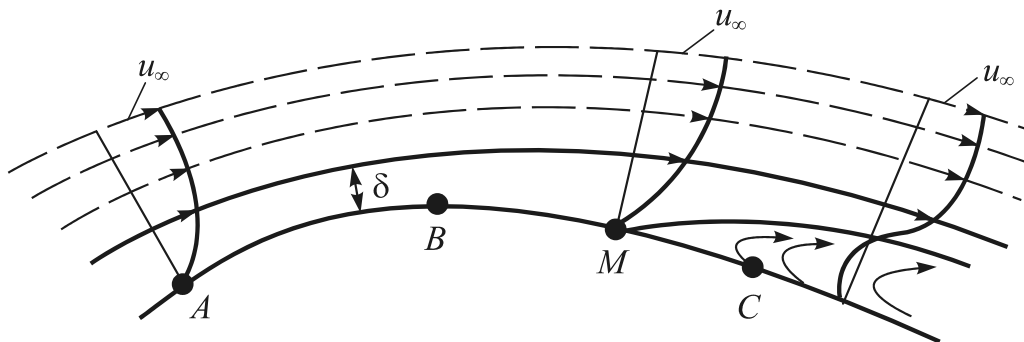


Рис. 3.19. Отрыв пограничного слоя на криволинейной поверхности



На участке  $AB$  (рис. 3.19) скорость частиц жидкости, находящихся в пограничном слое, увеличивается ( $\partial u / \partial x > 0$ ), а на участке  $BC$  уменьшается ( $\partial u / \partial x < 0$ ).

Тогда в соответствии с уравнением Бернулли давление на участке  $AB$  уменьшается ( $\partial p / \partial x < 0$ ), а на участке  $BC$  увеличивается ( $\partial p / \partial x > 0$ ).

В случае движения вязкой жидкости часть кинетической энергии теряется за счет трения внутри пограничного слоя. Оставшейся части кинетической энергии может не хватить на преодоление действия положительного градиента давления, стремящегося изменить направление движения жидких частиц. В результате частицы жидкости могут начать движение в обратном направлении и привести тем самым к отрыву потока от твердой границы.

За точкой отрыва пограничный слой трансформируется в отрывное течение, характеризующееся сильной неустойчивостью образующихся крупномасштабных вихрей. Отдельные вихри, отрываясь от твердой поверхности, сносятся потоком, на их месте образуются новые вихри и т. д.

Образование, взаимодействие и перемещение вихрей за обтекаемым телом создают совершенно иную по структуре область течения, которую часто называют *гидродинамическим* (или *аэродинамическим*) *следом*.

Наличие явления отрыва пограничного слоя приводит к перераспределению составляющих полного сопротивления при обтекании криволинейной поверхности от сопротивления трения к сопротивлению давления. Зависимость коэффициента сопротивления в (3.35) от числа Рейнольдса иллюстрирует рис. 3.20.

При изменении числа  $Re$  меняется также и положение точки отрыва пограничного слоя и его структура (рис. 3.21).

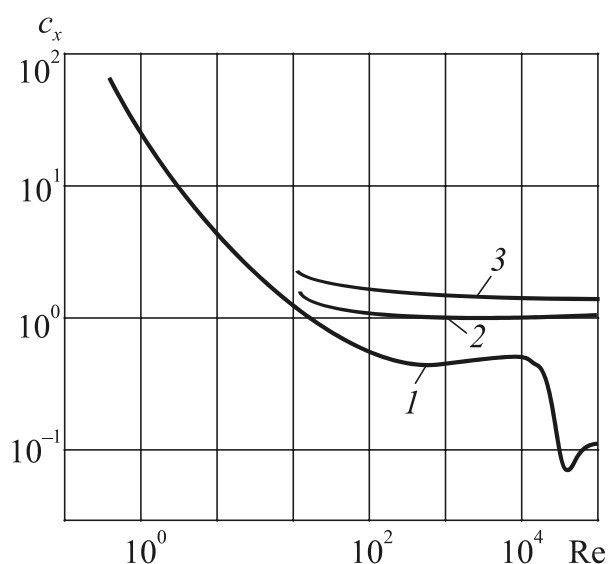


Рис. 3.20. Зависимость коэффициента лобового сопротивления от числа Рейнольдса:  
1 – шар; 2 – цилиндр; 3 – диск

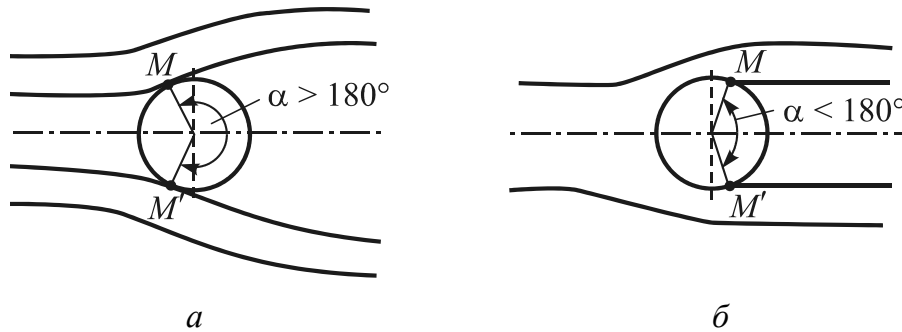


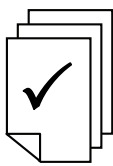
Рис. 3.21. Изменение положения точки отрыва пограничного слоя на сфере при различных числах Рейнольдса:  
 $a - 10 < Re < 10^3$ ;  $b - 10^3 < Re < 10^5$

До тех пор пока пограничный слой остается ламинарным ( $10 < Re < 10^3$ ), точка отрыва находится в лобовой части сферы.

В диапазоне изменения числа Рейнольдса приблизительно  $10^3 < Re < 10^5$  ламинарный пограничный слой постепенно переходит в турбулентный слой, и точка отрыва смещается в кормовую область сферы.

Полный переход ламинарного пограничного слоя в турбулентный происходит резко при числах  $Re = 10^5$ .

В этом случае угол между симметричными точками отрыва принимает минимальное значение  $110-120^\circ$  и величина области отрывного течения также становится наименьшей. Сопротивление при этом резко уменьшается. Такое явление называют *кризисом сопротивления*.



**Пример 3.3.** Твердый шар диаметром  $d = 0,05$  м и плотностью  $\rho_{ш} = 8000$  кг/м<sup>3</sup> падает в канале диаметра  $D$ , заполненном жидкостью с плотностью  $\rho_{ж} = 1000$  кг/м<sup>3</sup> (рис. 3.22).

Определить скорость установившегося движения шара  $v$ , при условии, что  $d/D \ll 1$  (т. е. ограничивающие стенки канала не оказывают заметного влияния на характер взаимодействия жидкости с движущимся в ней твердым телом), сопротивление давления преобладает по сравнению с сопротивлением трения.

В расчетах принять коэффициент сопротивления  $c = 0,6$ .

**Решение.** Скорость установившегося движения шара определится из баланса силы тяжести  $f_g$  и силы сопротивления давления  $f_c$ , т. е.  $f_g = f_c$ .

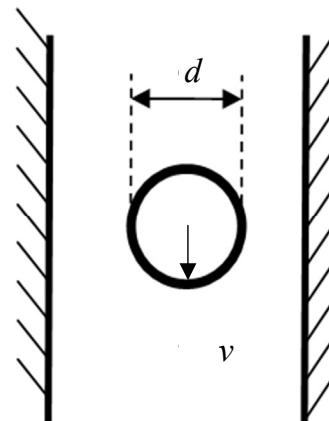


Рис. 3.22.  
 К примеру 3.3

Согласно соотношению (3.35), сила сопротивления шара  $f_c$  в данном случае имеет вид  $f_c = cF \frac{\rho_{\text{ж}} v^2}{2}$ , где  $F = \frac{\pi d^2}{4}$  – максимальное (по отношению к набегающему потоку) сечение шара.

Сила тяжести определяется из соотношения

$$f_g = \rho_{\text{ш}} V_{\text{ш}} g,$$

где

$$V_{\text{ш}} = \frac{\pi d^3}{6} \text{ – объем шара.}$$

Тогда

$$v = \left( \frac{2\rho_{\text{ш}} V_{\text{ш}} g}{cF \rho_{\text{ж}}} \right)^{0,5} = 2,95 \text{ м/с.}$$



**Пример 3.4.** Определить угол  $\alpha$  между симметричными точками отрыва пограничного слоя при обтекании сферы диаметром  $d = 0,1$  м потоком жидкости со скоростью  $v = 0,5$  м/с при условии линейной зависимости сечения отрыва от числа Рейнольдса.

Данную линейную зависимость строить исходя из допущения, что сечение отрыва равно миделеву сечению ( $d_m$ ) при  $Re = 10^3$ , а при  $Re = 10^5$  –  $\alpha = 120^\circ$ .

Кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  жидкости принять равными  $10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с.

*Решение.* Угол отрыва (рис. 3.21) связан сечением отрыва соотношением

$$\alpha = \arcsin \frac{d_{\text{от}}}{d_m} = \arcsin \sqrt{\frac{S_{\text{от}}}{S_m}},$$

где  $d_{\text{от}}$  и  $d_m$  – диаметры соответственно отрывного ( $S_{\text{от}}$ ) и миделева ( $S_m$ ) сечений.

Сечение отрыва при  $Re = 10^5$  определяется по соотношению

$$\begin{aligned} S_{\text{Re}=10^5} &= \frac{\pi (d_m \sin(\alpha/2))^2}{4} = \frac{\pi (d_m \sin(120^\circ/2))^2}{4} = \\ &= \frac{3,14 \cdot (0,1 \sin 60^\circ)^2}{4} = 5,59 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Сечение отрыва при  $Re = 10^3$ , согласно сделанным допущениям, равно  $S_m$ :

$$S_{\text{Re}=10^3} = \frac{\pi d_m^2}{4} = \frac{3,14 \cdot 0,1^2}{4} = 7,85 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Тогда указанная зависимость  $\alpha$  от  $Re$  имеет вид

$$\alpha = \left( \arcsin \sqrt{\frac{S_x}{S_M}} \right),$$

где индекс  $x$  относится к искомому сечению;

$$S_x = S_{Re=10^5} - \frac{(S_{Re=10^5} - S_{Re=10^3})}{(10^5 - 10^3)} (10^5 - Re_x).$$

Данная зависимость справедлива при условии, что  $Re_x$  находится в диапазоне от  $10^3$  до  $10^5$ .

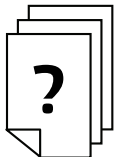
$$Re_x = \frac{d_M v}{\nu} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{10^{-6}} = 5 \cdot 10^4.$$

Тогда

$$S_x = 5,59 \cdot 10^{-3} - \frac{(5,59 \cdot 10^{-3} - 7,85 \cdot 10^{-3})}{(10^5 - 10^3)} (10^5 - 5 \cdot 10^4) = 6,72 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

Соответственно

$$\alpha_x = 2 \left( \arcsin \sqrt{\frac{S_x}{(\pi d_M^2 / 4)}} \right) = 135^\circ.$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 3.9.** Твердый шар диаметром  $D = 0,05$  м движется в объеме неподвижной жидкости плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> с постоянной скоростью  $v = 3$  м/с. Определить силу сопротивления движению шара, при условии, что преобладает сопротивление давления. В расчетах принять коэффициент сопротивления  $c = 0,8$ .

$$\text{Ответ: } f_{\text{ш}} = c \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho v^2}{2} = 7,1 \text{ Н.}$$

**Задача 3.10.** Твердый шарик диаметром  $D = 0,02$  м и плотностью  $\rho_{\text{ш}} = 7000$  кг/м<sup>3</sup>

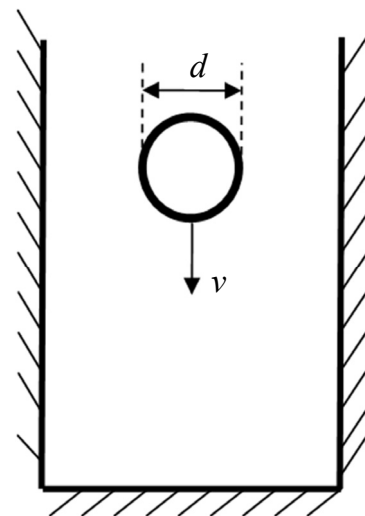


Рис. 3.23. К задаче 3.10

падает в непроточный колодец, заполненный жидкостью плотностью  $\rho_{\text{ж}} = 900 \text{ кг/м}^3$  (рис. 3.23). Определить глубину колодца  $L$ , если время падения шарика  $\tau$  от его верхней части до дна составляет 10 с.



*Указание.* В расчетах принять следующие допущения:  
 – сила сопротивления движению шара определяется сопротивлением давления;  
 – скорость падения шарика на верхнем срезе колодца имеет установившееся значение.

В расчетах также принять, что коэффициент сопротивления шара (коэффициент формы)  $c = 0,9$ .

$$\text{Ответ: } L = \tau \left( \frac{4 \rho_{\text{ш}} g d}{3 c \rho_{\text{ж}}} \right)^{0,5} = 15 \text{ м.}$$

**Задача 3.11.** Определить на основании значения числа Рейнольдса режим течения и соответствующую толщину пограничного слоя  $\delta$  на расстоянии 2 м от лобовой части при обтекании со скоростью 1,5 м/с полубесконечной пластины потоком жидкости плотностью  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ . Кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  принять равным  $2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .

*Ответ:*  $\delta = 0,009 \text{ м}$ ; режим течения – переходный от ламинарного к турбулентному.

**Задача 3.12.** Определить угол  $\alpha$  между симметричными точками отрыва пограничного слоя (рис. 3.18) при обтекании сферы диаметром  $d = 0,2 \text{ м}$  потоком жидкости со скоростью  $v = 0,5 \text{ м/с}$ . Кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  принять равным  $1 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ .



*Указание.* Решение принять на основании числа Рейнольдса.

*Ответ:*  $Re = 10^5$ , соответственно,  $\alpha \approx 120^\circ$ .

**Задача 3.13.** Определить коэффициент лобового сопротивления  $c$  при обтекании сферы диаметром 0,25 м газовым потоком плотностью  $1 \text{ кг/м}^3$ , имеющим скорость 10 м/с. Кинематический коэффициент вязкости  $\nu$  принять равным  $0,15 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ .



*Указание.* Решение принять на основании числа Рейнольдса, согласно рис. 3.20.

*Ответ:*  $Re = 1,7 \cdot 10^4$ , соответственно,  $c \approx 0,75$ .

### 3.9. Гидравлический расчет трубопроводных систем

Полный перепад давлений при установившемся движении потока в трубных элементах можно определить по следующему соотношению

$$\Delta p_{\Sigma} = \Delta p_{\text{тр}} + \Delta p_{\text{м}} + \Delta p_{\text{нив}} + \Delta p_{\text{кол}}, \quad (3.37)$$

где индексы: «тр» – потери напора от трения в прямых трубах, «м» – сумма потерь напора от местных сопротивлений; «нив» – нивелирный перепад давлений; «кол» – суммарное изменение статического давления в коллекторах.

В случае, если пароводяная смесь поднимается по трубам на некоторую высоту выше уровня воды в барабане, что часто имеет место в котлах с естественной и многократной принудительной циркуляцией, к полному перепаду давлений добавляются потери напора на подъем среды над уровнем в барабане.

**Потери напора от трения и местных сопротивлений.** Потери напора от трения при изотермическом движении воды в трубах определяются по уравнению Дарси – Вейсбаха:

$$\Delta p_{\text{тр}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{w_m^2}{2\rho} = \lambda_0 l \frac{w_m^2}{2\rho}, \quad (3.38)$$

где  $\lambda_0$  – приведенный коэффициент трения;  $l$  и  $d$  – длина и внутренний диаметр трубы соответственно;  $\lambda$  – коэффициент трения;  $w_m = \rho v$  – массовая скорость потока;  $\rho$  – плотность среды;  $v$  – скорость течения.

Потери напора от местных сопротивлений

$$\sum \Delta p_{\text{м}} = \sum \zeta_{\text{м}} \frac{w_m^2}{2\rho}, \quad (3.39)$$

где  $\sum \zeta_{\text{м}}$  сумма коэффициентов местных сопротивлений на пути движения потока.

Суммарные потери от трения и местных сопротивлений

$$\Delta p_{\Sigma} = (\lambda_0 l + \sum \zeta_{\text{м}}) \frac{w_m^2}{2\rho} = z \frac{w_m^2}{2\rho}, \quad (3.40)$$

где  $z = \lambda_0 l + \sum \zeta_m$  – полный коэффициент сопротивлений, связанных с потерями напора на трение и на местных сопротивлениях.

Для однофазного потока с учетом того, что поток массы находится в автомодельной области, коэффициент трения определяется по известной формуле Никурадзе:

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{d}{2k} + 1,74\right)^2}, \quad (3.41)$$

где  $k$  – абсолютная или «песочная» по Никурадзе шероховатость труб.

Для стальных труб из углеродистой и низколегированной стали можно принять  $k = 0,08$  мм; для труб из аустенитной стали  $k = 0,01$  мм. Для этих случаев приведенный коэффициент трения для труб из углеродистой и аустенитной стали дан на рис. 3.24.

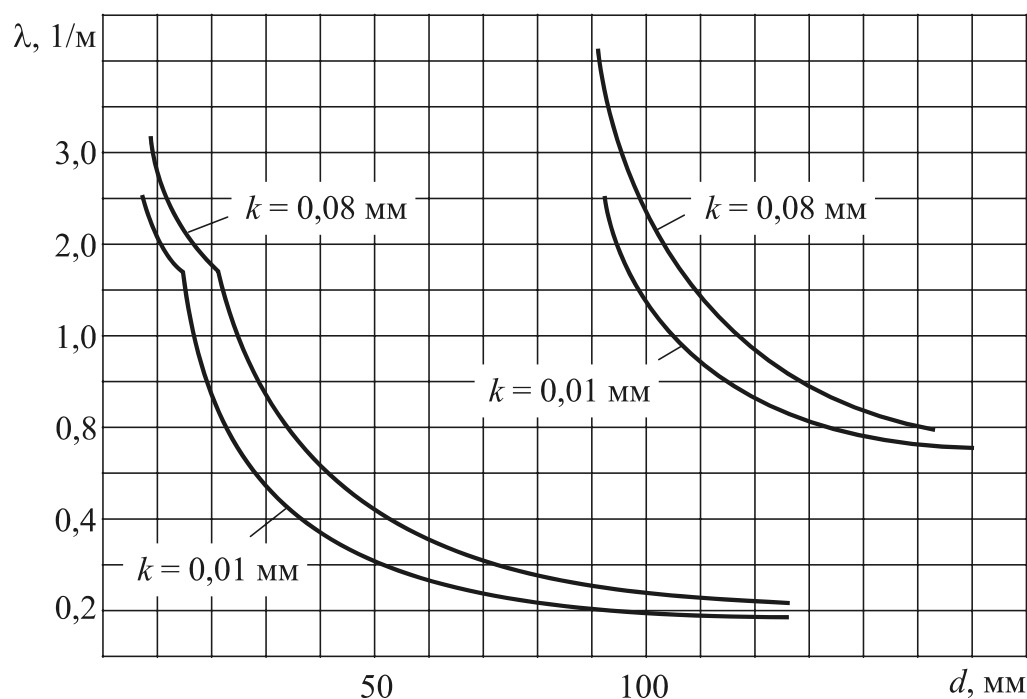


Рис. 3.24. Приведенный коэффициент трения для котельных труб

Наиболее часто встречающимися местными сопротивлениями являются сопротивления:

- на входе в трубу из коллектора;
- на выходе из трубы в коллектор;
- при поворотах потока в сгибах труб.

Коэффициенты местных сопротивлений в (3.39) в зависимости от вида местного сопротивления могут быть определены по следующим соотношениям:

– для случая *внезапного расширения* потока

$$(\zeta_M)_p = \left[ \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 - 1 \right]^2; \quad (3.42)$$

– для случая *внезапного сужения* потока

$$(\zeta_M)_c = 0,5 \left[ 1 - \left( \frac{d_2}{d_1} \right)^2 \right], \quad (3.43)$$

где  $d_1, d_2$  – внутренний диаметр трубы соответственно до и после местного сопротивления.

**Определение нивелирного перепада давлений и изменения статического давления в коллекторах.** Нивелирный напор для элементов с принудительной циркуляцией определяется как гидростатическое давление между раздающим и собирающим коллекторами.

В гидравлических расчетах рекомендуется проводить определение нивелирного напора по уравнению

$$\Delta p_{\text{нив}} = \pm g \sum H_{\text{уч}} \bar{\rho}_{\text{уч}}, \quad (3.44)$$

где  $\sum H_{\text{уч}}$  – высота всех участков в элементе;  $\bar{\rho}_{\text{уч}}$  – средняя плотность среды в элементе. При этом для докритических параметров средняя плотность среды определяется по средней расходной энтальпии:

$$\bar{h} = \frac{h_{\text{вх}} + h_{\text{вых}}}{2},$$

где  $h_{\text{вх}}, h_{\text{вых}}$  – энтальпии среды на входе в элемент и на выходе из элемента.

При принудительном движении среды можно рассматривать два случая:

1. Входной коллектор находится ниже выходного коллектора и движение среды осуществляется снизу вверх. Тогда нивелирный напор имеет направление против движения потока. При этом создаваемый насосом напор должен преодолевать сопротивления, возникающие при движении.



2. Среда движется сверху вниз. Тогда нивелирный напор действует в одном направлении с приложенными силами. В этом случае он имеет отрицательное значение.

Потери напора при прохождении рабочей среды через коллекторное устройство могут быть в первом приближении аппроксимированы как потери напора на преодоление местных сопротивлений, т. е. потерями напора при внезапном расширении или сужении потока, а также при плавных изменениях направления движения потока.

Изменение статического давления в коллекторах  $\Delta p_{\text{кол}}$ , т. е. собственно коллекторный эффект, вызывается изменением скоростей потока и соответственно статических давлений по оси коллектора.

Величину  $\Delta p_{\text{кол}}$  можно представить с достаточной для технических расчетов степенью точности через среднее значение, которое в свою очередь составляет  $2/3$  от максимального значения

$$\Delta p_{\text{кол}} = \frac{2}{3} \frac{A(w_m^{\text{max}})^2}{2\rho}, \quad (3.45)$$

где  $w_m^{\text{max}}$  – массовая скорость на входе в активную часть коллектора;  $\rho$  – плотность среды;  $A$  – коэффициент, учитывающий потери напора на трение (для большинства практических случаев  $A \approx 1$ ).

**Определение коэффициентов сопротивлений сложных систем.** Если какое-либо звено состоит из  $n$  последовательно соединенных участков с различным сечением, то полный перепад давлений и обобщенный коэффициент сопротивлений всего такого звена может быть определен исходя из следующих соотношений:

$$\Delta p_{\Sigma} = z_{\Sigma} \frac{w_{mn}^2}{2\rho}, \quad (3.46)$$

где

$$z_{\Sigma} = z_1 \left( \frac{f_n}{f_1} \right)^2 + z_2 \left( \frac{f_n}{f_2} \right)^2 + \dots + z_n. \quad (3.47)$$

Если какое-либо звено состоит из  $N$  параллельно соединенных участков с различным сечением, то соотношения (3.46), (3.47) заменяются на следующие:

$$\Delta p_{\Sigma} = z_N \frac{w_{mn}^2}{2\rho} = z_{\Sigma} \frac{w_{mf}^2}{2\rho}; \quad (3.48)$$

$$z_{\Sigma} = \frac{\left( \sum_{n=1}^N f_n \right)^2}{\left( \frac{f_1}{\sqrt{z_1}} + \frac{f_2}{\sqrt{z_2}} + \dots + \frac{f_n}{\sqrt{z_N}} \right)}, \quad (3.49)$$

где  $w_{mf} = G_{\Sigma} / \sum_1^n f_n$  – средняя (по всей системе) массовая скорость потока.

При выводе данных соотношений использованы следующие равенства

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n = G_{\Sigma},$$

т. е.

$$w_{m1}f_1 + w_{m2}f_2 + \dots + w_{mn}f_n = w_{mf} \sum_{n=1}^N f_n$$

и

$$\Delta p_1 = \Delta p_2 = \dots = \Delta p_n,$$

т. е.

$$z_1 \frac{w_{m1}^2}{2\rho} = z_2 \frac{w_{m2}^2}{2\rho} = \dots = z_n \frac{w_{mn}^2}{2\rho}.$$

В случае если параллельно включенные участки имеют одинаковые сечения и коэффициенты гидравлических сопротивлений, уравнение (3.46) приобретает вид

$$z_{\Sigma} = z_n. \quad (3.50)$$

Таким образом, гидравлические потери всего разветвленного звена можно считать равными гидравлическим потерям в одном участке при значении массовой скорости, определяемой делением всего расхода на сумму сечений всех участков.



**Пример 3.5.** Через трубопровод переменного сечения прокачивается теплоноситель ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) с расходом  $G = 2,5 \text{ кг/с}$ . Характеристики трубопровода (рис. 3.25):  $D = 80 \text{ мм}$ ,  $d = 40 \text{ мм}$ ,  $L = 5 \text{ м}$ ,  $l = 1 \text{ м}$ .

В расчетах коэффициента трения по формуле Никурадзе принять значение абсолютной шероховатости труб  $k = 0,05$  мм

Определить полный перепад давлений в трубопроводе  $\Delta P_{\Sigma}$ , связанный с преодолением сил трения и местных сопротивлений (эффекты на входе и выходе трубопровода не учитывать).

*Решение.* Суммарные потери напора в рассматриваемом трубопроводе при принятых допущениях включают две составляющие:

- потери напора на трения по всей длине трубопровода  $\Delta p_{\text{тр}}$ ;
- потери напора на местных сопротивлениях  $\sum \Delta p_{\text{м}}$  – внезапное расширение и сужение потока.

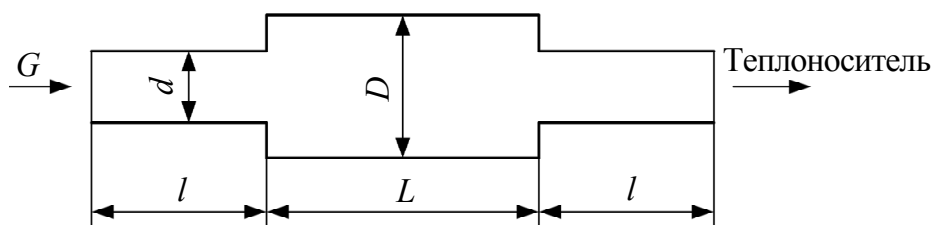


Рис. 3.25. К примеру 3.5

Согласно (3.38) и (3.41):

$$\Delta p_{\text{тр}} = 2 \left( \lambda_l \frac{l}{d} \frac{w_l^2}{2\rho} \right) + \lambda_L \frac{L}{D} \frac{w_L^2}{2\rho};$$

$$\lambda_l = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{d}{2k} + 1,74 \right)^2} = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{40}{2 \cdot 0,05} + 1,74 \right)^2} = 0,021;$$

$$\lambda_L = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{D}{2k} + 1,74 \right)^2} = \frac{1}{\left( 2 \lg \frac{80}{2 \cdot 0,05} + 1,74 \right)^2} = 0,018,$$

где

$$w_l = \frac{G}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{2,5}{3,14 \cdot \frac{0,04^2}{4}} = 1990 \text{ кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^2);$$

$$w_L = \frac{G}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{2,5}{3,14 \cdot \frac{0,08^2}{4}} = 497 \text{ кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^2).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Delta p_{\text{тр}} &= 2 \left( 0,021 \cdot \frac{1}{0,04} \cdot \frac{1990^2}{2 \cdot 1000} \right) + 0,018 \cdot \frac{5}{0,08} \cdot \frac{497^2}{2 \cdot 1000} = \\ &= 2079 + 139 = 2218 \text{ Па}. \end{aligned}$$

Согласно (3.39), (3.42) и (3.43):

$$\sum \Delta p_m = \zeta_1 \frac{w_1^2}{2\rho} + \zeta_2 \frac{w_2^2}{2\rho};$$

$$\zeta_1 = \left[ \left( \frac{D}{d} \right)^2 - 1 \right]^2 = \left[ \left( \frac{0,08}{0,04} \right)^2 - 1 \right]^2 = 9;$$

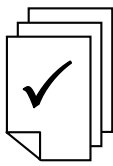
$$\zeta_2 = 0,5 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{d}{D} \right)^2 \right] = 0,5 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{0,04}{0,08} \right)^2 \right] = 0,375.$$

Тогда

$$\sum \Delta p_m = 9 \frac{1990^2}{2 \cdot 1000} + 0,375 \frac{497^2}{2 \cdot 1000} = 17\,820 + 46 = 17\,866 \text{ Па}.$$

Соответственно, суммарные потери напора в рассматриваемом трубопроводе составят:

$$\Delta p_\Sigma = \Delta p_{\text{тр}} + \sum \Delta p_m = 2219 + 17\,866 = 20\,085 \text{ Па}.$$



**Пример 3.6.** Жидкость с заданными свойствами ( $\rho$ ,  $\mu$ ) должна перетекать из верхнего резервуара в нижний (уровни в которых считаются постоянными) с заданным расходом  $Q = 2,5 \text{ м}^3/\text{ч}$  по трубопроводу с известными параметрами  $l = 15 \text{ м}$ ,  $d = 0,04 \text{ м}$ , где  $d$ ,  $l$  – внутренний диаметр и длина трубопровода (рис. 3.26).

Давления  $p_1$  и  $p_2$  на свободных поверхностях жидкости известны и равны, например, атмосферному давлению:  $p_1 = p_2 = p_a$ .

Высоты уровней верхнего и нижнего резервуаров поддерживаются постоянными.

Определить требуемый нивелирный напор  $\Delta p_{\text{нив}}$  самотечного трубопровода и разность уровней свободных поверхностей жидкости, исходя из условия, что потери напора в местных сопротивлениях малы по сравнению с потерями напора на трение по длине трубопровода.

В расчетах коэффициента трения по формуле Никурадзе принять значение абсолютной шероховатости труб  $\kappa = 0,05 \text{ мм}$ .

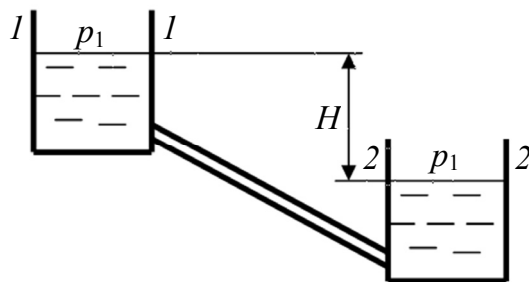


Рис. 3.26. К примеру 3.6

*Решение.* Требуемый нивелирный напор определяем из равенства нивелирного напора (соотношение (3.42)) потерям напора на трение при заданной скорости потока:

$$\Delta p_{\text{нив}} = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho v_{\text{тр}}^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{\left(\frac{Q}{S_{\text{тр}}}\right)^2}{2},$$

где  $v_{\text{тр}}$  – скорость жидкости в трубопроводе;  $S_{\text{тр}}$  – сечение трубопровода;

$$\lambda = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{d}{2\kappa} + 1,74\right)^2} = \frac{1}{\left(2 \lg \frac{40}{2 \cdot 0,05} + 1,74\right)^2} = 0,018.$$

Тогда

$$\Delta p_{\text{нив}} = 0,018 \cdot \frac{15}{0,04} \cdot 1000 \cdot \frac{\left(4 \cdot \frac{2,5}{3600}\right)^2}{3,14 \cdot 0,04^2} / 2 = 1215 \text{ Па};$$

$$H = \frac{\Delta p_{\text{нив}}}{\rho g} = \frac{1215}{1000 \cdot 9,8} = 0,1 \text{ м}.$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 3.14.** Через трубопроводную систему (рис. 3.27), состоящую из труб переменного диаметра, прокачивается теплоноситель ( $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ) с суммарным расходом  $G = 5,0 \text{ кг/с}$ . Характеристики трубопровода:  $D = 80 \text{ мм}$ ,  $d = 40 \text{ мм}$ ,  $L = 10 \text{ м}$ .

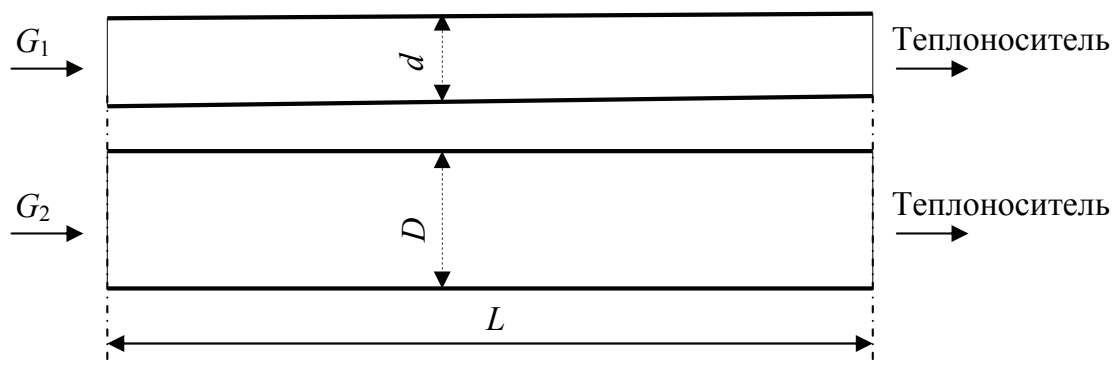


Рис. 3.27. К задаче 3.14

В расчетах коэффициента трения по формуле Никурадзе принять значение абсолютной шероховатости труб  $\kappa = 0,05$  мм. Определить обобщенный коэффициент сопротивлений  $z_{\Sigma}$  и связанный с преодолением сил трения полный перепад давлений в трубопроводе  $\Delta p_{\Sigma}$ .



Указание. При решении задачи воспользоваться соотношениями (3.45), (3.46).

Ответ:  $z_{\Sigma} = 2,35$ ,  $\Delta p_{\Sigma} = 745$  Па .

**Задача 3.15.** Через трубопроводную систему, состоящую из 10 параллельных труб постоянного диаметра  $d$  и одинаковой длины  $l$ , прокачивается теплоноситель ( $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>) с суммарным расходом  $G = 5,0$  кг/с. Характеристики трубопровода:  $d = 40$  мм,  $l = 10$  м. В расчетах коэффициента трения по формуле Никурадзе принять значение абсолютной шероховатости труб  $\kappa = 0,1$  мм. Определить связанный с преодолением сил трения полный перепад давлений в трубопроводной системе  $\Delta p_{\Sigma}$  и обобщенный коэффициент сопротивлений  $z_{\Sigma}$ .

Ответ:  $z_{\Sigma} = 6,22$ ,  $\Delta p_{\Sigma} = 4932$  Па.

**Задача 3.16.** Трубопроводная система состоит из  $n = 20$  параллельных труб переменного диаметра, конструкция которых представлена на рисунке 3.25. Суммарный расход рабочей среды  $G_{\Sigma} = 50$  кг/с. В расчетах принять условия и допущения примера 3.5. Определить полный перепад давлений  $\Delta p_{\Sigma}$  в трубопроводной системе.

Ответ:  $\Delta p_{\Sigma} = 8,2$  кПа.

**Задача 3.17.** Кожухотрубное теплообменное устройство включает в себя раздающие и собирающие коллектора, а также размещенную внутри кожуха систему параллельных труб.

Определить изменение гидростатического давления, связанное с изменением скоростей потока и соответственно статических давлений по оси раздающего в трубную систему коллектора.

В расчетах принять:

- максимальная по оси коллектора массовая скорость потока  $w_m = 1,5$  м/с;
- плотность рабочей среды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>.

Коэффициент, учитывающий потери напора на трение в коллекторном устройстве, принять равным единице.

Ответ:  $\Delta p_{\text{кол}} = 750$  Па .

**Задача 3.18.** Через звено трубопроводной системы, состоящей из  $n$  последовательно соединенных участков с различным сечением и одинаковой длиной  $l = 2$  м, прокачивается теплоноситель ( $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>) с расходом  $G = 1,0$  кг/с. Характеристики трубопровода:

$$n = 5 \text{ м}; l = 2 \text{ м}; d_i = \sum_{i=1} (25 + 5i) \text{ мм},$$

где  $i$  – порядковый номер участка трубопровода.

Определить связанный с преодолением сил трения в рассматриваемом звене трубопроводной системы обобщенный коэффициент сопротивлений  $z_{\Sigma}$  и полный перепад давлений  $\Delta p_{\Sigma}$ .



*Указание.* В расчетах коэффициента трения по формуле Никурадзе принять значение абсолютной шероховатости труб  $\kappa = 0,08$  мм.

*Ответ:*  $z_{\Sigma} = 23,63$ ,  $\Delta p_{\Sigma} = 3068$  Па.

**Задача 3.19.** Принимая допущения примера 3.6, определить пропускную способность представленного на рис. 3.26 трубопровода, если заданы его геометрические характеристики ( $l = 15$  м,  $d = 0,04$  м) и действующий напор ( $H = 5$  м).

*Ответ:*  $Q = 16$  м<sup>3</sup>/ч.

**Задача 3.20.** Кожухотрубное теплообменное устройство включает в себя раздающие и собирающие коллекторы, а также размещенную внутри трубчатого кожуха систему параллельных труб. Определить полный перепад давлений в раздающем коллекторе  $\Delta p_{\Sigma}$ , включая:

– изменение гидростатического давления, связанное с изменением скоростей потока и соответственно статических давлений по оси раздающего в трубную систему коллектора  $\Delta p_{\text{кол}}$ ;

– потери напора на преодоление местных сопротивлений  $\Delta p_m$ , т. е. потери напора при внезапном расширении на входе в раздающий коллектор, и потери напора при внезапном сужении потока на входе в трубопроводную систему.

В расчетах принять:

- максимальная по оси коллектора скорость потока  $v_{\text{max}} = 30$  м/с;
- плотность рабочей среды  $\rho = 1$  кг/м<sup>3</sup>;

- диаметр коллектора  $D = 1$  м;
- соотношение диаметров подводящего трубопровода и коллектора равно 0,5;
- эквивалентный диаметр живого сечения трубопроводной системы  $(d_э)_т = 0,8D$ .

Коэффициент, учитывающий потери напора на трение в коллекторе, принять равным единице.

*Ответ:*  $\Delta p_\Sigma = 4356$  Па .

### 3.10. Течение жидкостей и газов в пористых средах

В основе моделирования течения (фильтрации) жидкостей и газов в пористых средах лежит подход, при котором реальная пористая среда рассматривается как сплошная среда, для каждой точки которой можно определить ее параметры как непрерывные функции пространственных и временной координат. Значения физических параметров в точке пористой среды характеризуются значениями для элементарного объема, содержащего эту точку. Элементарный объем должен быть достаточно большим по сравнению с размером пор. Пористость определяется как доля элементарного объема, не занятая твердой субстанцией.

В общем случае, кинематика и динамика фильтрационных процессов может быть описана на основе уравнений неразрывности и движения при соответствующих граничных и начальных условиях.

Вместе с тем, учитывая сложную геометрию, как самих пористых сред, так и собственно фильтрационных процессов, обобщенное уравнение движения фильтрационного компонента заменяется эмпирическим *уравнением Дарси*, согласно которому скорость фильтрации компонента прямо пропорциональна градиенту давления. Данное соотношение было установлено Дарси (1856) для однофазной фильтрации.

***Уравнение неразрывности для фильтрационных процессов.***  
Если рассматривать линейную фильтрацию одного компонента или однородной смеси, то уравнение неразрывности для данной системы будет иметь вид



$$-\frac{\partial m_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + q, \quad (3.51)$$

где  $m_x$  – поток массы компонента или однородной смеси плотностью  $\rho$  по направлению оси  $x$ ;  $\phi$  – пористость среды;  $q$  – интенсивность стока компонента или однородной смеси (масса единицы объема в единицу времени). В случае источника  $q$  отрицательно, так как предполагается, что оно положительно для стока.

Поток массы в данном случае представляет собой массовую скорость, т. е.

$$m_x = \rho u_x, \quad (3.52)$$

где  $u_x$  – скорость фильтрации жидкости в направлении оси  $x$ .

С учетом (3.51) уравнение (3.52) преобразуется к виду

$$-\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + q. \quad (3.53)$$

Соответствующее уравнение для трехмерного течения в пористой среде произвольной формы можно получить аналогичным образом при рассмотрении элементарного объема в декартовой системе координат:

$$-\left(\frac{\partial \rho u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho u_z}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + q,$$

или, используя оператор дивергенции  $\nabla$  (приложение 1), запишем данное уравнение в более общем виде:

$$-\nabla \rho u = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + q. \quad (3.54)$$

Для большинства практических ситуаций можно принять условие несжимаемости жидкости и собственно пористой среды, а также отсутствие стока компонента или однородной смеси.

Тогда уравнение неразрывности для фильтрационных процессов преобразуется к виду

$$\nabla \vec{u} = 0.$$

Уравнение сохранения массы (3.54) для однофазного течения можно обобщить следующим образом:

$$-\nabla \rho_i u_i = \frac{\partial}{\partial t}(\rho_i \chi \phi) + q_i, \quad (3.55)$$

где  $\rho_i$  – плотность компонента  $l$ ;  $u_i$  – скорость фильтрации компонента  $l$ ;  $q_i$  – интенсивность стока компонента  $l$ ;  $\chi$  – доля порового объема, занятого компонентом  $l$ . Очевидно, что  $\sum \chi = 1$ .

**Закон Дарси.** Как указывалось выше, динамика фильтрационных процессов описывается *законом Дарси*, который устанавливает зависимость между скоростью фильтрации жидкости или газа и гидравлическим градиентом (уклоном, перепадом давления) в пористых средах.

$$\vec{u} = K_{\phi} \text{grad} I,$$

где  $\vec{u}$  – линейная скорость фильтрации,  $K_{\phi}$ <sup>17</sup> – коэффициент фильтрации,  $\text{grad} I = \nabla H / L$  – градиент напора, равный отношению величины падения напора ( $\Delta H$ ) к длине пути фильтрации  $L$ .

Дифференциальная форма этого соотношения имеет вид

$$u = -\frac{k}{\mu} (\nabla p + \rho g z), \quad (3.56)$$

где  $\nabla p$  – перепад давлений в пористой среде,  $\rho$  – плотность фильтрационного компонента,  $\mu$  – динамическая вязкость фильтрационного компонента,  $g$  – ускорение свободного падения;  $z$  – вертикальная координата;  $k$  – коэффициент проницаемости пористой среды.

*Коэффициент проницаемости*<sup>18</sup> характеризует пропускную способность сухой поры в отношении любой однородной жидкости или газа в условиях вязкого потока. Данный коэффициент не должен зависеть от природы пропускаемой через пору компоненты, а исключительно только от строения самой поры.

Связь коэффициента фильтрации  $K_{\phi}$  и коэффициента проницаемости  $k$  следует из выражения

$$K_{\phi} = \frac{k \rho g}{\mu}.$$

В общем случае, коэффициент проницаемости можно рассматривать как *тензор*<sup>19</sup> *абсолютной проницаемости* пористой среды.

<sup>17</sup> Единицей коэффициента  $K_{\phi}$  в СИ является метр в секунду.

<sup>18</sup> Единицей проницаемости в СИ является квадратный метр. В практических приложениях в качестве единицы часто используется *дарси* ( $1 \text{ Д} \approx 1,02 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2$ ).

<sup>19</sup> См. приложение 1.

В большинстве практических задач можно тензор проницаемости считать диагональным тензором:

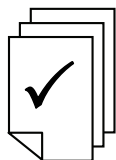
$$k = \begin{vmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{vmatrix}.$$

Если  $k_x = k_y = k_z$ , среда называется изотропной, в противном случае – анизотропной

Если координата  $z$  отсчитывается вниз по вертикали, то уравнение (3.56) преобразуется к виду

$$u = -\frac{k}{\mu}(\nabla p - \rho g z). \quad (3.57)$$

Закон Дарси распространяется только на ньютоновские жидкости в некотором ограниченном диапазоне скоростей фильтрации, в котором турбулентность, инерционные и другие высокоскоростные эффекты пренебрежимо малы. Кроме того, при очень низких давлениях этот закон несправедлив вследствие явления проскальзывания.



**Пример 3.7.** В установке по очистке воды над фильтрующим элементом поддерживается постоянный напор  $H = 1$  м. Диаметр  $d_\phi$  и толщина фильтра  $\Delta h_\phi$  соответственно равны 0,2 м и 0,3 м. Вязкость воды  $\mu_v = 1 \cdot 10^{-3}$  Н·с/м<sup>2</sup>. Коэффициент проницаемости фильтрующего элемента  $k = 4 \cdot 10^{-11}$  м<sup>2</sup>.

Определить расход воды через фильтрующий элемент.

*Решение.* Определим скорость фильтрации по уравнению Дарси с учетом соотношения между коэффициентом фильтрации и коэффициентом проницаемости

$$K_\phi = \frac{k\rho g}{\mu} = \frac{4 \cdot 10^{-11} \cdot 10^3 \cdot 9,8}{1 \cdot 10^{-3}} = 3,92 \cdot 10^{-4},$$

$$u = K_\phi \frac{H}{\Delta h_\phi} = 3,92 \cdot 10^{-4} \frac{1}{0,3} = 1,31 \cdot 10^{-3} \text{ м/с.}$$

Определим расход воды через фильтрующий элемент

$$Q = u \frac{\pi d_\phi^2}{4} = 1,31 \cdot 10^{-3} \frac{3,14 \cdot 0,2^2}{4} = 4,1 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с} = 14,8 \text{ м}^3/\text{ч.}$$

**Основное уравнение однофазной фильтрации для жидкости.**

Полная система уравнений, описывающих фильтрационные потоки, включает в себя уравнение неразрывности, уравнение Дарси и уравнение состояния фильтрационного компонента.

Уравнение однофазной фильтрации флюида в пористой среде образуется путем объединения уравнения неразрывности и уравнения Дарси.

Подставив (3.57) в (3.54), для сжимаемых жидкостей получаем:

$$\nabla\left(\frac{\rho k}{\mu}(\nabla p - \rho g z)\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + q. \quad (3.58)$$

Поскольку в уравнении (3.58) мы имеем дело не собственно с плотностью компонента и давлением, а их производными, то в качестве уравнения состояния можно рассматривать изотермический коэффициент сжимаемости

$$\beta_p = \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_{T = \text{const}} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} \Big|_{T = \text{const}}. \quad (3.59)$$

Когда пористое тело и фильтрационный компонент можно считать несжимаемыми, плотность  $\rho$  и пористость  $\phi$  принимаются постоянными.

В этом случае уравнение (3.50) приводится к виду

$$\nabla\left(\frac{\rho k}{\mu}(\nabla p - \rho g z)\right) = q. \quad (3.60)$$

Если при изменении давления изменение порового объема значительно, его нужно учесть, используя понятие сжимаемости пор:

$$\beta_\pi = \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial p} \Big|_{T = \text{const}}. \quad (3.61)$$

Выполнив операцию дифференцирования правой части уравнения (3.58) по времени, мы получим:

$$\nabla\left(\frac{\rho k}{\mu}(\nabla p - \rho g z)\right) = \left(\phi \frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \frac{\partial \phi}{\partial p}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + q.$$

Подставив в это уравнение производные  $\frac{\partial \rho}{\partial p}$  и  $\frac{\partial \phi}{\partial p}$  из (3.59) и (3.61), получим

$$\nabla\left(\frac{\rho k}{\mu}(\nabla p - \rho g z)\right) = (\phi \rho \beta_{\text{эф}}) \frac{\partial p}{\partial t} + q, \quad (3.62)$$

где  $\beta_{\text{эф}} = \beta_p + \beta_n$  – эффективная сжимаемость.

Уравнение (3.58) можно рассматривать как обобщенное уравнение фильтрации для случая течения сжимаемого компонента в сжимаемом пористом теле при условии изотермичности данного процесса.

**Фильтрация газа.** Для течения газа его сжимаемость обычно не принимают постоянной величиной. Кроме того, в качестве замыкающего соотношения уравнений неразрывности и Дарси мы должны использовать не коэффициент сжимаемости  $\beta_p$ , а уравнение состояния газа. В этом случае исходное обобщенное уравнение фильтрации (3.62) принимает вид

$$\nabla\left(\frac{\rho k}{\mu}(\nabla p - \rho g z)\right) = \phi\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} + \rho \beta_n\right) \frac{\partial p}{\partial t} + q. \quad (3.63)$$

Уравнение (3.56) можно преобразовать, используя уравнение состояния реального газа:

$$\rho = \frac{p \mu_m}{\beta_r R T}, \quad (3.64)$$

где  $\mu_m$  – молекулярная масса;  $R$  – универсальная газовая постоянная;  $\beta_r$  – показатель соотношения объемов реального и идеального газов при одних и тех же давлении и температуре. Данный коэффициент является поправочным коэффициентом при применении уравнения Клапейрона для реальных газов.

При рассмотрении фильтрации газа гравитационной составляющей в уравнении (3.63), в силу ее малости, можно пренебречь. Принимаем также, что пористая среда изотропная.

Подставляя (3.64) в (3.63), для ламинарного режима течения газа ( $\mu = \text{const}$ ) получим

$$\nabla\left(\frac{pk}{\beta_r \mu} \nabla p\right) = \frac{RT}{\mu_m} \phi \left( \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} + p \beta_n\right) \frac{\partial p}{\partial t} + q \right). \quad (3.65)$$

Из уравнения (3.64) следует, что

$$\frac{\partial \rho}{\partial p} = \frac{\mu_m}{\beta_r RT}. \quad (3.66)$$

С учетом (3.66) уравнение (3.65) преобразуется к виду

$$\nabla(p\nabla p) = \frac{\mu\phi}{k} \left( \left( 1 + \frac{RT}{\mu_m} \beta_{np} p \right) \frac{\partial p}{\partial t} + q \right). \quad (3.67)$$

Уравнение (3.67) можно рассматривать как аналог обобщенного уравнения (3.62) применительно к фильтрации газа.

**Начальные и граничные условия.** Пористый слой или выделенную из него часть можно рассматривать как некоторую область пространства, ограниченную граничными поверхностями. Границы могут быть непроницаемыми или проницаемыми для фильтрационных компонент.

**Начальные условия.** Начальное условие заключается в задании искомой функции во всей области в некоторый момент времени, принимаемый за начальный. Чаще всего в качестве начального условия принимается состояние статического равновесия, при котором скорости всех фаз равны нулю. Согласно закону Дарси это условие означает, что при отсутствии непроницаемых перемычек в пласте, на которых  $k = 0$ , каждая фаза либо неподвижна ( $k_l = 0$ ), либо давление в ней распределено по гидростатическому закону и зависит только от вертикальной координаты  $z$ .

**Граничные условия** задаются на границах моделируемой области. Возможны следующие граничные условия ( $\Gamma$  – граница):

– постоянное или изменяющееся по заданному закону давление:

$$p|_{\Gamma} = f(\Gamma, t),$$

т. е. граница является контуром питания;

– постоянный или переменный переток через границу:

$$\left( \frac{\rho k}{\mu} (\nabla p - \rho g \nabla z) \vec{n} \right) |_{\Gamma} = q(\Gamma, t) \vec{n} |_{\Gamma},$$

где  $\vec{n}|_{\Gamma}$  – вектор нормали к границе  $\Gamma$ ;

– условие непротекания (непроницаемые границы).



### Контрольные задания по теме

**Задача 3.21.** Основание  $N-N$  водоносного пласта  $B$ , расстояние между которыми  $L = 1000$  м, расположено на отметках  $z_A = z_B = 10,3$  м (рис. 3.28).

Уровни грунтовых вод в створах  $A$  и  $B$  находятся на отметках  $z_A = 19,2$  м и  $z_B = 15,6$  м. Коэффициент фильтрации  $K_\phi = 4 \cdot 10^{-4}$  м/с. Определить расход воды в песчаном крупнозернистом пласте единичной ширины.

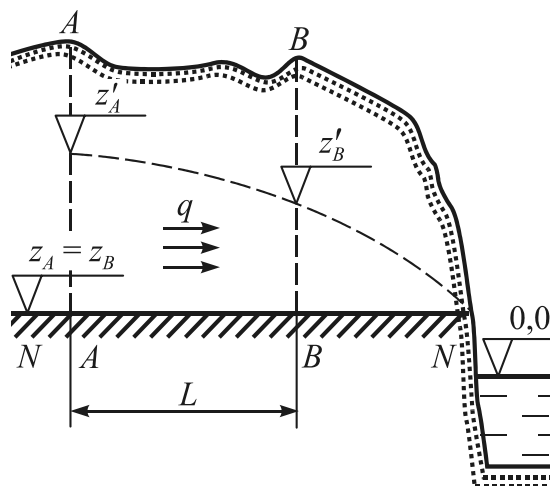


Рис. 3.28. К задаче 3.22

### Задача 3.22.

Для удаления вредных примесей воздух пропускают через трехслойный фильтр диаметром  $D = 0,1$  м (рис. 3.29).

Коэффициенты фильтрации слоев:  $K_{\phi 1} = 0,015$  м/с,  $K_{\phi 2} = 0,003$  м/с,  $K_{\phi 3} = 0,0006$  м/с.

Толщина слоев:  $\Delta_1 = 0,35$  м,  $\Delta_2 = 0,1$  м,  $\Delta_3 = 0,05$  м. Суммарный перепад давлений  $\Delta p = 2000$  Па. Температура воздуха  $20^\circ\text{C}$ . Определить пропускную способность фильтра и перепад давлений в каждом его слое.

**Задача 3.23.** Водоносный пласт (рис. 3.30), образованный крупнозернистым песком, пройден скважиной радиусом  $r_0 = 0,1$  м на всю толщу  $H = 20$  м и подстигается водонепроницаемыми породами.

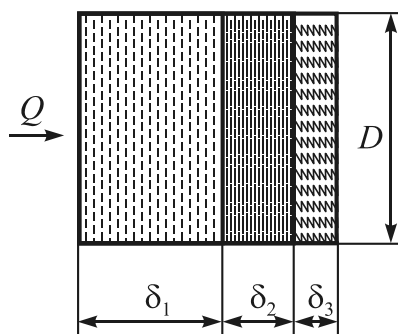


Рис. 3.29. К задаче 3.23

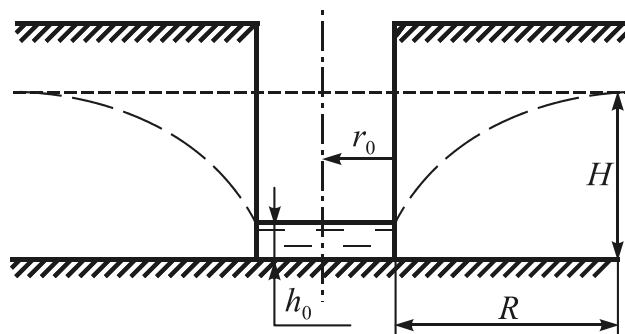


Рис. 3.30. К задаче 3.24

Глубина воды в скважине  $h_0 = 15$  м. Коэффициент фильтрации грунта водоносного пласта равен  $0,006$  м/с. Определить приток воды к буровой.

**Задача 3.24.** Для осушения строительной площадки от грунтовых вод прорыта до водоупора траншея на глубину  $h_b = 6$  м длиной  $l = 150$  м (рис. 3.31).

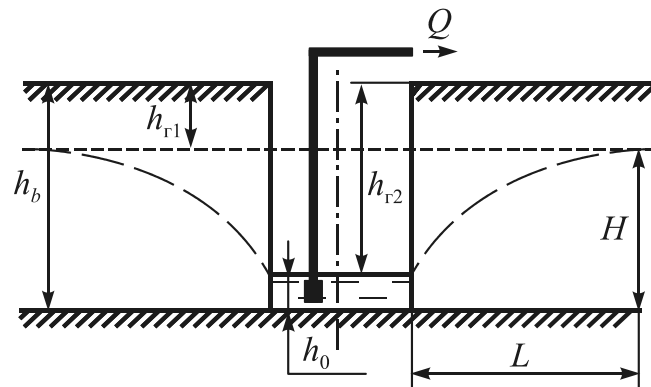
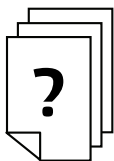


Рис. 3.31. К задаче 3.25

В результате откачки воды из траншеи уровень грунтовых вод понизился с глубины  $h_{r1} = 1$  м до  $h_{r2} = 5$  м, а длина дренирования  $L = 200$  м. Коэффициент фильтрации грунта водоносного пласта равен  $0,0008$  м/с. Определить подачу  $Q$  насосов, откачивающих воду из траншеи.



### Контрольные вопросы по разделу

1. Какую систему уравнений называют уравнениями Эйлера?
2. Какую систему уравнений называют уравнениями Лагранжа?
3. Может ли кинематика одного и того же потока изучаться как методом Эйлера, так и методом Лагранжа?
4. Каким образом связаны друг с другом координаты Эйлера и Лагранжа?
5. Какие движения называются *установившимися* и *неустановившимися*?
6. Какие движения называются *равномерными* и *неравномерными*?



7. Что такое *живое сечение, смоченный периметр, гидравлический радиус, средняя скорость потока*?
8. Дайте определение понятиям *линия тока, трубка тока*.
9. Запишите уравнение линии тока.
10. Какой метод кинематического исследования преимущественно используется на практике?
11. Проявлением какого закона сохранения является уравнение неразрывности?
12. Какой вид имеет уравнение неразрывности для неустановившегося и установившегося движения несжимаемой среды?
13. Запишите обобщенную форму уравнения неразрывности.
14. На основании какого закона динамики исследуется кинематика потоков жидкости и газа?
15. Какой баланс сил рассматривается при выводе уравнения движения невязких жидкостей?
16. Как выглядит уравнение движения невязких жидкостей в обобщенной форме?
17. Напишите уравнение движения невязкой жидкости вдоль линии тока (одномерные уравнения Эйлера, Бернулли).
18. Какой баланс сил рассматривается при выводе уравнения движения вязких жидкостей?
19. Как преобразуется уравнение движения невязких жидкостей к уравнению движения вязкой жидкости с использованием компонент напряжений (нормальных и касательных)?
20. Запишите пространственную форму уравнения движения вязких жидкостей.
21. Как выглядит уравнение Бернулли (одномерная форма уравнения Эйлера) для вязкой жидкости при равенстве скоростей в каждой точке проходного сечения?
22. Как выглядит уравнение Бернулли для потока вязкой среды?
23. Что такое *коэффициент Кориолиса*?
24. На какие составляющие можно разложить сопротивление жидкостей и газов движущимся в них телам?
25. Какое явление называют *кризисом сопротивления*?
26. Каким образом распределяется давление по поверхности обтекаемого тела?
27. Что называют *пограничным слоем*?
28. Как определяется толщина пограничного слоя?
29. Каков механизм отрыва пограничного слоя?

30. Что такое *гидродинамический (аэродинамический) след*?
31. Дайте определение понятию сопротивления при течении вязких жидкостей в каналах.
32. Как называется и как выглядит уравнение для расчета потерь напора на трение?
33. Для чего используется уравнение Никурадзе?
34. Как выглядит уравнение для расчета местных сопротивлений?
35. Какие местные сопротивления вы знаете?
36. Что понимается под *обобщенным коэффициентом сопротивления*?



## ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА

Течение газов (сжимаемых жидкостей) рассматривается с учетом ряда допущений.

Предполагается, что газ лишен вязкости или влияние вязкости настолько мало, что им можно пренебречь.

Рассматривается изолированная термодинамическая система, т. е. к массе газа не подводится тепло из окружающей среды и отсутствует обмен механической энергией. Поэтому процессы, сопутствующие течению газа, являются адиабатическими.

Принимается, что распределение давления и скоростей в живых сечениях потока – равномерны. Такая постановка задачи о течении газа называется одномерной.

Рассматривая скорость распространения возмущений, возникающих в газовой среде, следует различать два случая.

**Первый случай**, когда в среде распространяются малые возмущения, т. е. возмущения среды, при которых местные изменения давления среды в точке возмущения (колебания амплитуды давления) пренебрежимо малы по сравнению с общим давлением.

*Это звуковые колебания.*

**Второй случай** – распространение возмущений конечной величины, т. е. колебаний давления конечной амплитуды.

*Это ударные волны.*

### 4.1. Звуковые колебания

**Скорость звука.** Скоростью звука называется скорость распространения малых возмущений. Звуковые колебания вызываются колебаниями давления малой амплитуды, поэтому малыми будут и колебания плотности среды.

При оценке скорости распространения звука  $a$  используется уравнение сохранения количества движения (импульса)  $d(mv) = Fdt$ , где  $m$ ,  $v$ ,  $F$  – масса, скорость течения и результирующая сила соответственно, учитывая что  $(p_1 - p_0) / (\rho_1 - \rho_0) = d\rho$  и  $\rho_1 / \rho_0 \sim 1$ .

При оценке скорости распространения звука используется уравнение сохранения количества движения (импульса).

Представляя данное уравнение в разностях и используя следствие малости возмущений давления (например, малость изменения плотности), при изоэнтропном течении газа для скорости распространения звука в газовой среде получим

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}, \quad (4.1)$$

где  $a$  – скорость распространения звука в газовой среде.

Для адиабатического, изоэнтропного течения газа, в соответствии с адиабатой Пуассона

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = \frac{kp}{\rho},$$

где  $k = c_p / c_v$ ;  $c_p, c_v$  – теплоемкость газовой среды при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

Тогда уравнение (4.1) приводится к виду

$$a = \sqrt{\frac{kp}{\rho}}. \quad (4.2)$$

**Течение газа в сужающемся канале.** Рассмотрим случай течения газа в сужающемся канале. Газ поступает в сужающийся канал из ресивера, в котором скорость движения газа практически равна нулю, а температура и давление соответственно  $T_0$  и  $p_0$  (рис. 4.1).

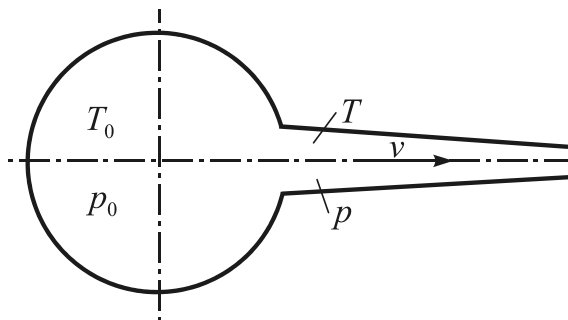


Рис. 4.1. Течение газа в сужающемся канале

Закон сохранения полной (механической и внутренней) энергии газового потока, при условии адиабатичности процесса распространения колебаний в газовой среде, в любом сечении канала будет иметь вид

$$\frac{v_a^2}{2} + c_p T = c_p T_0, \quad (4.3)$$

где  $v_a$  – средняя скорость адиабатического течения газа в рассматриваемом сечении сужающегося канала;  $T$  – температура газа.

Если в сечении  $0-0$  скорость газа равна нулю, то температура  $T_0$  равна температуре адиабатического торможения.

Тогда для произвольного сечения сужающегося канала скорость течения газового потока определяется соотношением

$$v_a = \sqrt{2c_p T_0 \left(1 - \frac{T}{T_0}\right)}. \quad (4.4)$$

Температура  $T_0$  определится из уравнения

$$T_0 = \frac{p_0}{\rho_0 R},$$

где  $R = c_p - c_v$  – газовая постоянная.

Тогда

$$c_p T_0 = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}. \quad (4.5)$$

С учетом уравнения состояния газовой среды, отношение температур в рассматриваемом сечении и в ресивере  $T / T_0$  будет равно

$$\frac{T}{T_0} = \frac{p}{p_0} \frac{\rho_0}{\rho}, \quad (4.6)$$

а отношение плотностей  $\rho_0 / \rho$  в (4.6) можно представить через давления  $p$  и  $p_0$  как

$$\frac{\rho_0}{\rho} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-1/k}. \quad (4.7)$$

Тогда уравнение (4.6) приводится к виду

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}. \quad (4.8)$$

С учетом (4.4), (4.5) и (4.8), скорость течения потока газа в сечении, где давление стало равным  $p$ , можно определить из соотношения

$$v_a = \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(k-1)/k}\right]}. \quad (4.9)$$

Вдоль сужающегося канала массовый расход газа постоянен. Расход газа определяют по формуле

$$Q = f \sqrt{2 \frac{k}{k-1} p_0 \rho_0 \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(k+1)/k} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(k+1)/k} \right]}, \quad (4.10)$$

где  $f$  – площадь выходного сечения сопла.

Действительная скорость истечения  $v$  будет меньше рассчитанной по формуле (4.9) из-за трения струи о стенки сопла, что учитывается коэффициентом скорости. Сечение струи на выходе может быть меньше сечения выходного отверстия, что учитывается коэффициентом сжатия струи.

Поэтому действительный массовый расход газа находится по формуле

$$Q = \alpha \varphi v_a f = \mu v_a f \rho, \quad (4.11)$$

где  $\mu = \alpha \varphi$  – коэффициент расхода.

Из уравнения (4.9) следует, что скорость течения потока газа в сужающемся канале имеет предел.

Зависимость плотности газовой среды от давления определяется для адиабатического потока, согласно (4.7), соотношением

$$\rho = \rho_0 \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1/k}.$$

При  $p/p_0 < p_{кр}/p_0$  удельный объем газа равный  $1/\rho$  может достигать очень больших величин. Канал не сможет пропустить удельный расход, больший критического, который является постоянным для данного газа и данного канала.

Поэтому в некотором сечении канала (и, соответственно, на выходе из канала) устанавливается постоянное отношение давлений  $p/p_0 = p_{кр}/p_0$  и постоянное давление равно  $p_{кр}$ .

Данное сечение канала и значение давления в нем называются критическими (рис. 4.2).

Следовательно, скорость течения газа в сечении сужающегося канала, где устанавливается критическое давление имеет вид

$$v_{кр} = \sqrt{\frac{k p_{кр}}{\rho_{кр}}} = \sqrt{\left( \frac{2k}{k+1} \right) p_0 v_0}, \quad (4.11)$$

где  $v_0$  – удельный объем газа; индекс «кр» относится к критическому сечению.

Из сравнения соотношений (4.11) и (4.2) следует, что  $v_{кр}$  имеет смысл скорости звука.

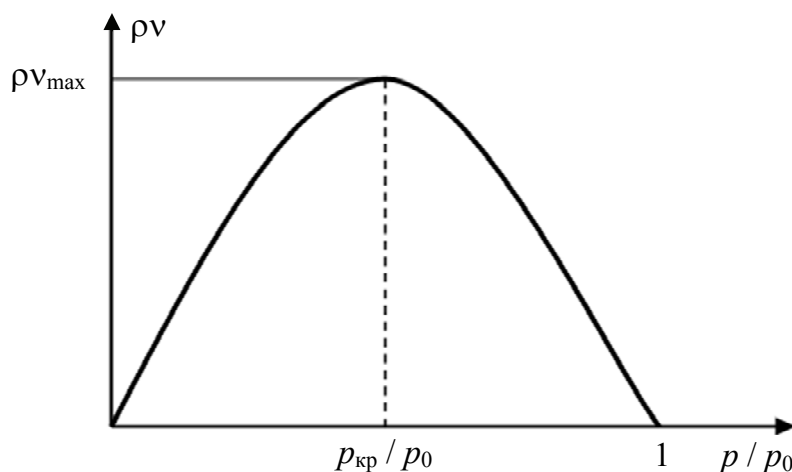


Рис. 4.2. Зависимость массовой скорости от относительного давления при течении газа в сужающемся канале

При скорости истечения, равной скорости звука, секундный расход газа получается максимальным

$$Q_{\max} = f \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_0}{v_0} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{2/(k-1)}}. \quad (4.12)$$

Таким образом, если истечение газа из сужающегося канала происходит в среду с давлением, меньшим критического, то скорость в выходном сечении канала не будет зависеть от давления окружающей среды и будет равна скорости звука.

Если давление больше критического, то скорость истечения газа будет меньше скорости звука, а ее значение будет зависеть от противодействия.

Получить в сужающемся канале скорость, большую звуковой скорости, невозможно.



**Пример 4.1.** В резервуаре, заполненном кислородом, поддерживается давление  $p_1 = 5$  МПа.

Газ вытекает через сужающееся сопло в среду с давлением 4 МПа. Начальная температура кислорода  $100^\circ\text{C}$ .

Определить теоретическую скорость истечения и расход кислорода, если площадь выходного сечения сопла  $f = 20$  мм<sup>2</sup>.

Найти также теоретическую скорость истечения кислорода и его расход, если течение будет происходить в атмосферу ( $p_a = 100$  кПа).

*Решение.* В соответствии с молекулярно-кинетической теорией для двухатомного кислорода  $c_v = 5 / 2R$  и  $c_p = 7 / 2R$ .

Коэффициент адиабаты  $k = 7 / 5 = 1,4$ .

Критическое отношение

$$\frac{p}{p_0} = \psi_{\text{кр}} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} = 0,528 < 4 / 5 = 0,8.$$

Следовательно, скорость истечения газа меньше критической скорости и определяется по формуле (4.9).

Предварительно вычислим из уравнения состояния идеального газа величину удельного объема кислорода

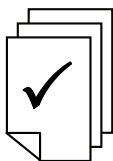
$$\begin{aligned} v_0 &= 1 / \rho_0 = RT / p_0 / 32 = \\ &= 8,31436 \cdot 10^6 \cdot 373,15 / 5 \cdot 10^6 / 32 = 0,0194 \text{ м}^3/\text{кг}. \end{aligned}$$

Далее вычисляем теоретическую скорость истечения

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[ 1 - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(k-1)/k} \right]} = \\ &= \sqrt{2 \cdot \frac{1,4}{0,4} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0,0194 \cdot \left[ 1 - \left( \frac{4}{5} \right)^{0,4/1,4} \right]} = 205 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Расход докритического течения определяется по формуле (4.12)

$$\begin{aligned} Q &= f \sqrt{2 \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{v_0} \left[ \left( \frac{p}{p_0} \right)^{2/k} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{(k+1)/k} \right]} = \\ &= 20 \cdot 10^{-6} \sqrt{2 \cdot \frac{1,45 \cdot 10^6}{0,4 \cdot 0,0194} \left[ \left( \frac{4}{5} \right)^{2/1,4} - \left( \frac{4}{5} \right)^{2,4/1,4} \right]} = 0,180 \text{ кг/с}. \end{aligned}$$



**Пример 4.2.** При условиях предыдущего примера найти теоретическую скорость истечения кислорода и его расход, если его истечение будет происходить в атмосферу ( $p_a = 100$  кПа).

*Решение.* Отношение давлений  $p_a / p_0 = 0,1 / 5 < \psi_{\text{кр}} = 0,528$ , следовательно, скорость истечения равна критической и определяется по формуле (4.11)



$$v_{кр} = \sqrt{\frac{k p_{кр}}{\rho_{кр}}} = \sqrt{\left(\frac{2k}{k+1}\right) p_0 v_0} = \sqrt{\frac{2,8}{2,4} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 0,0194} = 336 \text{ м/с.}$$

Расход определяется по формуле (4.12)

$$\begin{aligned} Q_{\max} &= f \sqrt{2 \frac{k}{k+1} \frac{p_0}{v_0} \left(\frac{2}{k+1}\right)^{2/(k-1)}} = \\ &= 20 \cdot 10^{-6} \sqrt{2 \cdot \frac{1,4 \cdot 5 \cdot 10^6}{2,4 \cdot 0,1 \cdot 10^6} \left(\frac{2}{2,4}\right)^{2/0,4}} = 0,22 \text{ кг/с.} \end{aligned}$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 4.1.** Воздух, имеющий температуру  $15^\circ\text{C}$ , по трубке диаметром 8 мм перетекает из резервуара с постоянным давлением 1,2 МПа в другой, расположенный рядом, с постоянным давлением 0,8 МПа. Определить скорость истечения воздуха, температуру при переходе его во второй резервуар и количество воздуха, перетекшее за 1 ч.

*Ответ:*  $v = 251,5 \text{ м/с}$ ;  $t_2 = -16,5^\circ\text{C}$ ;  $\Delta m = 495 \text{ кг}$ .

**Задача 4.2.** В пространство, где давление 0,4 МПа, из резервуара выпускается газ при давлении 0,6 МПа и температуре  $25^\circ\text{C}$  через суживающееся сопло, у которого площадь сечения  $10 \text{ мм}^2$ . Определить количество газа, вытекающее за 1 с, если в резервуаре находится один из следующих газов: азот, кислород или углекислота.

*Ответ:*  $Q = 0,013$ ;  $0,014$ ;  $0,0163 \text{ кг/с}$ .

**Задача 4.3.** Давление в резервуарах равно 1,6 бар, температура обоих газов равна  $17^\circ\text{C}$ . Соппротивлениями при течении газа можно пренебречь. Рассчитать сечение  $f_a$  суживающегося сопла для выпуска из резервуара в среду с давлением 1,12 бар углекислоты и окиси углерода в количестве  $100 \text{ кг/ч}$ .

*Ответ:*  $f_a = 65$ ;  $80 \text{ мм}^2$ .

**Задача 4.4.** В газгольдере постоянного давления (см. рис. 4.3) содержится азот; атмосферное давление равно 1,1 бар, избыточное

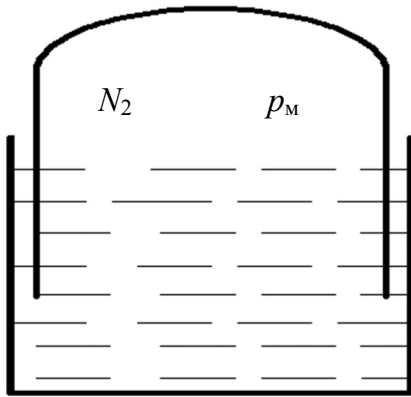


Рис. 4.3. К задаче 4.4

давление, создаваемое колоколом – 250 мбар, температура азота – 20°C. В колоколе образовалось отверстие, у которого площадь сечения 2 мм<sup>2</sup>. Объем газгольдера равен 180 м<sup>3</sup>. Коэффициент расхода  $\mu = 0,65$ . Определить количество азота, теряющееся за 1 ч через это отверстие, и выразить потерю в процентах.

*Ответ:* 0,91 кг/ч; 0,35%.

**Задача 4.5.** Постоянное давление в резервуаре составляет: 0,15; 0,2; 0,4; 0,8 МПа. Температура газа – 27°C, диаметр сопла – 8 мм. Сопротивлениями пренебречь. Рассчитать количество азота, вытекающее за 1 ч из суживающегося сопла в пространство, где давление 0,1 МПа.

*Ответ:* 59,5; 81,2; 164,0; 325,0 кг/ч.

**Задача 4.6.** В резервуаре под вакуумом 0,4 бар содержится воздух. Через неплотность в шве, у которого площадь сечения 2 мм<sup>2</sup>, в резервуар снаружи проникает воздух при давлении 1,1 бар и температуре 17°C. Определить количество воздуха, которое необходимо удалять из резервуара вакуум-насосом за 1 ч. Принять  $\varphi = 0,75$ ;  $\alpha = 0,7$ .

*Ответ:* 3,5 кг/ч.

## 4.2. Относительное движение газа и твердых тел со сверхзвуковыми скоростями

**Течение газа в расширяющемся канале.** Рассмотрим случай течения газа в сужающемся канале.

Вдоль канала, стенки которого ограничивают поток газа, должно удовлетворяться условие сплошности.

Для того чтобы в выходном сечении канала устанавливалось давление окружающей среды, меньшее критического, канал должен постепенно расширяться. В этом случае скорость истечения газа в

окружающую среду будет больше звуковой, так как давление, устанавливающееся в выходном сечении канала, меньше критического.

Для получения скорости истечения газа, большей скорости звука, необходимо сначала в сужающемся канале снизить давление до критического, а затем в расширяющемся канале дополнительно снизить давление от критического значения до давления окружающей среды.

Подобный канал, называющийся соплом Лавалья, показан на рис. 4.4.

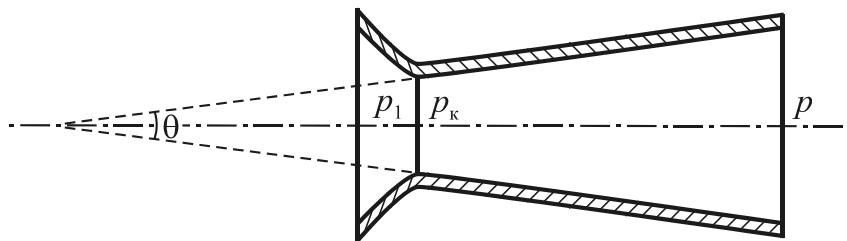


Рис. 4.4. Сопло Лавалья

Расширение газа сначала в сужающемся, а затем в расширяющемся канале для увеличения скорости потока от меньшей скорости звука до сверхзвуковой скорости осуществляется со сравнительно малыми гидравлическими потерями.

Уравнения сохранения энергии изоэнтропного, горизонтального потока идеального газа, записанное через параметры торможения, связывает их с текущими параметрами состояния  $T$ ,  $p$ ,  $\rho$  в любом сечении потока:

$$c_p T + \frac{v^2}{2} = c_p T_0 = i_0 = \frac{k}{k-1} R T_0 \quad (4.13)$$

или

$$\frac{k}{k-1} \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \frac{k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (4.14)$$

где  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  и  $i_0$  – параметры потока в заторможенном состоянии, т. е. при скорости  $v = 0$ .

Для адиабатического изоэнтропного потока газа все параметры торможения остаются постоянными по длине потока. Для адиабатического потока с трением, для которого энтропия вдоль потока меняется, параметры торможения  $p_0$ ,  $\rho_0$  будут различными в разных сечениях, а температура торможения  $T_0$ , энтальпия торможения  $i_0$  и отношение  $p_0 / \rho_0$  остаются вдоль потока постоянными.

**Связь между скоростью газа и скоростью звука при изэнтропным течением.** Отношение скорости течения газа  $v$  в данной точке потока к скорости звука  $a$  в этой же точке называется числом Маха

$$M = \frac{v}{a}. \quad (4.15)$$

Для изотропного процесса распространения звука в идеальном газе

$$a = \sqrt{kRT} = \sqrt{kp / \rho}.$$

Если  $v < a$ , то  $M < 1$  и режим является дозвуковым; если  $v > a$ , то  $M > 1$  и режим сверхзвуковой; если  $v = a$ , то  $M = 1$  и режим называется критическим. При этом режиме параметры течения газа называются критическими ( $p_{кр}$ ,  $\rho_{кр}$ ,  $T_{кр}$ ,  $v_{кр} = a_{кр}$ ).

Если площадь поперечного сечения струйки газа изменяется по длине  $f = f(x)$ , то критическое состояние ( $M = 1$ ) может установиться только в самом узком сечении струйки. Это сечение называется критическим  $f_{кр}$ .

Отношение скорости течения газа  $v$  в данной точке потока к критической скорости  $a_{кр}$  называется коэффициентом скорости:

$$\lambda = \frac{v}{a_{кр}}. \quad (4.16)$$

Коэффициент скорости  $\lambda$  и число Маха  $M$  в данной точке связаны соотношением

$$\lambda^2 = \frac{(k+1)M^2}{[2 + (k-1)M^2]}. \quad (4.17)$$

Зависимости параметров потока газа ( $p$ ,  $\rho$ ,  $T$ ) от числа Маха (или от коэффициента скорости) и от параметров торможения ( $p_0$ ,  $\rho_0$ ,  $T_0$ ) называются газодинамическими функциями:

$$\tau = \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1} = 1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2; \quad (4.18)$$

$$\pi = \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-k/(k-1)} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{k/(k-1)}; \quad (4.19)$$

$$\varepsilon = \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2}M^2\right)^{-1/(k-1)} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1}\lambda^2\right)^{1/(k-1)}. \quad (4.20)$$

К газодинамическим функциям относятся также «функция приведенного расхода»:

$$q = \frac{\rho v}{\rho_{\text{кр}} v_{\text{кр}}} = M \left[ \frac{k+1}{2+(k-1)M^2} \right]^{(k+1)/(2(k-1))} =$$

$$= \lambda \left[ \frac{k+1}{2} \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \right) \lambda^2 \right]^{1/(k-1)}. \quad (4.21)$$

Если в самом узком (критическом) сечении струйки достигается критическое состояние, то

$$q = \frac{f_{\text{кр}}}{f}. \quad (4.22)$$

Если величины  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$  и  $T_0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  берутся в одном и том же сечении, то формулы (4.18)–(4.21) справедливы при любых термодинамических процессах. Если же параметры торможения берутся в одном сечении потока, а величины  $\rho$ ,  $T$ ,  $p$ ,  $v$  – в другом, то формула (4.17) справедлива для адиабатического процесса, а формулы (4.19)–(4.21) – только для изоэнтропного процесса.

Таблицы значений газодинамических функций  $\tau$ ,  $\pi$ ,  $\varepsilon$ ,  $q$  от  $M$  и  $\lambda$  для разных  $k$  (в зависимости от вида газа) приведены в соответствующих справочниках.

Зависимости между критическими параметрами и параметрами торможения следующие:

$$T_{\text{кр}} = \frac{2T_0}{k+1}, \quad p_{\text{кр}} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{k/(k-1)} p_0; \quad (4.23)$$

$$\rho_{\text{кр}} = \left( \frac{2}{k+1} \right)^{1/(k-1)} \rho_0; \quad (4.24)$$

$$a_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2}{(k+1)a_0}}. \quad (4.25)$$



**Пример 4.3.** Воздух вытекает из котла с температурой  $t_0 = 15^\circ\text{C}$ . Определить температуру его в тех сечениях, где скорость составляет  $v_1 = 200$  м/с,  $v_2 = 400$  м/с, а также скорости звука  $a_1$ ,  $a_2$ , числа Маха  $M_1$ ,  $M_2$  и коэффициенты скорости  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  в этих сечениях. Движение считать изоэнтропным.

*Решение.* Используя уравнение сохранения энергии (4.13), найдем

$$T_1 = T_0 - \frac{v_1^2}{2c_p} = 288,15 - 4 \cdot 10^4 / (2 \cdot 1003,5) = 268,2 \text{ К};$$

$$T_2 = T_0 - \frac{v_2^2}{2c_p} = 288,15 - 16 \cdot 10^4 / (2 \cdot 1003,5) = 208 \text{ К}.$$

Скорости звука найдем по формуле (4.2)

$$a_1 = \sqrt{kRT_1} = \sqrt{1,4 \cdot 287,15 \cdot 268} = 328 \text{ м/с};$$

$$a_2 = \sqrt{kRT_2} = \sqrt{1,4 \cdot 287,15 \cdot 208} = 289 \text{ м/с}.$$

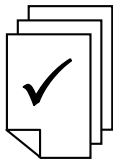
Тогда  $M_1 = v_1 / a_1 = 200 / 328 = 0,610$ ;

$$M_2 = v_2 / a_2 = 400 / 289 = 1,38.$$

По формуле (4.16) найдем коэффициенты скорости

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{(k+1)M_1^2}{2+(k-1)M_1^2}} = \sqrt{\frac{(1,4+1) \cdot 0,610^2}{2+(1,4-1) \cdot 0,610^2}} = 0,645;$$

$$\lambda_2 = \sqrt{\frac{(k+1)M_2^2}{2+(k-1)M_2^2}} = \sqrt{\frac{(1,4+1) \cdot 1,38^2}{2+(1,4-1) \cdot 1,38^2}} = 1,29.$$



**Пример 4.4.** Как изменится кинетическая энергия единицы объема и единицы массы воздуха при изэнтропном движении по расширяющейся трубе с увеличением числа Маха от  $M_1 = 1$  до  $M_2 = 2$ ?

*Решение.* Кинетическая энергия единицы объема

$$\mathcal{E}_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2V} = \rho V v^2 / (2V) = \rho v^2 / 2,$$

где  $V$  – объем газа, поэтому

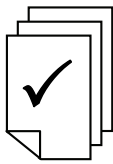
$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}_{\text{кин}2}}{\mathcal{E}_{\text{кин}1}} &= \frac{\rho v_2^2}{\rho v_1^2} = \frac{\rho M_2^2 v_2^2}{\rho M_1^2 v_1^2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{T_2}{T_1} = \frac{\rho_2 / \rho_0}{\rho_1 / \rho_0} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{(T_2 / T_0)}{(T_1 / T_0)} = \\ &= \frac{\varepsilon(M_2)}{\varepsilon(M_1)} \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{\tau(M_2)}{\tau(M_1)} = \frac{0,230}{0,634} \cdot (2)^2 \cdot \frac{0,556}{0,833} = 0,969, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon(M)$  и  $\tau(M)$  определяются по таблицам газодинамических функций.

Кинетическая энергия единицы объема в сечении 2 уменьшилась, несмотря на увеличение скорости, за счет очень резко-

го падения плотности. При этом кинетическая энергия единицы массы, равная  $v^2 / 2$ , возрастает в отношении

$$\begin{aligned} \frac{v_2^2}{v_1^2} &= \frac{M_2^2 a_2^2}{M_1^2 a_1^2} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{(T_2 / T_0)}{(T_1 / T_0)} = \\ &= \left( \frac{M_2}{M_1} \right)^2 \frac{\tau_2(M_2)}{\tau_1(M_1)} = 2^2 \cdot \frac{0,556}{0,833} = 2,67. \end{aligned}$$



**Пример 4.5.** Воздух при нормальных условиях ( $h_6 = 760$  мм рт. ст.,  $t = 15^\circ\text{C}$ ), имеющий скорость  $v_1 = 136$  м/с, ускоряется в сопле до  $v_2 = 280$  м/с. Найти температуру, давление и плотность в конце сопла, а также температуру и давление торможения, считая движения изоэнтропным.

*Решение.* Определяем число Маха в сечении 1:

$$M_1 = \frac{v_1}{a_1} = \frac{v_1}{\sqrt{kRT_1}} = \frac{136}{\sqrt{1,4 \cdot 287,15 \cdot 288}} = 0,4.$$

По таблицам газодинамических функций, зная  $p_1 = 760$  мм рт. ст. или  $1,01325 \cdot 10^5$  Па, и  $T_1 = 288$  К, находим параметры торможения:

$$p_0 = \frac{p_1}{\pi(M_1)} = \frac{1,013 \cdot 10^5}{0,895} = 1,13 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$T_0 = \frac{T_1}{\tau(M_1)} = \frac{288}{0,969} = 297 \text{ К}.$$

Из уравнения закона сохранения энергии определяем температуру в сечении 2:

$$T_2 = T_0 \frac{v_2^2}{2c_p} = 297 - \frac{280^2}{2000} = 258$$

и число Маха

$$M_2 = \frac{v_2}{a_2} = \frac{v_2}{\sqrt{kRT_2}} = \frac{280}{\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 258}} = \frac{280}{322} = 0,87.$$

По таблицам газодинамических функций находим давление в конце сопла

$$p_2 = \pi(M_2) p_0 = \pi(0,870) \cdot 1,13 \cdot 10^5 = 0,611 \cdot 1,13 \cdot 10^5 = 6,9 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

И из уравнения Клайперона – Менделеева определяем плотность:

$$\rho_2 = \frac{p_2}{(RT_2)} = 0,932 \text{ кг/м}^3.$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 4.7.** В камере жидкостного реактивного двигателя газ с молекулярной массой 24,2 кг/моль имеет температуру  $T_0 = 2800$  К. Определить скорость звука в заторможенном газе в камере двигателя и критическую скорость звука ( $k = 1,3$ ).

*Ответ:*  $a_0 = 1,12 \cdot 10^3$  м/с;  $a_{кр} = 1,04 \cdot 10^3$  м/с.

**Задача 4.8.** Дана температура торможения  $T_0 = 357$  К и температура  $T = 250$  К в некотором сечении изоэнтропного потока воздуха. Найти скорость звука в заторможенном газе  $a_0$ , скорость звука  $a$ , коэффициент скорости  $\lambda$ , число Маха  $M$  и скорость  $v$  в этом сечении.

*Ответ:*  $a_0 = 378$  м/с;  $a = 317$  м/с;  $\lambda = 34$ ;  $M = 1,46$ ;  $v = 463$  м/с.

**Задача 4.9.** Воздух течет изоэнтропно по трубе переменного сечения. Число Маха в первом сечении трубы  $M_1 = 1$ , а во втором –  $M_2 = 2$ . Определить соотношение между скоростями воздуха в первом и втором сечениях.

*Ответ:*  $v_2 / v_1 = 1,63$ .

**Задача 4.10.** Отношение чисел Маха в сечениях 1 и 2 потока воздуха  $M_2 / M_1 = 2$ . Найти отношение скоростей в этих сечениях. Процесс изоэнтропный ( $M_1 = 1,5$ ).

*Ответ:*  $v_2 / v_1 = 1,44$ .

**Задача 4.11.** Отношение чисел Маха в сечениях 1 и 2 потока воздуха  $M_2 / M_1 = 3$ . Процесс изоэнтропный. Найти отношение температур и давлений  $T_2 / T_1, p_2 / p_1$ .

*Ответ:*  $T_2 / T_1 = 0,429$ ;  $p_2 / p_1 = 5,17 \cdot 10^2$ .

**Задача 4.12.** Покоящийся воздух, находящийся в нормальных условиях ( $p_0 = 0,1013 \cdot 10^6$  Па,  $t_0 = 15^\circ\text{C}$ ), расширяясь изоэнтропно, приобретает скорость, соответствующую числу Маха  $M = 0,9$ . Найти конечную плотность  $\rho$  и изменение плотности  $\Delta\rho$ .

*Ответ:*  $\rho = 0,84$  кг/м<sup>3</sup>;  $\Delta\rho = 0,38$  кг/м<sup>3</sup>.



**Задача 4.13.** Поток воздуха при давлении  $p = 1$  МПа и температуре  $t = -8^\circ\text{C}$  имеет скорость  $v = 100$  м/с. Определить температуру, давление и плотность этого потока при изоэнтропном торможении до состояния покоя и скорость звука в этом потоке.

*Ответ:*  $T_0 = 270$  К;  $p_0 = 1,07$  МПа;  $\rho_0 = 13,8$  кг/м<sup>3</sup>;  $a = 326$  м/с.

### 4.3. Ударная волна

При обтекании тела потоком жидкости или газа перед ним образуется зона торможения. В этой области происходит снижение скорости потока и повышение давления.

При обтекании тела потоком газа местное повышение давления, связанное с торможением, имеет конечное значение, существенно превышающее звуковое давление.

Возмущения, вызванные в газовой среде повышением давления в любой части обтекаемого тела, распространяются со скоростью, большей скорости звука. Если тело движется со скоростью, большей скорости звука, то перед ним возникает устойчивая *ударная волна*.

*Ударной волной* называется поверхность, при прохождении через которую давление, плотность, скорость и температура газа изменяется скачком (рис. 4.5).

Фронт распространения ударной волны движется с той же скоростью, как и тело. В тоже время ударная волна может возникнуть только при сверхзвуковых относительных скоростях движения газа.

Образующиеся в потоке ударные волны в различных случаях могут быть подвижными и неподвижными. Неподвижная ударная волна называется *скачком уплотнения*.

Наличие *скачка уплотнения* связано с гидравлическими потерями, происходящими в очень узкой области ширины фронта ударной волны.

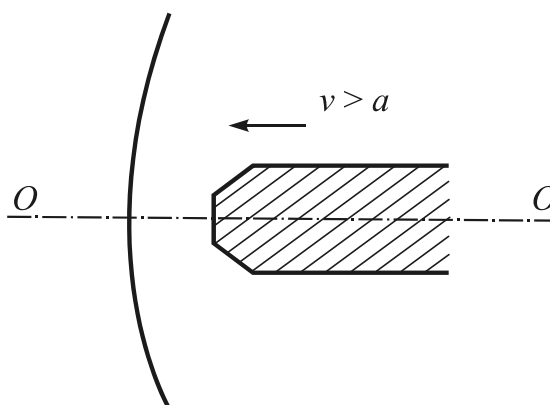


Рис. 4.5. Фронт ударной волны перед телом, движущимся со сверхзвуковой скоростью – прямой скачок уплотнения

Вдоль плоскости фронта волны допускается равномерное распределение скорости потока, поэтому частные производные скорости потока вдоль фронта равны нулю. Это приводит к выводу о том, что касательные составляющие вязкого напряжения также равны нулю. Частная производная скорости в направлении, нормальном к фронту волны (по направлению движения), велика, так как на узком участке ширины фронта происходит резкое снижение скорости. Это указывает на появление существенных нормальных напряжений, которые и являются в данном случае причиной появления гидравлических потерь.

Запас удельной механической энергии потока перед скачком уплотнения равен  $p_1 / (\rho_1 g) + v_1^2 / (2g)$ , а после него —  $p_2 / (\rho_2 g) + v_2^2 / (2g)$ . Разность механической энергии до и после скачка уплотнения

$$\Delta h = \frac{v_1^2 - v_2^2}{2g} \frac{1}{k}$$

в виде тепла подводится к массе газа.

Таким образом, хотя и нет подвода тепла к потоку газа из внешней среды (условие адиабатичности), происходит перераспределение запаса удельной энергии и после скачка уплотнения запас механической энергии необратимо снижается. Зависимость между плотностью и давлением газа до и после скачка уплотнения уже не адиабатическая.

Если фронт скачка уплотнения перпендикулярен скорости набегающего потока, то скачок называется прямым. При переходе через прямой скачок направление скорости не меняется.

Связь между параметрами газа до скачка  $p_1, \rho_1$  и за ним  $p_2, \rho_2$  имеет вид

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{[\rho_2(k+1) / \rho_1(k-1)] - 1}{(k+1)/(k-1) - \rho_2 / \rho_1}. \quad (4.26)$$

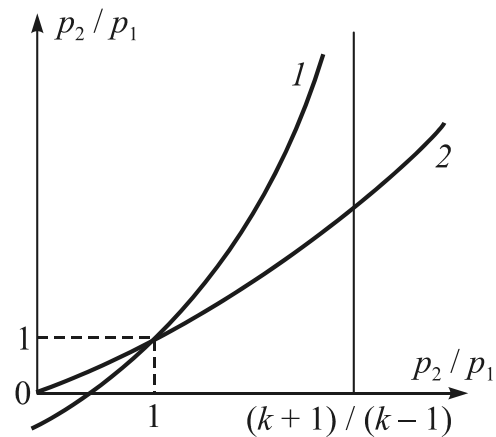


Рис. 4.6. Сравнение ударной адиабаты Гюгонио (кривая 1) и адиабаты Пуассона (кривая 2)

Это соотношение называется ударной адиабатой Гюгонио (рис. 4.6, кривая 1).

На этом же рисунке для сравнения показана адиабата Пуассона  $p_2 / p_1 = (\rho_2 / \rho_1)^k$  (кривая 2), соответствующая изоэнтропному сжатию совершенного газа.

Адиабата Гюгонио характеризует адиабатическое неизоэнтропное сжатие газа в ударной волне. При прохождении газом скачка уплотнения происходит необратимый частичный переход механической энергии в тепловую энергию, что приводит к увеличению энтропии.

Особенность ударной адиабаты в том, что при неограниченном возрастании давления в скачке ( $p_2 / p_1 \rightarrow \infty$ ) плотность не может возрасти более, чем в  $(k + 1) / (k - 1)$  раз (для воздуха не больше, чем в 6 раз).

Скорости течения газа до ( $v_1$ ) и после скачка ( $v_2$ ) связаны соотношением Прандтля

$$v_1 v_2 = a_{\text{кр}}^2 \quad (4.27)$$

или

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (4.28)$$

Из формулы (4.28) видно, что каков бы ни был начальный сверхзвуковой поток ( $\lambda_1 > 1$ ), за прямым скачком движение становится дозвуковым ( $\lambda_2 < 1$ ).

Отношения давлений, плотностей и температур за прямым скачком ( $p_2, \rho_2, T_2$ ) к соответствующим значениям до скачка ( $p_1, \rho_1, T_1$ ) определяются в зависимости от числа Маха перед скачком  $M_1 = a_1$  (или от коэффициента скорости  $\lambda_1$ ) по формулам

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} = \frac{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}; \quad (4.29)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{2} M_1^2}{1 + \frac{k+1}{2} M_1^2} = \lambda_1^2; \quad (4.30)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4k - (k-1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2(k-1)}{(k+1)^2 M_1^2} + \frac{2k(k-1)}{(k+1)^2} M_1^2 = \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}. \quad (4.31)$$

Число Маха за прямым скачком  $M_2$  связано с числом Маха перед скачком  $M_1$  соотношением

$$M_2^2 = \frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}. \quad (4.32)$$

Изменение энтропии при прохождении совершенным газом прямого скачка уплотнения определяется по формуле

$$S_1 - S_2 = c_V \ln \frac{p_{02} \rho_{01}^k}{p_{01} \rho_{02}^k} = R \ln \frac{p_{02}}{p_{01}}, \quad (4.33)$$

где  $(\rho_{01}, p_{01})$ ,  $(\rho_{02}, p_{02})$  – плотность и давление торможения до и после скачка соответственно.

Отношение  $\sigma = p_{02} / p_{01} < 1$  называется коэффициентом давления и характеризует потери механической энергии в прямом скачке. Ниже приведена зависимость коэффициента давления от числа Маха  $M_1$  перед скачком (или от коэффициента скорости  $\lambda_1$ ):

$$\begin{aligned} \sigma &= \left( \frac{k+1}{2} \right)^{\frac{k+1}{k-1}} \frac{M_1^{\frac{2k}{k-1}}}{\left( 1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{\frac{k}{k-1}} \left( k M_1^2 - \frac{k-1}{2} \right)^{\frac{1}{k-1}}} = \\ &= \lambda_1^{\frac{2k}{k-1}} \left( \frac{1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda_1^2}{\lambda_1^2 - \frac{k-1}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Температура торможения до и после скачка одна и та же:

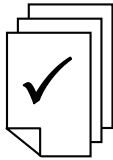
$$T_{01} = T_{02} = T_0.$$

Если ударная волна подвижна и распространяется по неподвижному газу, имеющему параметры  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $T_1$ , то скорость ее распространения  $w$  определяется по формуле

$$w = \sqrt{k \frac{p_1}{\rho_1}} \sqrt{\frac{k-1}{2} + \frac{k+1}{2k} \frac{p_2}{p_1}}, \quad (4.35)$$

где  $p_2$  – давление за ударной волной.

Скорость распространения ударной волны  $w$  всегда больше, чем скорость звука перед ударной волной:  $w > a_1$ , где  $a = \sqrt{kp_1 / \rho_1}$ .



**Пример 4.6.** Воздушно-реактивный двигатель обтекается сверхзвуковым потоком с давлением  $p_1 = 0,255 \cdot 10^5$  Па, температурой  $T_1 = 220$  К и скоростью  $v_1 = 575$  м/с.

1. Рассчитать прямой скачок уплотнения, т. е. найти  $p_2$ ,  $T_2$ ,  $\rho_2$ ,  $v_2$ .

2. Найти давление в камере горения, считая, что оно совпадает с  $p_{02}$ .

3. Найти давление, которое имело бы место в камере горения в предположении изоэнтропности всего течения.

4. Найти коэффициент давления  $\sigma = p_{02} / p_{01}$ ,  $k = 1,4$ ;  $R = 287$  Дж / (кг · К).

*Решение.* Найдем скорость звука и число Маха перед скачком:

$$a_1 = C_{\text{возд}} \sqrt{T_1} = 20 \sqrt{220} = 297 \text{ м/с};$$

$$M_1 = v_1 / a_1 = 575 / 297 = 1,94.$$

Зная  $M_1$ ,  $p_1$  и  $T_1$ , определим давление  $p_2$  и температуру  $T_2$  за скачком по формулам (4.29) и (4.31):

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{2k}{k+1} M_1^2 - \frac{k-1}{k+1} = 1,167 \cdot 1,94^2 - 0,167 = 4,22;$$

$$p_2 = 4,22 p_1 = 4,22 \cdot 0,255 \cdot 10^5 = 1,08 \cdot 10^5 \text{ Па};$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{4k - (k-1)^2}{(k+1)^2} - \frac{2k - (k-1)}{(k+1)^2} M_1^2 + \frac{2k(k-1)M_1^2}{(k+1)^2} =$$

$$= 0,944 - \frac{0,139}{1,94^2} + 0,194 \cdot 0,194^2 = 1,64;$$

$$T_2 = 1,64 T_1 = 361 \text{ К}.$$

По формуле (4.32) найдем значение  $M_2$  за скачком:

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{k-1}{2} M_1^2}{k M_1^2 - \frac{k-1}{2}}} = \sqrt{\frac{1,75}{5,27 - 0,20}} = 0,588.$$

Рассчитаем скорость звука за скачком:

$$a_2 = 20 \sqrt{361} = 380 \text{ м/с};$$

скорость течения газа –  $v_2 = M_2 a_2 = 0,588 \cdot 380 = 223$  м/с;

$$\text{плотность} - \rho_2 = \frac{p_2}{RT_2} = \frac{1,08 \cdot 10^5}{287 \cdot 361} = 1,04 \text{ кг/м}^3.$$

Считая движение газа за скачком изоэнтропическим, по таблицам газодинамических функций найдем:

$$\frac{p_2}{p_{02}} = \pi(M_2) = 0,791;$$

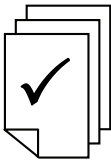
$$p_{02} = \frac{p_2}{0,791} = \frac{1,08 \cdot 10^5}{0,791} = 1,36 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

При изоэнтропном движении давление в камере равнялось бы  $p_{01}$ :

$$\frac{p_1}{p_{01}} = \pi(M_1) = \pi(1,94) = 0,140;$$

$$p_{01} = \frac{p_1}{0,14} = \frac{0,255 \cdot 10^5}{0,140} = 1,82 \cdot 10^5 \text{ Па;}$$

$$\sigma = \frac{p_{02}}{p_{01}} = \frac{1,36}{1,82} = 0,75.$$



**Пример. 4.7.** Определить число Маха и коэффициент скорости в потоке воздуха в трубе по известным показаниям манометра  $H = 1722$  мм рт. ст. и  $h = -320$  мм рт. ст. (рис. 4.7).

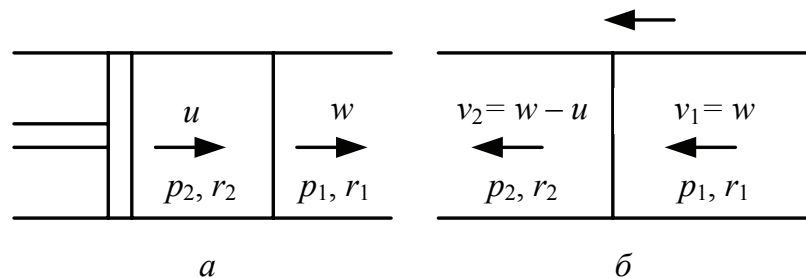


Рис. 4.7. К примеру 4.7

Показание барометра  $h_6 = 760$  мм рт. ст.

Определить также давление торможения в набегающем потоке  $p_{01}$ .

*Решение.* Давление в набегающем потоке:

$$p_1 = p_a + \rho g H = (0,760 - 0,320) \cdot 1,36 \cdot 10^4 \cdot 9,81 = 5,87 \cdot 10^4 \text{ Па.}$$

Перед трубкой Пито образуется прямой скачок уплотнения, поэтому ее показание  $H$  соответствует избыточному давлению торможения в потоке за скачком:

$$p_{02} = p_a + \rho_p g H = (0,760 + 1,722) \cdot 1,36 \cdot 10^4 \cdot 9,81 = 3,317 \cdot 10^5 \text{ Па.}$$

Отношение плотностей определится как

$$\begin{aligned} p_{02} / p_1 &= (p_{02} / p_{01})(p_{01} / p_1) = \\ &= \sigma(M_1) / \pi(M_1) = 33,1 / 5,87 = 5,64. \end{aligned}$$

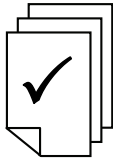
Задаваясь разными значениями  $M_1 > 1$ , можно построить график зависимости функции  $p_{02} / p_1$  от  $M_1$ , используя формулу (4.34) и таблицы газодинамических функций, из которых следует, что  $M_1 = 2$ .

Найдем коэффициент скорости

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{(k+1)M_1^2}{2+(k-1)M_1^2}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 4}{1+0,2 \cdot 4}} = 1,63.$$

Давление торможения в набегающем потоке  $p_{01}$  определяется по таблицам газодинамических функций:

$$p_{01} = p_1 / \pi(M_1) = 5,87 \cdot 10^4 / 0,129 = 0,456 \text{ МПа.}$$



**Пример 4.8.** С какой скоростью  $w$  распространяется по трубе ударная волна, образующаяся при движении поршня со скоростью  $u = 250$  м/с в совершенном газе с температурой  $T_1 = 300$  К (рис. 4.7, а)?

Известно, что  $k = 1,3$ ;  $R = 290$  Дж/(кг · К).

*Решение.* Выведем формулу для скорости распространения ударной волны.

Чтобы применить соотношения, полученные для неподвижной ударной волны (скачка уплотнения), мысленно сообщают газу поступательное движение со скоростью  $w$  в направлении, противоположном скорости движения ударной волны (рис. 4.7, б).

Тогда ударная волна оказывается остановленной, а поток перед ней – движущимся со скоростью  $v_1 = w$  влево. За скачком газ будет иметь скорость  $v_2 = w - u$ .

Для нахождения скорости  $w$  используем формулу Прандтля (4.27):

$$v_1 v_2 = w(w - u) = a_{кр}^2$$

и уравнение энергии

$$c_p T_1 + \frac{w^2}{2} = c_p T_0 = \frac{k+1}{2(k-1)} a_{кр}^2.$$

Исключив из этих соотношений  $a_{кр}^2$ , получим уравнение для определения скорости  $w$

$$w^2 - \frac{k+1}{2}uw - (k-1)c_p T_1 = 0.$$

Используя формулу Майера  $R = c_p - c_v$  и соотношение  $k = c_p / c_v$ , преобразуем последний член к виду  $(k-1)c_p = kRT_1$ .

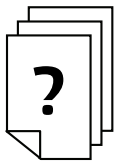
Тогда решением уравнения будет

$$w = \frac{k+1}{4}u + \sqrt{\frac{(k+1)^2 u^2}{16} + kRT_1}.$$

Второй корень не годится; так как дает  $w < 0$ .

Подставив численные данные, получим

$$w = \frac{1,3+1}{4} \cdot 250 + \sqrt{\frac{(1,3+1)^2 \cdot 250^2}{16} + 1,3 \cdot 290 \cdot 300} = 510 \text{ м/с.}$$



### Контрольные задания по теме

**Задача 4.14.** Сравнить увеличение плотности и температуры при ударном и при изоэнтропном сжатии воздуха, если в том и другом случае давление возрастает в 10 раз. Объясните разницу.



*Пояснение.* Повышению плотности при ударном сжатии препятствует разогрев газа на ударной волне.

*Ответ:*  $(\rho_2 / \rho_1)_{уд} = 3,81$ ;  $(\rho_2 / \rho_1)_{изоэнтр} = 5,18$ ;  $(T_2 / T_1)_{уд} = 2,62$ ;  
 $(T_2 / T_1)_{изоэнтр} = 1,93$ .

**Задача 4.15.** Давление при сжатии воздуха возрастает в 7 раз. Найти изменение температуры  $T_2 / T_1$  при изоэнтропном течении и при наличии скачка уплотнения.

*Ответ:*  $(T_2 / T_1)_{изоэнтр} = 1,74$ ;  $(T_2 / T_1)_{уд} = 2,12$ .

**Задача 4.16.** При сжатии воздуха плотность возрастает в 4 раза. Найти изменение температуры  $T_2 / T_1$  при изоэнтропном течении и при наличии скачка уплотнения.

*Ответ:*  $(T_2 / T_1)_{изоэнтр} = 1,74$ ;  $(T_2 / T_1)_{уд} = 2,88$ .



**Задача 4.17.** На прямом скачке уплотнения  $p_2 / p_1 = 3$ ;  $k = 1,4$ .  
Найти  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\rho_1 / \rho_2$ ,  $v_2 / v_1$ .

*Ответ:*  $\lambda_1 = 1,45$ ;  $\lambda_2 = 0,688$ ;  $\rho_1 / \rho_2 = 2,11$ ;  $T_2 / T_1 = 1,42$ ;  
 $v_2 / v_1 = 0,475$ .

**Задача 4.18.** На прямом скачке уплотнения плотность возрастает в 2 раза. При каком значении коэффициента скорости возник скачок уплотнения? Как изменится кинетическая энергия единицы объема газа на скачке?

*Ответ:*  $\lambda_1 = 1,41$ ;  $\mathcal{E}_{\text{кин}2} / \mathcal{E}_{\text{кин}1} = 0,5$ .

**Задача 4.19.** На прямом скачке уплотнения  $\lambda_1 = 2$ ,  $k = 1,4$ .  
Найти  $l_2$ ,  $r_2 / r_1$ ,  $p_2 / p_1$ ,  $T_2 / T_1$ .

*Ответ:*  $l_2 = 0,5$ ;  $r_1 / r_2 = 4$ ;  $p_2 / p_1 = 11,5$ ;  $T_2 / T_1 = 2,88$ .

**Задача 4.20.** На прямом скачке уплотнения  $T_2 / T_1 = 2$ . Принять  $k = 1,4$ . Найти  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $r_2 / r_1$ ,  $p_2 / p_1$ .

*Ответ:*  $l_1 = 1,78$ ;  $l_2 = 0,563$ ;  $r_2 / r_1 = 3,16$ ;  $p_2 / p_1 = 6,32$ ;  $\lambda_1 = 1,78$ ;  
 $\lambda_2 = 0,563$ ;  $\rho_2 / \rho_1 = 3,16$ ;  $p_2 / p_1 = 6,32$ .

**Задача 4.21.** Скорость газа за прямым скачком уплотнения  $v_2 = 221$  м/с. Температура торможения после скачка  $t_{02} = 100^\circ\text{C}$ .

Определить температуру газа в потоке до скачка. Принять параметры воздуха.

*Ответ:*  $T_1 = 214$  К.

**Задача 4.22.** Скорость течения воздуха перед скачком  $v_1 = 400$  м/с. Температура торможения  $T_{01} = 330$  К. Найти коэффициенты скорости перед и за скачком, температуру  $T_2$  и скорость  $v_2$ .

*Ответ:*  $\lambda_1 = 1,20$ ;  $\lambda_2 = 0,831$ ;  $T_2 = 292$  К;  $v_2 = 276$  м/с.

**Задача 4.23.** Воздух поступает в сопло Лавалья под давлением  $p_{01} = 2$  МПа. В расширяющейся части сопла имеет место прямой скачок уплотнения. Перед скачком давление  $p_1 = 0,4$  МПа. Найти давление за скачком, считая, что до скачка внутри сопла движение газа изоэнтропное.

*Ответ:*  $p_2 = 1,30$  МПа.

**Задача 4.24.** Воздух вытекает из котла, где он имеет температуру  $16^\circ\text{C}$ , через сопло Лаваля с отношением площадей выходного и критического сечений  $s_B / s_{\text{кр}} = 4$ . В выходном сечении сопла имеет место прямой скачок. Найти скорость газа за скачком, считая течение газа перед скачком изоэнтропным.

*Ответ:*  $v_2 = 159$  м/с.

**Задача 4.25.** В сопло Лаваля подается воздух из резервуара с давлением 4 МПа. Отношение площадей выходного и критического сечений  $s_B / s_{\text{кр}} = 3,33$ . Определить:

1. Давление за прямым скачком, если он имеет место в выходном сечении.

2. Давление за прямым скачком, если он имеет место в сечении с площадью  $s' = 2s_{\text{кр}}$ .

*Ответ:*  $p_{2B} = 1,38$  МПа;  $p_{2'} = 2,03$  МПа.

**Задача 4.26.** Давление перед прямым скачком уплотнения  $p_1 = 0,255$  МПа, давление торможения  $p_{02} = 0,6$  МПа. Найти давление за скачком  $p_2$ , давление торможения  $p_{02}$  и коэффициент давления  $\sigma = p_{02} / p_{01}$ . Принять  $k = 1,4$ .

*Ответ:*  $p_2 = 0,369$  МПа;  $p_{02} = 0,596$  МПа;  $\sigma = 0,994$ .

**Задача 4.27.** Определить коэффициент давления  $\sigma$  для прямого скачка уплотнения, если  $M_1 = 2$ . Найти также давление торможения за прямым скачком, если давление в потоке воздуха до скачка  $p_1 = 10^5$  Па.

*Ответ:*  $\sigma = 0,72$ ;  $p_{02} = 5,65 \cdot 10^5$  Па.

**Задача 4.28.** Воздух вытекает из сопла Лаваля при числе Маха  $M_1 = 2,5$  под действием давления  $p_{01} = 1,57$  МПа;  $T_0 = 288$  К.

Определить:

1. Параметры газа в выходном сечении сопла, т. е.  $p_1$ ,  $T_1$ ,  $\rho_1$ , считая, что расширение воздуха расчетное.

2. Параметры газа за скачком  $p_2, r_2, T_2, M_2$ , считая, что в выходном сечении сопла имеет место прямой скачок уплотнения.

3. Коэффициент давления  $\sigma$ .

*Ответ:*  $p_1 = 9,19 \cdot 10^4$  Па;  $T_1 = 128$  К;  $\rho_1 = 2,50$  кг/м<sup>3</sup>;  $p_2 = 6,55 \cdot 10^5$  Па;  $T_2 = 274$  К;  $\rho_2 = 8,33$  кг/м<sup>3</sup>;  $M_2 = 0,513$ ;  $\sigma = 0,5$ .

**Задача 4.29.** Определить давление торможения воздуха за прямым скачком уплотнения, если параметры газа до скачка:  $p_1 = 10^5$  Па,  $\lambda_1 = 2$ .

*Ответ:*  $p_{02} = 1,34$  МПа.

**Задача 4.30.** Перед поршнем, движущимся с постоянной скоростью  $u = 400$  м/с, в трубе, заполненной воздухом, возникла ударная волна. Правый конец трубы открыт в атмосферу ( $p_a = 1,013 \cdot 10^5$  Па,  $\rho_a = 1,293$  кг/м<sup>3</sup>).

**Задание.** Найти скорость волны ( $w$ ) относительно стенок трубы и скорость волны относительно поршня.



*Указание.* См. рис. 4.7 к примеру 4.7.

*Ответ:*  $w = 649$  м/с;  $w - u = 249$  м/с.

**Задача 4.31.** Найти скорость распространения ударной волны по неподвижному газу с давлением  $p_1 = 9,8 \cdot 10^4$  Па и плотностью  $\rho_1 = 1,29$  кг/м<sup>3</sup>, предполагая, что движение одномерное, без трения и без притока теплоты. Известно, что после прохождения ударной волны давление возросло в 25 раз.

1. Сопоставить скорость распространения ударной волны со скоростью звука в неподвижном газе. Принять  $k = 1,4$ .

*Ответ:*  $w_1 = 1,51 \cdot 10^3$  м/с;  $a_1 = 326$  м/с;  $w_1 / a_1 = 4,64$ .



## Контрольные вопросы по разделу

1. Какие два случая необходимо различать при рассмотрении скорости распространения возмущений в газовой среде?
2. Какие колебания называются звуковыми колебаниями?
3. Какое уравнение сохранения используется при рассмотрении скорости звука?
4. Как можно определить скорость звука при адиабатическом, изоэнтропном течениях газа?
5. Какой вид будет иметь закон сохранения полной (механической и внутренней) энергии газового потока, при условии адиабатичности процесса распространения колебаний в газовой среде, в любом сечении сужающегося канала?

6. Что такое и какими параметрами характеризуется кризис течения в сужающемся канале?

7. Чему будет равняться скорость течения в выходном сечении сужающегося канала при значении давления окружающей среды меньше критического давления?

8. Чему будет равняться скорость течения в выходном сечении сужающегося канала при значении давления окружающей среды больше критического давления?

9. Можно ли получить в сужающемся канале скорость больше критической?

10. Что нужно для того, чтобы в выходном канале устанавливалось давление окружающей среды меньше критического давления?

11. Какой канал называют *соплом Лаваля*?

12. Что означает понятие скачок уплотнения и при каких режимах течения газа он возникает?

13. Что означает понятие *торможение потока*?

14. Какое значение для различных сечений имеют параметры торможения адиабатического изоэнтропного потока газа?

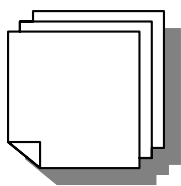
15. Какое значение для различных сечений имеют параметры торможения адиабатического изоэнтропного потока газа с трением, для которого энтропия вдоль потока меняется?

16. Какая связь между критическими параметрами и параметрами торможения?

17. Что называется *газодинамической функцией*?

18. Что описывает *число Маха*?

19. Что называется *коэффициентом скорости*?



## ПРИЛОЖЕНИЕ 1

# МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА

Изучение механики жидкости и газа, понимание сущности рассматриваемых физических явлений и процессов тесно связано с усвоением достаточно развитого математического аппарата, которым эта наука оперирует.

В данном разделе приводятся некоторые сведения из векторного анализа и теории поля, необходимые для понимания дальнейшего, в основном известные студентам из курса математики.

**Векторы и операции над ними.** Полем какой-либо величины называется пространство, в каждой точке которого эта величина вполне определена. Если эта величина скаляр, т. е. характеризуется одним числом, то поле называют скалярным (поле плотности, поле температуры).

**Векторным** называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства величиной и направлением. Непременным условием, связанным с векторными величинами, является то, что они должны складываться по правилу параллелограмма.

Единичные векторы (орты) в направлении осей координат в декартовой системе координат будем обозначать  $e_x, e_y, e_z$ .

Тогда вектор  $\vec{U}$  может быть представлен как

$$\vec{U} = e_x U_x + e_y U_y + e_z U_z,$$

где  $U_x, U_y, U_z$  – проекции (компоненты) вектора на соответствующие оси координат.

**Скалярное произведение двух векторов** дает скалярную величину

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}| \cdot |\vec{V}| \cdot \cos \alpha,$$

где  $\alpha$  – угол между векторами.

Скалярное произведение векторов обращается в нуль, если векторы взаимно перпендикулярны.

*Векторное произведение двух векторов* может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ U_x & U_y & U_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определитель, получим

$$\begin{aligned} \vec{U} \times \vec{V} = & e_x(U_y V_z - U_z V_y) + \\ & + e_y(U_x V_z - U_z V_x) + e_z(U_x V_y - U_y V_x). \end{aligned}$$

**Дифференциальные характеристики поля.** *Операции первого порядка.* В теории поля рассматриваются три так называемые операции первого порядка. Эти операции позволяют, выполнив определенные математические действия:

- превратить *скалярную* величину в *векторную*;
- превратить *векторную* величину в *скалярную*;
- превратить *векторную* величину в *другую векторную* величину.

Эти операции соответственно называются: *градиент*, *дивергенция* и *ротор* (вихрь).

*Градиент* какой-то скалярной функции  $f(x, y, z)$  есть вектор, образующийся в результате выполнения следующих действий:

$$\text{grad } f = e_x \frac{\partial f}{\partial x} + e_y \frac{\partial f}{\partial y} + e_z \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Физически *градиент* есть вектор, в направлении которого функция в данной точке поля изменяется с максимальной скоростью.

*Дивергенцией* вектора  $U$  называется выражение вида

$$\text{div } \vec{U} = \frac{\partial U_x}{\partial x} + \frac{\partial U_y}{\partial y} + \frac{\partial U_z}{\partial z},$$

где  $U_x, U_y, U_z$  – проекции вектора  $\vec{U}$  на оси координат  $x, y, z$  соответственно.

Следовательно, любое векторное поле дает некоторое скалярное поле, а именно поле своей дивергенции (расходимости). Если  $\text{div } \vec{U} = 0$ , то поле называют *соленоидальным*.

*Вихрь поля (ротор)* – это вектор, образующийся при выполнении операции

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{U} = & e_x \left( \frac{\partial U_z}{\partial y} - \frac{\partial U_y}{\partial z} \right) + \\ & + e_y \left( \frac{\partial U_x}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial x} \right) + e_z \left( \frac{\partial U_y}{\partial x} - \frac{\partial U_x}{\partial y} \right). \end{aligned}$$

Если  $\operatorname{rot} \vec{U} = 0$ , то поле называют безвихревым.

*Операции второго порядка.* Операции  $\operatorname{grad} f$ ,  $\operatorname{div} \vec{U}$ ,  $\operatorname{rot} \vec{U}$ , переводящие скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор порождают пять операций второго порядка:

– превращение *скалярной* величины в *векторную* величину

$$\operatorname{grad} (\operatorname{div} \vec{U});$$

– превращение *векторной* величины в *скалярную* величину

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} f);$$

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{U});$$

– превращение одной *векторной* величины в другую *векторную* величину

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} f);$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{U}).$$

В теории поля показывается, что два из этих пяти соотношений тождественно равны нулю:

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{U}) = 0;$$

$$\operatorname{rot} (\operatorname{grad} f) = 0.$$

Операция  $\operatorname{div} (\operatorname{grad} f)$  носит название *оператора Лапласа* для скалярного поля и имеет вид

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

или, используя, оператор  $\Delta$

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

**Интегральные соотношения теории поля.** Поток векторного поля. Пусть  $dS$  (рис. П1.1) – элемент поверхности, а  $\vec{n}$  – единичный вектор, направленный по внешней нормали.

Потоком векторного поля (например  $\vec{U}$ ) называют поверхностный интеграл вида

$$\iint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS.$$

Если рассматривается векторное поле ротора ( $\text{rot } U$ ), то поток этого поля представляется как

$$\iint_S (\text{rot } \vec{U}) \cdot \vec{n} dS.$$

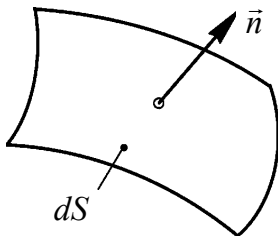


Рис. П1.1. К определению потока векторного поля

**Циркуляция вектора поля.** Рассмотрим векторное поле какой-то величины  $U$ . *Циркуляцией вектора  $\vec{U}$  вдоль контура  $L$*  называют криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \int_L \vec{U} d\vec{l}.$$

Иногда этот интеграл интерпретируется как «работа» векторного поля вдоль контура  $L$ .

Если *циркуляция векторного поля* вдоль замкнутого пути (контура) равна нулю, то поле называют *потенциальным*.

*Формула Стокса* позволяет преобразовать криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую, т. е.

$$\oint_L \vec{U} d\vec{l} = \iint_S (\text{rot } \vec{U}) \cdot \vec{n} dS,$$

т. е. *циркуляция вектора поля* вдоль контура равна *потoku вихря* через поверхность, ограниченную этим контуром.



*Формула Гаусса – Остроградского.* Это соотношение, часто называемое преобразованием Гаусса – Остроградского, связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью

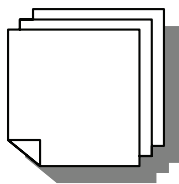
$$\iint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V (\operatorname{div} \vec{U}) dV.$$

Формула показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В механике жидкости широко используется формула, являющаяся следствием формулы Гаусса – Остроградского для скалярного поля

$$\iint_S \varphi \vec{n} dS = \iiint_V (\operatorname{grad} \varphi) dV,$$

где  $\varphi$  – скалярная величина.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 2

# ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ И ПЕРЕНОСНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВ

Таблица П2.1

Термодинамические и переносные свойства воды при  
давлении  $p = 0,101 \text{ МПа}$ <sup>20</sup>

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
275	999,94	1411,5	1,0002	1681,8	0,016819
280	999,91	1434,3	1,0003	1433,5	0,014337
285	999,52	1454,4	1,0018	1239,2	0,012398
290	998,80	1472,3	1,0045	1084	0,010853
295	997,81	1487,9	1,008	957,84	0,009599
300	996,56	1501,5	1,0122	853,83	0,008568
305	995,08	1513,3	1,0171	766,94	0,007707
310	993,38	1523,4	1,0224	693,54	0,006982
315	991,50	1531,9	1,0282	630,92	0,006363
320	989,43	1538,9	1,0344	577,04	0,005832
325	987,19	1544,5	1,041	530,31	0,005372
330	984,79	1548,9	1,0479	489,5	0,004971
335	982,23	1552	1,0551	453,66	0,004619
340	979,54	1554	1,0626	421,99	0,004308
345	976,7	1555	1,0704	393,87	0,004033
350	973,73	1554,9	1,0784	368,78	0,003787
355	970,63	1554	1,0867	346,32	0,003568
360	967,4	1552,1	1,0953	326,11	0,003371
365	964,06	1549,3	1,104	307,87	0,003194
370	960,59	1545,8	1,113	291,36	0,003033
373,13	958,37	1543,2	1,1187	281,81	0,002941

<sup>20</sup>  $T$  – температура, К;  $\rho$  – плотность, кг/м<sup>3</sup>;  $a$  – скорость звука, м/с;  $c_p / c_v$  – отношение изобарной и изохорной теплоемкостей;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости, Па · с;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости, м<sup>2</sup>/с.

Таблица П2.2

**Термодинамические и переносные свойства воды на линии кипения**

$T$	$P$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
273,16	0,000612	999,79	1402,3	1,0006	179,12	1,7912
275	0,000698	999,89	1411,4	1,0002	168,2	1,6822
280	0,000992	999,86	1434,1	1,0003	143,37	1,4339
285	0,001389	999,47	1454,3	1,0018	123,93	1,2399
290	0,00192	998,76	1472,1	1,0044	108,4	1,0854
295	0,002621	997,76	1487,7	1,008	95,787	0,96002
300	0,003537	996,51	1501,4	1,0122	85,384	0,85683
305	0,004719	995,03	1513,1	1,017	76,695	0,77077
310	0,006231	993,34	1523,2	1,0224	69,354	0,69819
315	0,008145	991,46	1531,7	1,0282	63,091	0,63635
320	0,010546	989,39	1538,7	1,0344	57,702	0,58321
325	0,013531	987,15	1544,3	1,041	53,029	0,53719
330	0,017213	984,75	1548,7	1,0479	48,949	0,49707
335	0,021718	982,2	1551,9	1,0551	45,364	0,46186
340	0,027188	979,5	1553,9	1,0626	42,197	0,4308
345	0,033783	976,67	1554,9	1,0704	39,385	0,40326
350	0,041682	973,7	1554,8	1,0784	36,877	0,37873
355	0,05108	970,61	1553,9	1,0867	34,63	0,35679
360	0,062194	967,39	1552	1,0953	32,61	0,33709
365	0,07526	964,05	1549,3	1,104	30,787	0,31935
370	0,090535	960,59	1545,8	1,113	29,136	0,30331
375	0,1083	957,01	1541,5	1,1222	27,636	0,28877

Таблица П2.3

**Изобарный коэффициент расширения воды на линии кипения<sup>21</sup>**

$T, ^\circ\text{C}$	$\beta \cdot 10^3$	$T, ^\circ\text{C}$	$\beta \cdot 10^3$
10	0,09	90	0,71
20	0,21	100	0,77
30	0,30	120	0,90
40	0,38	140	1,02
50	0,46	160	1,14
60	0,52	180	1,30
70	0,59	200	1,45
80	0,65	220	1,60

<sup>21</sup>  $\beta$  – изобарный коэффициент расширения,  $1/T$ .

Таблица П2.4

**Термодинамические и переносные свойства пара на линии конденсации**

$T$	$P$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
273,16	0,000612	0,004855	409	1,3285	9,2163	18,985
275	0,000698	0,005507	410,33	1,3284	9,2596	16,815
280	0,000992	0,007681	413,92	1,328	9,3815	12,214
285	0,001389	0,010571	417,48	1,3277	9,509	8,9957
290	0,00192	0,014363	420,99	1,3275	9,6414	6,7129
295	0,002621	0,019281	424,46	1,3273	9,7784	5,0716
300	0,003537	0,02559	427,89	1,3272	9,9195	3,8764
305	0,004719	0,033598	431,28	1,3271	10,064	2,9955
310	0,006231	0,043663	434,63	1,3272	10,213	2,339
315	0,008145	0,056195	437,93	1,3273	10,364	1,8443
320	0,010546	0,071662	441,18	1,3275	10,518	1,4677
325	0,013531	0,09059	444,39	1,3278	10,675	1,1783
330	0,017213	0,11357	447,54	1,3282	10,833	0,95388
335	0,021718	0,14127	450,64	1,3287	10,994	0,77827
340	0,027188	0,1744	453,68	1,3293	11,157	0,63973
345	0,033783	0,21378	456,67	1,33	11,321	0,52957
350	0,041682	0,26029	459,58	1,3309	11,487	0,44133
355	0,05108	0,31487	462,44	1,3319	11,654	0,37013
360	0,062194	0,37858	465,22	1,333	11,823	0,31229
365	0,07526	0,45253	467,93	1,3344	11,992	0,265
370	0,090535	0,53792	470,57	1,3359	12,162	0,22609
375	0,1083	0,63605	473,13	1,3376	12,332	0,19389

Таблица П2.5

**Термодинамические и переносные свойства перегретого водяного пара при давлении  $p = 0,101$  МПа**

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
373,15	0,59761	472,2	1,3369	12,269	0,20531
378,15	0,58909	475,73	1,336	12,456	0,21144
383,15	0,58085	479,16	1,335	12,643	0,21767
388,15	0,57288	482,52	1,3339	12,832	0,22399
393,15	0,56515	485,82	1,3328	13,022	0,23042
398,15	0,55766	489,07	1,3318	13,213	0,23694
403,15	0,55039	492,27	1,3308	13,405	0,24356
408,15	0,54332	495,43	1,3297	13,598	0,25028
413,15	0,53645	498,56	1,3288	13,792	0,2571
418,15	0,52976	501,64	1,3278	13,987	0,26402
423,15	0,52326	504,69	1,3268	14,182	0,27104

Окончание табл. П2.5

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
428,15	0,51692	507,71	1,3259	14,379	0,27816
433,15	0,51075	510,7	1,325	14,576	0,28538
438,15	0,50473	513,67	1,3241	14,774	0,29271
443,15	0,49886	516,6	1,3232	14,972	0,30013
448,15	0,49313	519,5	1,3223	15,172	0,30766
453,15	0,48754	522,38	1,3214	15,371	0,31528
458,15	0,48208	525,24	1,3205	15,572	0,32301
463,15	0,47675	528,07	1,3197	15,773	0,33084
468,15	0,47154	530,88	1,3189	15,974	0,33877
473,15	0,46645	533,67	1,318	16,176	0,3468
478,15	0,46146	536,44	1,3172	16,379	0,35494
483,15	0,45659	539,19	1,3164	16,582	0,36317
488,15	0,45183	541,91	1,3156	16,785	0,3715
493,15	0,44716	544,62	1,3148	16,989	0,37994
498,15	0,4426	547,31	1,314	17,194	0,38847
503,15	0,43812	549,98	1,3132	17,398	0,39711
508,15	0,43374	552,63	1,3125	17,603	0,40584
513,15	0,42945	555,26	1,3117	17,808	0,41468
518,15	0,42525	557,88	1,311	18,014	0,42361
523,15	0,42113	560,48	1,3102	18,22	0,43264
528,15	0,41709	563,07	1,3095	18,426	0,44178
533,15	0,41312	565,63	1,3087	18,632	0,45101
538,15	0,40924	568,19	1,308	18,839	0,46034
543,15	0,40543	570,73	1,3073	19,046	0,46977
548,15	0,40169	573,25	1,3065	19,253	0,4793
553,15	0,39801	575,76	1,3058	19,46	0,48892
558,15	0,39441	578,25	1,3051	19,667	0,49865
563,15	0,39087	580,73	1,3044	19,875	0,50847
568,15	0,3874	583,2	1,3037	20,082	0,51839
573,15	0,38399	585,65	1,303	20,29	0,5284

Таблица П2.6

**Термодинамические и переносные свойства воздуха  
при давлении  $p = 0,101$  МПа**

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
233,15	1,5156	306,2	1,4043	15,152	0,09997
238,15	1,4836	309,48	1,4041	15,417	0,10392
243,15	1,453	312,72	1,4039	15,681	0,10792
248,15	1,4236	315,93	1,4037	15,942	0,11199

Продолжение табл. П2.6

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
253,15	1,3953	319,1	1,4035	16,201	0,11611
258,15	1,3682	322,24	1,4033	16,458	0,1203
263,15	1,3421	325,35	1,4031	16,714	0,12454
268,15	1,317	328,43	1,4029	16,967	0,12884
273,15	1,2928	331,48	1,4027	17,218	0,13319
278,15	1,2694	334,5	1,4025	17,468	0,1376
283,15	1,247	337,49	1,4024	17,716	0,14207
288,15	1,2252	340,45	1,4022	17,962	0,1466
293,15	1,2043	343,38	1,402	18,206	0,15117
298,15	1,184	346,29	1,4018	18,448	0,15581
303,15	1,1645	349,17	1,4016	18,689	0,16049
308,15	1,1455	352,03	1,4013	18,928	0,16523
313,15	1,1272	354,86	1,4011	19,165	0,17003
318,15	1,1094	357,67	1,4009	19,401	0,17487
323,15	1,0922	360,45	1,4007	19,635	0,17977
328,15	1,0755	363,21	1,4004	19,868	0,18472
333,15	1,0594	365,94	1,4002	20,099	0,18973
338,15	1,0437	368,65	1,3999	20,329	0,19478
343,15	1,0284	371,34	1,3997	20,557	0,19988
348,15	1,0137	374,01	1,3994	20,784	0,20504
353,15	0,99928	376,66	1,3991	21,009	0,21024
358,15	0,98531	379,29	1,3988	21,233	0,21549
363,15	0,97172	381,89	1,3985	21,455	0,2208
368,15	0,95851	384,48	1,3982	21,677	0,22615
373,15	0,94565	387,04	1,3979	21,896	0,23155
378,15	0,93313	389,59	1,3976	22,115	0,237
383,15	0,92093	392,12	1,3973	22,332	0,2425
388,15	0,90906	394,63	1,3969	22,548	0,24804
393,15	0,89748	397,12	1,3966	22,763	0,25363
398,15	0,8862	399,59	1,3962	22,977	0,25927
403,15	0,8752	402,04	1,3959	23,189	0,26496
408,15	0,86447	404,48	1,3955	23,4	0,27069
413,15	0,854	406,89	1,3951	23,61	0,27647
418,15	0,84378	409,3	1,3947	23,819	0,28229
423,15	0,8338	411,68	1,3943	24,027	0,28816
428,15	0,82405	414,05	1,3939	24,234	0,29408
433,15	0,81453	416,4	1,3935	24,439	0,30004
438,15	0,80523	418,74	1,3931	24,644	0,30604
443,15	0,79614	421,06	1,3926	24,847	0,31209
448,15	0,78725	423,36	1,3922	25,049	0,31819
453,15	0,77856	425,65	1,3917	25,251	0,32433

Окончание табл. П2.6

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
458,15	0,77006	427,92	1,3913	25,451	0,33051
463,15	0,76174	430,18	1,3908	25,65	0,33673
468,15	0,7536	432,43	1,3903	25,849	0,343
473,15	0,74563	434,66	1,3899	26,046	0,34932
478,15	0,73783	436,88	1,3894	26,243	0,35567
483,15	0,73019	439,08	1,3889	26,438	0,36207
488,15	0,72271	441,27	1,3884	26,633	0,36851
493,15	0,71538	443,44	1,3879	26,826	0,37499
498,15	0,7082	445,6	1,3874	27,019	0,38152
503,15	0,70116	447,75	1,3869	27,211	0,38809
508,15	0,69426	449,89	1,3863	27,402	0,39469
513,15	0,68749	452,01	1,3858	27,592	0,40135
518,15	0,68085	454,12	1,3853	27,781	0,40804
523,15	0,67434	456,22	1,3847	27,97	0,41477
528,15	0,66796	458,31	1,3842	28,157	0,42154
533,15	0,66169	460,38	1,3837	28,344	0,42836
538,15	0,65554	462,45	1,3831	28,53	0,43522
543,15	0,64951	464,5	1,3826	28,715	0,44211
548,15	0,64358	466,54	1,382	28,9	0,44905
553,15	0,63776	468,57	1,3814	29,084	0,45602
558,15	0,63205	470,59	1,3809	29,266	0,46304
563,15	0,62644	472,59	1,3803	29,449	0,4701
568,15	0,62092	474,59	1,3798	29,63	0,47719
573,15	0,6155	476,58	1,3792	29,811	0,48433

Таблица П2.7

**Термодинамические и переносные свойства гелия-4  
при давлении  $p = 0,101$  МПа**

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
233,15	0,20909	898,94	1,6665	16,79	0,80301
238,15	0,2047	908,52	1,6665	17,033	0,83208
243,15	0,2005	917,99	1,6665	17,274	0,86157
248,15	0,19646	927,37	1,6665	17,514	0,89149
253,15	0,19258	936,66	1,6665	17,753	0,92183
258,15	0,18885	945,85	1,6665	17,99	0,9526
263,15	0,18527	954,96	1,6665	18,226	0,98378
268,15	0,18181	963,98	1,6665	18,461	1,0154
273,15	0,17849	972,91	1,6665	18,695	1,0474
278,15	0,17528	981,77	1,6665	18,927	1,0798

Продолжение табл. П2.7

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
283,15	0,17219	990,54	1,6665	19,158	1,1126
288,15	0,1692	999,24	1,6665	19,388	1,1459
293,15	0,16632	1007,9	1,6665	19,618	1,1795
298,15	0,16353	1016,4	1,6665	19,846	1,2136
303,15	0,16083	1024,9	1,6665	20,073	1,248
308,15	0,15823	1033,3	1,6665	20,299	1,2829
313,15	0,1557	1041,6	1,6665	20,524	1,3182
318,15	0,15325	1049,9	1,6666	20,748	1,3538
323,15	0,15088	1058,1	1,6666	20,971	1,3899
328,15	0,14859	1066,3	1,6666	21,193	1,4263
333,15	0,14636	1074,4	1,6666	21,415	1,4632
338,15	0,14419	1082,4	1,6666	21,635	1,5004
343,15	0,14209	1090,4	1,6666	21,854	1,538
348,15	0,14005	1098,3	1,6666	22,073	1,576
353,15	0,13807	1106,1	1,6666	22,291	1,6144
358,15	0,13615	1113,9	1,6666	22,508	1,6532
363,15	0,13427	1121,7	1,6666	22,724	1,6924
368,15	0,13245	1129,3	1,6666	22,939	1,7319
373,15	0,13068	1137	1,6666	23,154	1,7718
378,15	0,12895	1144,6	1,6666	23,367	1,8122
383,15	0,12727	1152,1	1,6666	23,58	1,8528
388,15	0,12563	1159,6	1,6666	23,792	1,8939
393,15	0,12403	1167	1,6666	24,004	1,9353
398,15	0,12247	1174,4	1,6666	24,214	1,9771
403,15	0,12095	1181,8	1,6666	24,424	2,0193
408,15	0,11947	1189,1	1,6666	24,634	2,0619
413,15	0,11803	1196,3	1,6666	24,842	2,1048
418,15	0,11662	1203,5	1,6666	25,05	2,1481
423,15	0,11524	1210,7	1,6666	25,257	2,1917
428,15	0,11389	1217,8	1,6666	25,464	2,2357
433,15	0,11258	1224,9	1,6666	25,67	2,2801
438,15	0,1113	1232	1,6666	25,875	2,3249
443,15	0,11004	1239	1,6666	26,079	2,37
448,15	0,10881	1245,9	1,6666	26,283	2,4155
453,15	0,10761	1252,9	1,6666	26,487	2,4613
458,15	0,10644	1259,7	1,6666	26,689	2,5075
463,15	0,10529	1266,6	1,6666	26,892	2,554
468,15	0,10417	1273,4	1,6666	27,093	2,6009
473,15	0,10307	1280,2	1,6666	27,294	2,6482
478,15	0,10199	1286,9	1,6666	27,494	2,6958



Окончание табл. П2.7

$T$	$\rho$	$a$	$c_p / c_v$	$\mu \cdot 10^6$	$\nu \cdot 10^6$
483,15	0,10093	1293,6	1,6666	27,694	2,7438
488,15	0,0999	1300,3	1,6666	27,893	2,7921
493,15	0,098887	1307	1,6666	28,092	2,8408
498,15	0,097895	1313,6	1,6666	28,29	2,8898
503,15	0,096922	1320,1	1,6666	28,487	2,9392
508,15	0,095969	1326,7	1,6666	28,684	2,9889
513,15	0,095034	1333,2	1,6666	28,881	3,039
518,15	0,094117	1339,7	1,6666	29,077	3,0894
523,15	0,093218	1346,1	1,6666	29,272	3,1402
528,15	0,092336	1352,5	1,6666	29,467	3,1913
533,15	0,09147	1358,9	1,6666	29,662	3,2428
538,15	0,090621	1365,2	1,6666	29,856	3,2946
543,15	0,089787	1371,6	1,6666	30,049	3,3467
548,15	0,088968	1377,9	1,6666	30,242	3,3992
553,15	0,088164	1384,1	1,6666	30,434	3,452
558,15	0,087374	1390,4	1,6666	30,626	3,5052
563,15	0,086599	1396,6	1,6666	30,818	3,5587
568,15	0,085837	1402,8	1,6666	31,009	3,6125
573,15	0,085088	1408,9	1,6666	31,199	3,6667

Таблица П2.8

**Поверхностное натяжение жидкостей на границе с воздухом  
при давлении  $p = 0,101$  МПа**

Вещество	Температура, °С	Поверхностное натяжение ( $10^{-3}$ Н/м)
Глицерин	30	64,7
Олово	400	518
Азотная кислота 70%	20	59,4
Анилин	20	42,9
Ацетон	20	23,7
Бензол	20	29,0
Вода	20	72,86
Глицерин	20	59,4
Нефть	20	26
Ртуть	20	486,5
Серная кислота 85%	20	57,4
Спирт этиловый	20	22,8
Уксусная кислота	20	27,8
Эфир этиловый	20	16,9
Раствор мыла	20	40

Таблица П2.9

**Изотермический коэффициент сжимаемости некоторых жидкостей  
при давлении  $p = 0,101$  МПа<sup>22</sup>**

Жидкость	$\chi \cdot 10^9$	Жидкость	$\chi \cdot 10^9$
Вода	0,462	Бром	0,591
Ртуть	0,0402	Спирт	1,12
Керосин	0,786	Эфир	1,87
Бензин	0,770	Сероуглерод	0,908
Глицерин	0,255	Масло (оливковое)	0,642
Бензол	0,906	Жидкий гелий	81,5

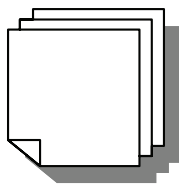
Таблица П2.10

**Изобарный коэффициент расширения некоторых жидкостей  
при давлении  $p = 0,101$  МПа<sup>23</sup>**

Жидкость	$\beta \cdot 10^3$	Жидкость	$\beta \cdot 10^3$
Ртуть	0,09	Эфир	0,71
Керосин	0,21	Глицерин	0,77
Спирт этиловый	0,30	Масло	0,90

<sup>22</sup>  $\chi$  – изотермический коэффициент сжимаемости, Па<sup>-1</sup>.

<sup>23</sup>  $\beta$  – изобарный коэффициент расширения, 1/Т.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

# ТАБЛИЦЫ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Таблица ПЗ.1

Таблицы газодинамических функций двухатомных газов ( $k = 1,4$ )<sup>24</sup>

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0158	0,0091
0,02	0,9999	0,9998	0,9998	0,0315	0,0183
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0473	0,0274
0,04	0,9997	0,9990	0,9993	0,0631	0,0365
0,05	0,9996	0,9986	0,9990	0,0788	0,0457
0,06	0,9994	0,9979	0,9985	0,0945	0,0548
0,07	0,9992	0,9971	0,9979	0,1102	0,0639
0,08	0,9989	0,9963	0,9974	0,1259	0,0731
0,09	0,9987	0,9953	0,9967	0,1415	0,0822
0,10	0,9983	0,9942	0,9959	0,1571	0,0914
0,11	0,9980	0,9929	0,9949	0,1726	0,1005
0,12	0,9976	0,9916	0,9940	0,1882	0,1097
0,13	0,9972	0,9901	0,9929	0,2036	0,1190
0,14	0,9967	0,9886	0,9918	0,2190	0,1280
0,15	0,9963	0,9870	0,9907	0,2344	0,1372
0,16	0,9957	0,9851	0,9893	0,2497	0,1460
0,17	0,9952	0,9832	0,9880	0,2649	0,1560
0,18	0,9946	0,9812	0,9866	0,2801	0,1650
0,19	0,9940	0,9791	0,9850	0,2952	0,1740
0,20	0,9933	0,9768	0,9834	0,3102	0,1830
0,21	0,9927	0,9745	0,9817	0,3252	0,1920
0,22	0,9919	0,9720	0,9799	0,3401	0,2020
0,23	0,9912	0,9695	0,9781	0,3549	0,2109
0,24	0,9904	0,9668	0,9762	0,3696	0,2202

<sup>24</sup>  $\lambda$  – коэффициентом скорости (согласно (4.16));  $\tau$ ,  $\pi$ ,  $\varepsilon$  – газодинамические функции (согласно (4.18)–(4.20));  $q$  – функция приведенного расхода (согласно (4.21));  $M$  – число Маха.

Продолжение табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,25	0,9896	0,9640	0,9742	0,3842	0,2290
0,26	0,9887	0,9611	0,9721	0,3987	0,2387
0,27	0,9879	0,9581	0,9699	0,4131	0,2480
0,28	0,9869	0,9550	0,9677	0,4274	0,2573
0,29	0,9860	0,9518	0,9653	0,4416	0,2670
0,30	0,9850	0,9485	0,9630	0,4557	0,2760
0,31	0,9840	0,9451	0,9605	0,4697	0,2850
0,32	0,9829	0,9415	0,9579	0,4835	0,2947
0,33	0,9819	0,9379	0,9552	0,4972	0,3040
0,34	0,9807	0,9342	0,9525	0,5109	0,3134
0,35	0,9796	0,9303	0,9497	0,5243	0,3228
0,36	0,9784	0,9265	0,9469	0,5377	0,3322
0,37	0,9772	0,9224	0,9439	0,5509	0,3417
0,38	0,9759	0,9183	0,9409	0,5640	0,3511
0,39	0,9747	0,9141	0,9378	0,5769	0,3606
0,40	0,9733	0,9097	0,9346	0,5897	0,3701
0,41	0,9720	0,9053	0,9314	0,6024	0,3796
0,42	0,9706	0,9008	0,9281	0,6149	0,3892
0,43	0,9692	0,8962	0,9247	0,6272	0,3987
0,44	0,9677	0,8915	0,9212	0,6394	0,4083
0,45	0,9663	0,8868	0,9178	0,6515	0,4179
0,46	0,9647	0,8819	0,9142	0,6633	0,4275
0,47	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,4372
0,47	0,9632	0,8770	0,9105	0,6750	0,4372
0,48	0,9616	0,8719	0,9067	0,6865	0,4468
0,49	0,9600	0,8668	0,9029	0,6979	0,4565
0,50	0,9583	0,8616	0,8991	0,7091	0,4663
0,51	0,9567	0,8563	0,8951	0,7201	0,4760
0,52	0,9549	0,8509	0,8911	0,7309	0,4858
0,53	0,9532	0,8455	0,8871	0,7416	0,4956
0,54	0,9514	0,8400	0,8829	0,7520	0,5054
0,55	0,9496	0,8344	0,8787	0,7623	0,5152
0,56	0,9477	0,8287	0,8744	0,7724	0,5251
0,57	0,9459	0,8230	0,8701	0,7823	0,5350
0,58	0,9439	0,8172	0,8657	0,7920	0,5450
0,59	0,9420	0,8112	0,8612	0,8015	0,5549
0,60	0,9400	0,8053	0,8567	0,8109	0,5649
0,61	0,9380	0,7992	0,8521	0,8198	0,5750
0,62	0,9359	0,7932	0,8475	0,8288	0,5850
0,63	0,9339	0,7870	0,8428	0,8375	0,5951
0,64	0,9317	0,7808	0,8380	0,8459	0,6053

Продолжение табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,65	0,9296	0,7745	0,8332	0,8543	0,6154
0,66	0,9274	0,7681	0,8283	0,8623	0,6256
0,67	0,9252	0,7617	0,8233	0,8701	0,6359
0,68	0,9229	0,7553	0,8183	0,8778	0,6461
0,69	0,9207	0,7488	0,8133	0,8852	0,6565
0,70	0,9183	0,7422	0,8082	0,8924	0,6668
0,71	0,9160	0,7356	0,8030	0,8993	0,6772
0,72	0,9136	0,7289	0,7978	0,9061	0,6876
0,73	0,9112	0,7221	0,7925	0,9126	0,6981
0,74	0,9087	0,7154	0,7872	0,9189	0,7086
0,75	0,9063	0,7086	0,7819	0,9250	0,7192
0,76	0,9037	0,7017	0,7764	0,9308	0,7298
0,77	0,9012	0,6948	0,7710	0,9364	0,7404
0,78	0,8986	0,6878	0,7655	0,9418	0,7511
0,79	0,8960	0,6809	0,7599	0,9469	0,7619
0,80	0,8933	0,6738	0,7543	0,9518	0,7727
0,81	0,8907	0,6668	0,7486	0,9565	0,7835
0,82	0,8879	0,6597	0,7429	0,9610	0,7944
0,83	0,8852	0,6526	0,7372	0,9652	0,8053
0,84	0,8824	0,6454	0,7314	0,9691	0,8163
0,85	0,8796	0,6382	0,7256	0,9729	0,8274
0,86	0,8767	0,6310	0,7197	0,9764	0,8384
0,87	0,8739	0,6238	0,7138	0,9796	0,8496
0,88	0,8709	0,6165	0,7079	0,9826	0,8608
0,89	0,8680	0,6092	0,7019	0,9854	0,8721
0,90	0,8650	0,6019	0,6959	0,9879	0,8833
0,91	0,8620	0,5946	0,6898	0,9902	0,8947
0,92	0,8589	0,5873	0,6838	0,9923	0,9062
0,93	0,8559	0,5800	0,6776	0,9941	0,9177
0,94	0,8527	0,5726	0,6715	0,9957	0,9292
0,95	0,8496	0,5653	0,6653	0,9970	0,9409
0,96	0,8464	0,5579	0,6591	0,9981	0,9526
0,97	0,8432	0,5505	0,6528	0,9989	0,9644
0,98	0,8399	0,5431	0,6466	0,9953	0,9761
0,99	0,8367	0,5357	0,6403	0,9999	0,9880
1,00	0,8333	0,5283	0,6340	1,0000	1,0000
1,01	0,8300	0,5209	0,6276	0,9999	1,0120
1,02	0,8266	0,5135	0,6212	0,9995	1,0241
1,03	0,8232	0,5061	0,6148	0,9989	1,0363
1,04	0,8197	0,4987	0,6084	0,9980	1,0486
1,05	0,8163	0,4913	0,6019	0,9969	1,0609

Продолжение табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,06	0,8127	0,4840	0,5955	0,9957	1,0733
1,07	0,8092	0,4766	0,5890	0,9941	1,0858
1,08	0,8056	0,4693	0,5826	0,9924	1,0985
1,09	0,8020	0,4619	0,5760	0,9903	1,1111
1,10	0,7983	0,4546	0,5694	0,9880	1,1239
1,11	0,7947	0,4473	0,5629	0,9856	1,1367
1,12	0,7909	0,4400	0,5564	0,9829	1,1496
1,13	0,7872	0,4328	0,5498	0,9800	1,1627
1,14	0,7834	0,4255	0,5432	0,9768	1,1758
1,15	0,7796	0,4184	0,5366	0,9735	1,1890
1,16	0,7757	0,4111	0,5300	0,9698	1,2023
1,17	0,7719	0,4040	0,5234	0,9659	1,2157
1,18	0,7679	0,3969	0,5168	0,9620	1,2292
1,19	0,7640	0,3898	0,5102	0,9577	1,2428
1,20	0,7600	0,3827	0,5035	0,9531	1,2566
1,21	0,7560	0,3757	0,4969	0,9484	1,2708
1,22	0,7519	0,3687	0,4903	0,9435	1,2843
1,23	0,7478	0,3617	0,4837	0,9384	1,2974
1,24	0,7437	0,3548	0,4770	0,9331	1,3126
1,25	0,7396	0,3479	0,4704	0,9275	1,3268
1,26	0,7354	0,3411	0,4638	0,9217	1,3413
1,27	0,7312	0,3343	0,4572	0,9159	1,3558
1,28	0,7269	0,3275	0,4505	0,9096	1,3705
1,29	0,7227	0,3208	0,4439	0,9033	1,3853
1,30	0,7183	0,3142	0,4374	0,8969	1,4002
1,31	0,7140	0,3075	0,4307	0,8901	1,4153
1,32	0,7096	0,3010	0,4241	0,8831	1,4305
1,33	0,7052	0,2945	0,4176	0,8761	1,4458
1,34	0,7007	0,2880	0,4110	0,8688	1,4613
1,35	0,6962	0,2816	0,4045	0,8614	1,4769
1,36	0,6917	0,2753	0,3980	0,8538	1,4927
1,37	0,6872	0,2690	0,3914	0,8459	1,5087
1,38	0,6826	0,2628	0,3850	0,8380	1,5248
1,39	0,6780	0,2566	0,3785	0,8299	1,5410
1,40	0,6733	0,2505	0,3720	0,8216	1,5575
1,41	0,6687	0,2445	0,3656	0,8131	1,5741
1,42	0,6639	0,2385	0,3592	0,8046	1,5909
1,43	0,6592	0,2326	0,3528	0,7958	1,6078
1,44	0,6544	0,2267	0,3464	0,7869	1,6250
1,45	0,6496	0,2209	0,3101	0,7778	1,6423
1,46	0,6447	0,2152	0,3338	0,7687	1,6598

Продолжение табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,47	0,6398	0,2095	0,3275	0,7593	1,6776
1,48	0,6349	0,2040	0,3212	0,7499	1,6955
1,49	0,6300	0,1985	0,3150	0,7404	1,7137
1,50	0,6250	0,1930	0,3088	0,7307	1,7321
1,51	0,6200	0,1876	0,3027	0,7209	1,7506
1,52	0,6149	0,1824	0,2965	0,7110	1,7694
1,53	0,6099	0,1771	0,2904	0,7009	1,7885
1,54	0,6047	0,1720	0,2844	0,6909	1,8078
1,55	0,5996	0,1669	0,2784	0,6807	1,8273
1,56	0,5944	0,1619	0,2724	0,6703	1,8471
1,57	0,5892	0,1570	0,2665	0,6599	1,8672
1,58	0,5839	0,1522	0,2606	0,6494	1,8875
1,59	0,5786	0,1474	0,2547	0,6389	1,9081
1,60	0,5733	0,1427	0,2489	0,6282	1,9290
1,61	0,5680	0,1381	0,2431	0,6175	1,9501
1,62	0,5626	0,1336	0,2374	0,6067	1,9716
1,63	0,5572	0,1291	0,2317	0,5958	1,9934
1,64	0,5517	0,1248	0,2261	0,5850	2,0155
1,65	0,5463	0,1205	0,2205	0,5740	2,0380
1,66	0,5407	0,1163	0,2150	0,5630	2,0607
1,67	0,5352	0,1121	0,2095	0,5520	2,0839
1,68	0,5296	0,1081	0,2041	0,5409	2,1073
1,69	0,5240	0,1041	0,1988	0,5298	2,1313
1,70	0,5183	0,1003	0,1934	0,5187	2,1555
1,71	0,5126	0,0965	0,1881	0,5075	2,1802
1,72	0,5069	0,0928	0,1830	0,4965	2,2053
1,73	0,5012	0,0891	0,1778	0,4852	2,2308
1,74	0,4954	0,0856	0,1727	0,4741	2,2567
1,75	0,4896	0,0821	0,1677	0,4630	2,2831
1,76	0,4837	0,0787	0,1628	0,4520	2,3100
1,77	0,4779	0,0754	0,1578	0,4407	2,3374
1,78	0,4719	0,0722	0,1530	0,4296	2,3653
1,79	0,4660	0,0691	0,1482	0,4185	2,3937
1,80	0,4600	0,0660	0,1435	0,4075	2,4227
1,81	0,4540	0,0630	0,1389	0,3965	2,4523
1,82	0,4479	0,0602	0,1343	0,3855	2,4824
1,83	0,4418	0,0573	0,1298	0,3746	2,5132
1,84	0,4357	0,0546	0,1253	0,3638	2,5449
1,85	0,4296	0,0520	0,1210	0,3530	2,5766
1,86	0,4234	0,0494	0,1167	0,3423	2,6094
1,87	0,4172	0,0469	0,1124	0,3316	2,6429

Продолжение табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,88	0,4109	0,0445	0,1083	0,3211	2,6772
1,89	0,4047	0,0422	0,1042	0,3105	2,7123
1,90	0,3983	0,0399	0,1002	0,3002	2,7481
1,91	0,3920	0,0377	0,0962	0,2898	2,7849
1,92	0,3856	0,0356	0,0923	0,2797	2,8225
1,93	0,3792	0,0336	0,0885	0,2695	2,8612
1,94	0,3727	0,0316	0,0848	0,2596	2,9007
1,95	0,3662	0,0297	0,0912	0,2497	2,9414
1,96	0,3597	0,0279	0,0776	0,2400	2,9831
1,97	0,3532	0,0262	0,0741	0,2304	3,0301
1,98	0,3466	0,0245	0,0707	0,2209	3,0701
1,99	0,3400	0,0229	0,0674	0,2116	3,1155
2,00	0,3333	0,0214	0,0642	0,2024	3,1622
2,01	0,3267	0,0199	0,0610	0,1934	3,2104
2,02	0,3199	0,0185	0,0579	0,1845	3,2603
2,03	0,3132	0,0172	0,0549	0,1758	3,3113
2,04	0,3064	0,0159	0,0520	0,1672	3,3642
2,05	0,2996	0,0147	0,0491	0,1588	3,4190
2,06	0,2927	0,0136	0,0464	0,1507	3,4759
2,07	0,2859	0,0125	0,0437	0,1427	3,5343
2,08	0,2789	0,0115	0,0411	0,1348	3,5951
2,09	0,2720	0,0105	0,0386	0,1272	3,6583
2,10	0,2650	0,0096	0,0361	0,1198	3,7240
2,11	0,2580	0,0087	0,0338	0,1125	3,7922
2,12	0,2509	0,0079	0,0315	0,1055	3,8633
2,13	0,2439	0,0072	0,0294	0,0986	3,9376
2,14	0,2367	0,0065	0,0273	0,0921	4,0150
2,15	0,2296	0,0058	0,0253	0,0857	4,0961
2,16	0,2224	0,0052	0,0233	0,0795	4,1791
2,17	0,2152	0,0046	0,0215	0,0735	4,2702
2,18	0,2079	0,0041	0,0197	0,0678	4,3642
2,19	0,2006	0,0036	0,0180	0,0623	4,4633
2,20	0,1933	0,0032	0,0164	0,0570	4,5674
2,21	0,1860	0,0028	0,0149	0,0520	4,6778
2,22	0,1786	0,0024	0,0135	0,0472	4,7954
2,23	0,1712	0,0021	0,0121	0,0427	4,9201
2,24	0,1637	0,0018	0,0116	0,0408	5,0533
2,25	0,1563	0,00151	0,00966	0,0343	5,1958
2,26	0,1487	0,00127	0,00813	0,0290	5,3494
2,27	0,1412	0,00106	0,00749	0,0268	5,5147
2,28	0,1336	0,00087	0,00652	0,0234	5,6940



Окончание табл. ПЗ.1

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
2,29	0,1260	0,00071	0,00564	0,0204	5,8891
2,30	0,1183	0,00057	0,00482	0,0175	6,1033
2,31	0,1106	0,00045	0,00407	0,0148	6,3399
2,32	0,1029	0,00035	0,00340	0,0124	6,6008
2,33	0,0952	0,00027	0,00280	0,0103	6,8935
2,34	0,0874	0,00020	0,00226	0,0083	7,2254
2,35	0,0796	0,00014	0,00170	0,0063	7,6053
2,36	0,0717	$0,988 \cdot 10^{-4}$	0,00138	0,0051	8,0450
2,37	0,0638	$0,657 \cdot 10^{-4}$	0,00103	0,0038	8,5619
2,38	0,0559	$0,413 \cdot 10^{-4}$	0,00074	0,0028	9,1882
2,39	0,0480	$0,242 \cdot 10^{-4}$	0,00050	0,0019	9,9624
2,40	0,0400	$0,128 \cdot 10^{-4}$	0,00032	0,0012	10,9570
2,41	0,0320	$0,584 \cdot 10^{-5}$	0,00018	0,0007	12,3060
2,42	0,0239	$0,211 \cdot 10^{-5}$	$0,884 \cdot 10^{-4}$	0,0003	14,2870
2,43	0,0158	$0,499 \cdot 10^{-6}$	$0,315 \cdot 10^{-4}$	0,0001	17,6310
2,44	0,0077	$0,316 \cdot 10^{-7}$	$0,410 \cdot 10^{-5}$	$0,058 \cdot 10^{-4}$	25,3670
2,449	0	0	0	0	0

Таблица ПЗ.2

Таблицы газодинамических функций двухатомных газов ( $k = 1,33$ )

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,00	1,0000	1,0000	1,0000	0,0000	0,0000
0,01	1,0000	0,9999	0,9999	0,0159	0,0093
0,02	0,9999	0,9998	0,9999	0,0318	0,0185
0,03	0,9999	0,9995	0,9997	0,0476	0,0278
0,04	0,9998	0,9991	0,9993	0,0635	0,0371
0,05	0,9997	0,9986	0,9990	0,0793	0,0463
0,06	0,9995	0,9980	0,9985	0,0952	0,0563
0,07	0,9993	0,9972	0,9979	0,1110	0,0649
0,08	0,9991	0,9964	0,9973	0,1267	0,0742
0,09	0,9989	0,9954	0,9965	0,1425	0,0834
0,10	0,9986	0,9944	0,9958	0,1582	0,0927
0,11	0,9983	0,9932	0,9949	0,1738	0,1020
0,12	0,9980	0,9918	0,9938	0,1894	0,1113
0,13	0,9976	0,9904	0,9928	0,2052	0,1206
0,14	0,9972	0,9889	0,9917	0,2205	0,1299
0,15	0,9968	0,9872	0,9903	0,2360	0,1392
0,16	0,9964	0,9854	0,9890	0,2514	0,1485
0,17	0,9959	0,9836	0,9877	0,2667	0,1578
0,18	0,9954	0,9816	0,9862	0,2820	0,1672

Продолжение табл. ПЗ.2

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,19	0,9949	0,9796	0,9846	0,2972	0,1765
0,20	0,9943	0,9774	0,9830	0,3123	0,1858
0,21	0,9938	0,9751	0,9812	0,3273	0,1952
0,22	0,9932	0,9728	0,9795	0,3423	0,2045
0,23	0,9925	0,9702	0,9775	0,3571	0,2139
0,24	0,9918	0,9675	0,9755	0,3719	0,2233
0,25	0,9912	0,9648	0,9734	0,3866	0,2327
0,26	0,9904	0,9619	0,9712	0,4011	0,2420
0,27	0,9897	0,9590	0,9690	0,4156	0,2515
0,28	0,9889	0,9560	0,9667	0,4300	0,2609
0,29	0,9881	0,9529	0,9644	0,4443	0,2703
0,30	0,9873	0,9496	0,9619	0,4584	0,2797
0,31	0,9864	0,9463	0,9594	0,4724	0,2892
0,32	0,9855	0,9428	0,9567	0,4863	0,2986
0,33	0,9846	0,9393	0,9540	0,5001	0,3081
0,34	0,9836	0,9356	0,9512	0,5137	0,3176
0,35	0,9827	0,9319	0,9484	0,5273	0,3271
0,36	0,9817	0,9281	0,9455	0,5407	0,3366
0,37	0,9806	0,9241	0,9424	0,5539	0,3462
0,38	0,9796	0,9201	0,9393	0,5670	0,3557
0,39	0,9785	0,9159	0,9361	0,5799	0,3653
0,40	0,9773	0,9118	0,9329	0,5928	0,3749
0,41	0,9762	0,9075	0,9296	0,6055	0,3845
0,42	0,9750	0,9030	0,9262	0,6179	0,3941
0,43	0,9738	0,8985	0,9227	0,6303	0,4037
0,44	0,9726	0,8940	0,9192	0,6425	0,4134
0,45	0,9713	0,8893	0,9156	0,6545	0,4230
0,46	0,9700	0,8850	0,9123	0,6666	0,4305
0,47	0,9687	0,8797	0,9081	0,6780	0,4424
0,48	0,9674	0,8749	0,9044	0,6896	0,4522
0,49	0,9960	0,8699	0,9005	0,7609	0,4619
0,50	0,9646	0,8648	0,8966	0,7121	0,4717
0,51	0,9632	0,8596	0,8925	0,7230	0,4815
0,52	0,9617	0,8544	0,8884	0,7339	0,4913
0,53	0,9602	0,8491	0,8843	0,7445	0,5011
0,54	0,9587	0,8436	0,8799	0,7548	0,5110
0,55	0,9572	0,8382	0,8757	0,7651	0,5208
0,56	0,9556	0,8327	0,8714	0,7752	0,5308
0,57	0,9540	0,8271	0,8670	0,7850	0,5407
0,58	0,9524	0,8214	0,8625	0,7946	0,5506
0,59	0,9507	0,8156	0,8579	0,8040	0,5606

Продолжение табл. ПЗ.2

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
0,60	0,9490	0,8098	0,8533	0,8133	0,5706
0,61	0,9473	0,8040	0,8487	0,8224	0,5807
0,62	0,9456	0,7980	0,8439	0,8312	0,5907
0,63	0,9438	0,7921	0,8393	0,8399	0,6008
0,64	0,9420	0,7860	0,8344	0,8483	0,6109
0,65	0,9402	0,7798	0,8294	0,8564	0,6211
0,66	0,9383	0,7737	0,8246	0,8645	0,6313
0,67	0,9364	0,7674	0,8195	0,8722	0,6415
0,68	0,9345	0,7612	0,8145	0,8798	0,6517
0,69	0,9326	0,7548	0,8094	0,8871	0,6620
0,70	0,9306	0,7483	0,8041	0,8941	0,6723
0,71	0,9286	0,7419	0,7989	0,9011	0,6826
0,72	0,9266	0,7354	0,7937	0,9077	0,6930
0,73	0,9245	0,7289	0,7884	0,9143	0,7034
0,74	0,9224	0,7223	0,7830	0,9204	0,7139
0,75	0,9203	0,7157	0,7777	0,9265	0,7243
0,76	0,9182	0,7090	0,7722	0,9322	0,7348
0,77	0,9160	0,7023	0,7666	0,9377	0,7454
0,78	0,9138	0,6955	0,7611	0,9430	0,7561
0,79	0,9116	0,6887	0,7555	0,9481	0,7666
0,80	0,9094	0,6819	0,7499	0,9529	0,7772
0,81	0,9071	0,6750	0,7442	0,9575	0,7880
0,82	0,9048	0,6681	0,7384	0,9618	0,7987
0,83	0,9024	0,6612	0,7326	0,9660	0,8095
0,84	0,9001	0,6542	0,7268	0,9698	0,8203
0,85	0,8977	0,6472	0,7210	0,9735	0,8312
0,86	0,8953	0,6402	0,7151	0,9769	0,8421
0,87	0,8928	0,6332	0,7092	0,9802	0,8531
0,88	0,8903	0,6261	0,7032	0,9830	0,8641
0,89	0,8878	0,6191	0,6973	0,9859	0,8751
0,90	0,8853	0,6120	0,6913	0,9883	0,8862
0,91	0,8827	0,6048	0,6852	0,9904	0,8974
0,92	0,8801	0,5977	0,6791	0,9925	0,9086
0,93	0,8775	0,5906	0,6730	0,9943	0,9198
0,94	0,8749	0,5834	0,6669	0,9957	0,9311
0,95	0,8722	0,5763	0,6608	0,9972	0,9424
0,96	0,8695	0,5691	0,6545	0,9981	0,9538
0,97	0,8667	0,5619	0,6483	0,9989	0,9653
0,98	0,8640	0,5547	0,6420	0,9995	0,9768
0,99	0,8612	0,5476	0,6359	1,0000	0,9884
1,00	0,8584	0,5404	0,6296	1,0000	1,0000

Продолжение табл. ПЗ.2

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,01	0,8555	0,5332	0,6233	1,0000	1,0117
1,02	0,8527	0,5260	0,6169	0,9995	1,0234
1,03	0,8497	0,5188	0,6105	0,9989	1,0352
1,04	0,8468	0,5116	0,6042	0,9981	1,0471
1,05	0,8439	0,5045	0,5979	0,9972	1,0590
1,06	0,8409	0,4973	0,5914	0,9958	1,0710
1,07	0,8379	0,4902	0,5850	0,9944	1,0830
1,08	0,8348	0,4830	0,5786	0,9926	1,0951
1,09	0,8317	0,4759	0,5722	0,9907	1,1073
1,10	0,8286	0,4688	0,5658	0,9886	1,1196
1,11	0,8255	0,4617	0,5593	0,9862	1,1319
1,12	0,8223	0,4546	0,5528	0,9835	1,1443
1,13	0,8192	0,4475	0,5463	0,9806	1,1567
1,14	0,8159	0,4405	0,5399	0,9777	1,1693
1,15	0,8127	0,4335	0,5334	0,9744	1,1819
1,16	0,8094	0,4265	0,5269	0,9709	1,1946
1,17	0,8061	0,4196	0,5205	0,9674	1,2073
1,18	0,8028	0,4126	0,5140	0,9634	1,2202
1,19	0,7994	0,4057	0,5075	0,9593	1,2331
1,20	0,7961	0,3986	0,5007	0,9545	1,2461
1,21	0,7926	0,3920	0,4946	0,9506	1,2592
1,22	0,7892	0,3852	0,4881	0,9459	1,2723
1,23	0,7857	0,3784	0,4816	0,9410	1,2856
1,24	0,7822	0,3716	0,4751	0,9357	1,2990
1,25	0,7787	0,3649	0,4686	0,9305	1,3124
1,26	0,7752	0,3583	0,4622	0,9252	1,3259
1,27	0,7716	0,3516	0,4557	0,9193	1,3396
1,28	0,7680	0,3450	0,4493	0,9135	1,3533
1,29	0,7643	0,3385	0,4429	0,9075	1,3671
1,30	0,7606	0,3320	0,4365	0,9014	1,3820
1,31	0,7570	0,3255	0,4300	0,8949	1,3950
1,32	0,7532	0,3191	0,4236	0,8883	1,4091
1,33	0,7495	0,3128	0,4173	0,8816	1,4234
1,34	0,7457	0,3065	0,4110	0,8749	1,4377
1,35	0,7419	0,3002	0,4046	0,8677	1,4521
1,36	0,7380	0,2940	0,3984	0,8606	1,4667
1,37	0,7342	0,2878	0,3920	0,8531	1,4814
1,38	0,7303	0,2817	0,3857	0,8455	1,4960
1,39	0,7264	0,2757	0,3796	0,8381	14110
1,40	0,7224	0,2697	0,3733	0,8303	1,5290
1,41	0,7184	0,2637	0,3671	0,8221	1,5412

Продолжение табл. ПЗ.2

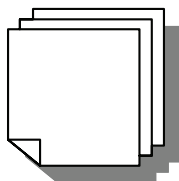
$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,42	0,7144	0,2578	0,3609	0,8140	1,5564
1,43	0,7104	0,2520	0,3548	0,8060	1,5719
1,44	0,7063	0,2463	0,3487	0,7976	1,5875
1,45	0,7022	0,2406	0,3426	0,7891	1,6031
1,46	0,6981	0,2349	0,3365	0,7805	1,6188
1,47	0,6940	0,2294	0,3305	0,7718	1,6349
1,48	0,6898	0,2238	0,3245	0,7629	1,6510
1,49	0,6856	0,2184	0,3186	0,7540	1,6672
1,50	0,6813	0,2138	0,3126	0,7449	1,6836
1,51	0,6771	0,2077	0,3067	0,7357	1,7002
1,52	0,6728	0,2024	0,3009	0,7265	1,7169
1,53	0,6685	0,1973	0,2951	0,7172	1,7338
1,54	0,6641	0,1921	0,2893	0,7077	1,7508
1,55	0,6597	0,1871	0,2836	0,6982	1,7680
1,56	0,6553	0,1821	0,2779	0,6886	1,7854
1,57	0,6509	0,1772	0,2722	0,6789	1,8029
1,58	0,6464	0,1723	0,2666	0,6691	1,8207
1,49	0,6420	0,1678	0,2610	0,6593	1,8386
1,60	0,6374	0,1628	0,2554	0,6492	1,8567
1,61	0,6329	0,1582	0,2500	0,6394	1,8750
1,62	0,6283	0,1537	0,2446	0,6294	1,8935
1,63	0,6237	0,1492	0,2392	0,6193	1,9122
1,64	0,6191	0,1448	0,2338	0,6092	1,9311
1,65	0,6144	0,1404	0,2286	0,5991	1,9503
1,66	0,6097	0,1362	0,2233	0,5889	1,9696
1,67	0,6050	0,1320	0,2181	0,5786	1,9892
1,68	0,6003	0,1278	0,2130	0,5684	2,0089
1,69	0,5955	0,1238	0,2079	0,5581	2,0290
1,70	0,5907	0,1198	0,2029	0,5478	2,0493
1,71	0,5859	0,1159	0,1979	0,5374	2,0698
1,72	0,5810	0,1121	0,1929	0,5271	2,0906
1,73	0,5761	0,1083	0,1881	0,5168	2,1112
1,74	0,5712	0,1047	0,1833	0,5065	2,1330
1,75	0,5663	0,1011	0,1785	0,4961	2,1546
1,76	0,5613	0,0975	0,1738	0,4858	2,1765
1,77	0,5563	0,0941	0,1691	0,4755	2,1987
1,78	0,5513	0,0907	0,1645	0,4652	2,2211
1,79	0,5462	0,0874	0,1620	0,4550	2,2439
1,80	0,5411	0,0842	0,1555	0,4447	2,2670
1,81	0,5360	0,0810	0,1511	0,4345	2,2905
1,82	0,5309	0,0779	0,1468	0,4243	2,3143

Продолжение табл. ПЗ.2

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
1,83	0,5257	0,0749	0,1425	0,4142	2,3384
1,84	0,5205	0,0720	0,1383	0,4041	2,3629
1,85	0,5153	0,0691	0,1341	0,3927	2,3877
1,86	0,5100	0,0663	0,1300	0,3841	2,4130
1,87	0,5047	0,0636	0,1260	0,3741	2,4386
1,88	0,4994	0,0609	0,1220	0,3643	2,4647
1,89	0,4941	0,0583	0,1181	0,3545	2,4911
1,90	0,4887	0,0558	0,1142	0,3447	2,5180
1,91	0,4833	0,0534	0,1105	0,3351	2,5454
1,92	0,4779	0,0510	0,1067	0,3256	2,5731
1,93	0,4724	0,0487	0,1031	0,3161	2,6015
1,94	0,4670	0,0465	0,0995	0,3064	2,6302
1,95	0,4615	0,0443	0,0960	0,2973	2,6596
1,96	0,4559	0,0422	0,0925	0,2881	2,6894
1,97	0,4504	0,0402	0,0892	0,2790	2,7198
1,98	0,4448	0,0382	0,0858	0,2700	2,7507
1,99	0,4391	0,0363	0,0826	0,2611	2,7822
2,00	0,4335	0,0344	0,0794	0,2523	2,8143
2,01	0,4279	0,0326	0,0763	0,2436	2,8471
2,02	0,4221	0,0309	0,0733	0,2351	2,8806
2,03	0,4164	0,0293	0,0703	0,2267	2,9147
2,04	0,4106	0,0277	0,0674	0,2183	2,9496
2,05	0,4048	0,0261	0,0645	0,2101	2,9852
2,06	0,3990	0,0247	0,0618	0,2022	3,0215
2,07	0,3931	0,0232	0,0591	0,1942	3,0587
2,08	0,3873	0,0219	0,0564	0,1864	3,0967
2,09	0,3814	0,0205	0,0539	0,1788	3,1356
2,10	0,3754	0,0193	0,0514	0,1713	3,1754
2,11	0,3695	0,0181	0,0489	0,1640	3,2162
2,12	0,3635	0,0169	0,0466	0,1569	3,2579
2,13	0,3574	0,0158	0,0443	0,1500	3,3007
2,14	0,3514	0,0148	0,0420	0,1429	3,3446
2,15	0,3453	0,0138	0,0399	0,1362	3,3897
2,16	0,3392	0,0128	0,0378	0,1296	3,4360
2,17	0,3331	0,0119	0,0357	0,1232	3,4836
2,18	0,3269	0,0110	0,0338	0,1170	3,5324
2,19	0,3207	0,0102	0,0319	0,1109	3,5828
2,20	0,3145	0,0094	0,0300	0,1050	3,6344
2,21	0,3083	0,0087	0,0282	0,0993	3,6877
2,22	0,3020	0,0080	0,0266	0,0937	3,7428
2,23	0,2957	0,0075	0,0249	0,0883	3,7995
2,24	0,2894	0,0068	0,0233	0,0830	3,8579

Окончание табл. ПЗ.2

$\lambda$	$\tau$	$\pi$	$\varepsilon$	$q$	$M$
2,25	0,2830	0,00620	0,0218	0,0780	3,9185
2,26	0,2766	0,00560	0,0204	0,0731	3,9811
2,27	0,2702	0,00512	0,0190	0,0684	4,0458
2,28	0,2638	0,00465	0,0176	0,0638	4,1131
2,29	0,2573	0,00421	0,0163	0,0595	4,1828
2,30	0,2508	0,00379	0,0151	0,0553	4,2551
2,31	0,2443	0,00341	0,0140	0,0512	4,3304
2,32	0,2377	0,00306	0,0129	0,0474	4,4086
2,33	0,2311	0,00273	0,0118	0,0437	4,4903
2,34	0,2245	0,00243	0,0108	0,0402	4,5756
2,35	0,2179	0,00215	0,0099	0,0369	4,6647
2,36	0,2112	0,00190	0,0090	0,0337	4,7578
2,37	0,2045	0,00167	0,0081	0,0307	4,8557
2,38	0,1978	0,00146	0,0074	0,0278	4,9586
2,39	0,1910	0,00127	0,0066	0,0252	5,0665
2,40	0,184	0,00109	0,0059	0,0226	5,1807
2,41	0,1774	0,00095	0,0053	0,0205	5,3011
2,42	0,1706	0,00080	0,0047	0,0181	5,4288
2,43	0,1637	0,00068	0,0041	0,0160	5,5645
2,44	0,1568	0,00057	0,0036	0,0141	5,7089
2,45	0,1499	0,00048	0,0032	0,0124	5,8630
2,46	0,1429	0,00039	0,0027	0,0108	6,0288
2,47	0,1359	0,00032	0,0024	0,0093	6,2067
2,48	0,1289	0,00026	0,0020	0,0079	6,3990
2,49	0,1219	0,00021	0,0017	0,0067	6,6079
2,50	0,1148	0,000163	0,001420	0,00503	6,8355
2,51	0,1077	0,000126	0,001169	0,00466	7,0851
2,52	0,1006	$0,955 \cdot 10^{-4}$	0,000949	0,00380	7,3614
2,53	0,0934	$0,710 \cdot 10^{-4}$	0,000759	0,00305	7,6681
2,54	0,0863	$0,514 \cdot 10^{-4}$	0,000596	0,00240	8,0125
2,55	0,0791	$0,362 \cdot 10^{-4}$	0,000457	0,00185	8,4028
2,56	0,0718	$0,240 \cdot 10^{-4}$	0,000342	0,00139	8,8506
2,57	0,0646	$0,160 \cdot 10^{-4}$	0,000248	0,00101	9,3716
2,58	0,0573	$0,986 \cdot 10^{-5}$	0,000172	0,00070	9,9892
2,59	0,0499	$0,568 \cdot 10^{-5}$	0,000114	0,00047	10,7387
2,60	0,0426	$0,299 \cdot 10^{-5}$	$0,702 \cdot 10^{-4}$	0,00029	11,6736
2,61	0,0352	$0,139 \cdot 10^{-5}$	$0,394 \cdot 10^{-4}$	0,00016	12,8883
2,62	0,0278	$0,536 \cdot 10^{-6}$	$0,193 \cdot 10^{-4}$	$0,802 \cdot 10^{-4}$	14,5579
2,63	0,0204	$0,153 \cdot 10^{-6}$	$0,750 \cdot 10^{-5}$	$0,313 \cdot 10^{-4}$	17,0777
2,64	0,0129	$0,243 \cdot 10^{-7}$	$0,188 \cdot 10^{-5}$	$0,782 \cdot 10^{-5}$	21,5366
2,65	0,0054	$0,728 \cdot 10^{-9}$	$0,135 \cdot 10^{-6}$	$0,567 \cdot 10^{-5}$	33,3991
2,657	0	0	0	0	$\infty$

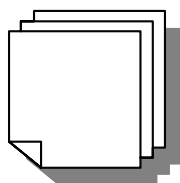


## ЛИТЕРАТУРА

1. Альтшуль, А. Д. Гидравлика и аэродинамика: основы механики жидкости / А. Д. Альтшуль, П. Г. Киселев. – М.: Наука, 1975.
2. Альтшуль, А. Д. Гидравлические сопротивления / А. Д. Альтшуль. – М.: Недра, 1970.
3. Андрижиевский, А. А. Основы гидрогазодинамики. Практикум: учеб. пособие / А. А. Андрижиевский, П. М. Клепацкий, Е. С. Санкович; под ред. А. А. Андрижиевского. – Минск: БГТУ, 2007.
4. Бэтчелор, Дж. Введение в динамику жидкости / Дж. Бэтчелор, пер. с англ. – М.: Наука, 1973.
5. Варгафтик, Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей / Н. Б. Варгафтик. – М.: Наука, 1972.
6. Давидсон, В. Б. Основы газовой динамики в задачах / В. Б. Давидсон. – М.: Высшая школа, 1965.
7. Дейч, М. Е. Газодинамика двухфазных сред / М. Е. Дейч, Г. А. Филиппов. – М.: Энергия, 1981.
8. Дейч, М. Е. Гидрогазодинамика / М. Е. Дейч, А. Е. Зарянкин. – М.: Энергоатомиздат, 1984.
9. Дешш, Дж. Механика жидкости / Дж. Дешш, Д. Харлеман. – М.: Энергия, 1971.
10. Гусаков, Н. А. Механика жидкости и газа: учеб. пособие / Н. А. Гусаков. – М.: Наука, 1996.
11. Емцев, Б. Т. Техническая гидромеханика / Б. Т. Емцев. – М.: Наука, 1987.
12. Идельчик, И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям / И. Е. Идельчик. – М.: Наука, 1975.
13. Ильина, Т. К. Основы гидравлического расчета инженерных сетей / Т. К. Ильина. – М.: Ассоциация строительных вузов, 2005.
14. Кочин, Н. Е. Теоретическая гидромеханика: в 2 ч. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. – 6-е изд. – М.: Наука, 1963. – Ч. 1.
15. Курант, Р. Сверхзвуковые течения и ударные волны / Р. Курант, К. Фридрихс. – М.: Наука, 1950.



16. Ландау, Л. Д. Теоретическая физика: в 10 т. / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – 6-е изд. – М.: Наука, 2006. – Т. 6.: Гидродинамика.
17. Лаврентьев, М. А. Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – 2-е изд. – М.: Наука, 1977.
18. Леонтьев, А. И. Газовая динамика. Механика жидкости и газа: учеб. пособие / А. И. Леонтьев. – М.: Наука, 1997.
19. Леонтьев, Н. Е. Основы теории фильтрации / Н. Е. Леонтьев. – М.: ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2009.
20. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа / Л. Г. Лойцянский. – 6-е изд. – М.: Наука, 1987.
21. Овсянников, Л. В. Лекции по основам газовой динамики. / Л. В. Овсянников. – М.: Институт компьютерных исследований, 2003.
22. Прандтль, Л. Гидро- и аэромеханика: в 2 т. / Л. Прандтль, Л. Титъенс. – М.; Л.: Наука, 1933. – 2 т.
23. Повх, И. Л. Техническая гидромеханика / И. Л. Повх. – М.: Наука, 1976.
24. Примеры расчетов по гидравлике: учеб. пособие для вузов / под редакцией А. Д. Альтшуля. – М.: Стройиздат, 1976.
25. Ривкин, С. Л. Теплофизические свойства воды и водяного пара / С. Л. Ривкин, А. А. Александров. – М.: Энергия, 1980.
26. Седов, Л. И. Механика сплошной среды: в 2 т. / Л. И. Седов. – 4-е изд. – М.: Наука, 1984. – 2 т.
27. Седов, Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики / Л. И. Седов. – М.: Наука, 1980.
28. Сена, Л. А. Единицы физических величин и их размерности: учеб.-справ. рук. / Л. А. Сена. – М.: Наука, 1988.
29. Серрин, Дж. Математические основы классической механики жидкости / Дж. Серрин. – М.: Наука, 1963.
30. Сборник задач по гидравлике и газовой динамике для нефтяных вузов / под ред. Г. Д. Розенберга. – М.: Недра, 1990.
31. Фабрикант, Н. Я. Аэродинамика / Н. Я. Фабрикант. – М.: Наука, 1964.
32. Шлихтинг, Г. Теория пограничного слоя / Г. Шлихтинг. – М.: Наука, 1974.
33. Чжен, П. Отрывные течения / П. Чжен. – М.: Мир, 1972.



# ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ .....	3
ВВЕДЕНИЕ .....	4
Контрольные вопросы по разделу .....	14
1. СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ГАЗА .....	15
1.1. Свойства жидкостей (общие) .....	15
1.2. Плотность и удельный вес .....	18
1.3. Сжимаемость и температурное расширение .....	20
1.4. Вязкость .....	24
1.5. Поверхностное натяжение .....	27
1.6. Смачивание, капиллярный эффект .....	31
Контрольные вопросы по разделу .....	40
2. РАВНОВЕСИЕ ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....	42
2.1. Условия равновесия .....	42
2.2. Основное дифференциальное уравнение равновесия .....	52
2.3. Сила статического давления жидкости на плоскую стенку .....	55
2.4. Сила статического давления жидкости на криволинейные стенки. Закон Архимеда .....	62
2.5. Относительное равновесие жидкости .....	66
Контрольные вопросы по разделу .....	74
3. КИНЕМАТИКА И ДИНАМИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....	76
3.1. Основные понятия кинематики жидкости и газа .....	76
3.2. Уравнение неразрывности .....	80
3.3. Уравнение движения .....	84
3.4. Гидромеханическое подобие потоков вязких жидкостей .....	92
3.5. Вихревые и потенциальные течения .....	98
3.6. Природа турбулентности .....	103
3.7. Уравнение Бернулли .....	110
3.8. Относительное движение жидкости и твердого тела ....	118
3.9. Гидравлический расчет трубопроводных систем .....	126
3.10. Течение жидкостей и газов в пористых средах .....	136
Контрольные вопросы по разделу .....	144

---

4. ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА .....	147
4.1. Звуковые колебания .....	147
4.2. Относительное движение газа и твердых тел со сверхзвуковыми скоростями .....	154
4.3. Ударная волна .....	161
Контрольные вопросы по разделу .....	171
ПРИЛОЖЕНИЕ 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ МЕХАНИКИ ЖИДКОСТИ И ГАЗА .....	173
ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ И ПЕРЕНОСНЫЕ СВОЙСТВА ВЕЩЕСТВ .....	178
ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ТАБЛИЦЫ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ .....	187
Таблицы газодинамических функций двухатомных газов ( $k = 1,4$ ) .....	187
Таблицы газодинамических функций двухатомных газов ( $k = 1,33$ ) .....	193
ЛИТЕРАТУРА .....	200

Учебное издание

**Андрижиевский Анатолий Альгертович**

# **МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА**

Учебное пособие

Редактор *Ю. А. Юрчик*  
Компьютерная верстка *Е. В. Ильченко*  
Корректор *Ю. А. Юрчик*

Подписано в печать 14.05.2014. Формат 60×84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>.  
Бумага офсетная. Гарнитура Таймс. Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 11,9. Уч.-изд. л. 12,0.  
Тираж 70 экз. Заказ .

Издатель и полиграфическое исполнение:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
Свидетельство о государственной регистрации издателя,  
изготовителя, распространителя печатных изданий  
№ 1/227 от 20.03.2014.  
ЛП № 02330/12 от 30.12.2013.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.