

Учреждение образования  
«БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

**Кафедра теоретической механики**

# **ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН**

**Методические указания к выполнению  
лабораторных работ для студентов  
специальностей 1-36 05 01 «Машины и оборудование  
лесного комплекса», 1-36 07 01 «Машины и аппараты  
химических производств и предприятий строительных  
материалов»**

Минск 2013

УДК 621.(075.8)

ББК 34.41я73

Т33

Рассмотрены и рекомендованы редакционно-издательским советом университета

Составители:

*С. А. Борисевич, Д. В. Гапанюк, Р. Н. Ласовский*

Рецензент

кандидат физико-математических наук,  
старший преподаватель кафедры  
механики материалов и конструкций БГТУ

*А. В. Ширко*

По тематическому плану изданий учебно-методической литературы университета на 2012 год. Поз. 93.

Предназначены для студентов специальностей 1-36 05 01 «Машины и оборудование лесного комплекса», 1-36 07 01 «Машины и аппараты химических производств и предприятий строительных материалов» заочной и очной форм обучения.

© УО «Белорусский государственный  
технологический университет», 2013

# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	4
Лабораторная работа № 1. Структурный анализ плоских механизмов.....	5
Лабораторная работа № 2. Изготовление зубчатых колес методом огибания инструментальной рейкой .....	16
Лабораторная работа № 3. Определение момента инерции твердого тела методом физического маятника.....	29
Лабораторная работа № 4. Определение коэффициента полезного действия винтового механизма (винтовой пары) .....	34
Лабораторная работа № 5. Исследование кулачкового механизма .....	40
Лабораторная работа № 6. Уравновешивание вращающегося звена с известным расположением неуравновешенных масс.....	49
Лабораторная работа № 7. Определение коэффициента трения скольжения и покоя.....	63
Приложение 1. Условные обозначения для кинетических схем механизмов.....	68
Приложение 2. Значение $\text{inv } \alpha_w$ .....	72
Приложение 3. Метод хорд.....	74

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Теория механизмов и машин» занимает важное место в цикле общетехнических дисциплин. Успешное усвоение этого курса во многом зависит от качества выполнения лабораторных работ. В лаборатории студент знакомится с работой типовых механизмов на реальных машинах или на моделях, вникает в физическую сущность происходящих при их работе явлений, учится применять теоретические знания на практике при решении конкретных технических задач, знакомится с методами измерения геометрических, кинематических, динамических параметров машин и получает навыки самостоятельной работы с простейшими измерительными приборами.

Темы лабораторных работ учитывают специфику специальностей, для которых они разработаны. Пособие содержит семь тем:

1. Структурный анализ плоских механизмов.
2. Изготовление зубчатых колес методом огибания инструментальной рейкой.
3. Определение момента инерции твердого тела методом физического маятника.
4. Определение коэффициента полезного действия винтового механизма (винтовой пары).
5. Исследование кулачкового механизма.
6. Уравновешивание вращающегося звена с известным расположением неуравновешенных масс.
7. Определение коэффициента трения скольжения и покоя.

В каждой теме кратко излагается теория и дается описание лабораторных работ, в руководствах к которым приводятся конструкции установок и приборов и методика выполнения работ. В конце каждой темы помещены контрольные вопросы для самопроверки и контроля знаний студентов.

# Лабораторная работа № 1

## СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ

### *Общие положения*

Приступая к анализу (исследованию) существующего или к синтезу (проектированию) нового механизма, необходимо, прежде всего, разобраться в его структуре, т. е. подсчитать число подвижных звеньев, определить характер их соединения, уяснить метод образования механизма и четко представить схему передачи движения от ведущего звена к ведомым.

Механизм представляет собой искусственно созданную систему тел, предназначенную для преобразования движения одного или нескольких тел в требуемые движения других тел.

Механизм состоит из различных деталей, которые образуют жесткие соединения или соединяются между собой подвижно. Отдельная деталь или несколько жестко соединенных деталей называются звеном механизма. Соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой. Кинематические пары (кп) делятся на пять классов ( $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5$ ). Номер класса пары определяется числом условий связи, налагаемых на движение одного звена пары относительно другого. Следовательно, пара 1-го класса является пятиподвижной, пара 2-го класса – четырехподвижной и т. д.

Поверхности, линии или точки звена, по которым оно может соприкаться с другим звеном, образуя кинематическую пару, называются элементами звена.

Кинематические пары делятся на высшие и низшие. В высших парах звенья соприкасаются по линии или в точках, а в низших – по поверхностям.

Связанная система звеньев, образующих между собой кинематические пары, называется кинематической цепью.

Механизм, у которого все точки подвижных звеньев могут двигаться в одной или параллельных плоскостях, называется плоским. В плоских механизмах могут быть кинематические пары только 4-го и 5-го классов ( $p_4, p_5$ ). Все плоские пары 4-го класса являются высшими, а пары 5-го класса обычно относятся к низшим (вращательные и поступательные).

Плоский механизм называется рычажным, если его звенья образуют только низшие кинематические пары.

### *Составление структурной схемы механизмов*

Синтез и анализ механизма начинается с составления его схемы, которая представляет собой графическое изображение этого механизма с условными обозначениями звеньев и кинематических пар. Схемы механизмов могут быть структурными и кинематическими. В структурной схеме размеры не указываются. Составление ее нужно в первую очередь для проведения структурного анализа механизма. В кинематической схеме указываются размеры, необходимые для кинематического анализа, силового расчета механизма и дальнейшей разработки его конструкции.

Условные обозначения элементов машин и механизмов установлены ГОСТ 2.770–68. Наиболее распространенные обозначения кинематических пар, звеньев и механизмов приведены в прил. 1.

При изображении звеньев на схеме не учитывают их конструктивную форму, а отмечают только положения кинематических пар и геометрические особенности звеньев. Так, например, при изображении на схеме шатуна не нужно вычерчивать все детали, из которых он состоит, а важно отметить только положения осей втулок и жесткую связь между ними (рис. 1.1).

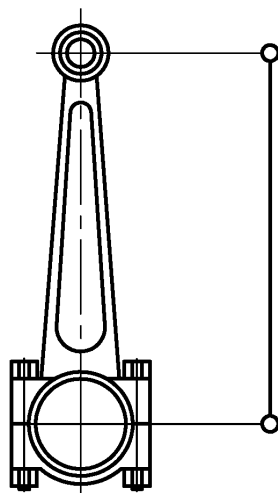


Рис. 1.1. Шатун и его условное изображение на кинематической схеме

Ведущее звено обозначается на схеме стрелкой. Оно обычно входит в кинематическую пару с неподвижным звеном – стойкой. На ки-

нематической схеме стойка обозначается цифрой «0», а ведущее звено цифрой «1». В качестве примера на рис. 1.2 показан конструктивный чертеж механизма двигателя с компрессором и соответствующая ему структурная схема.

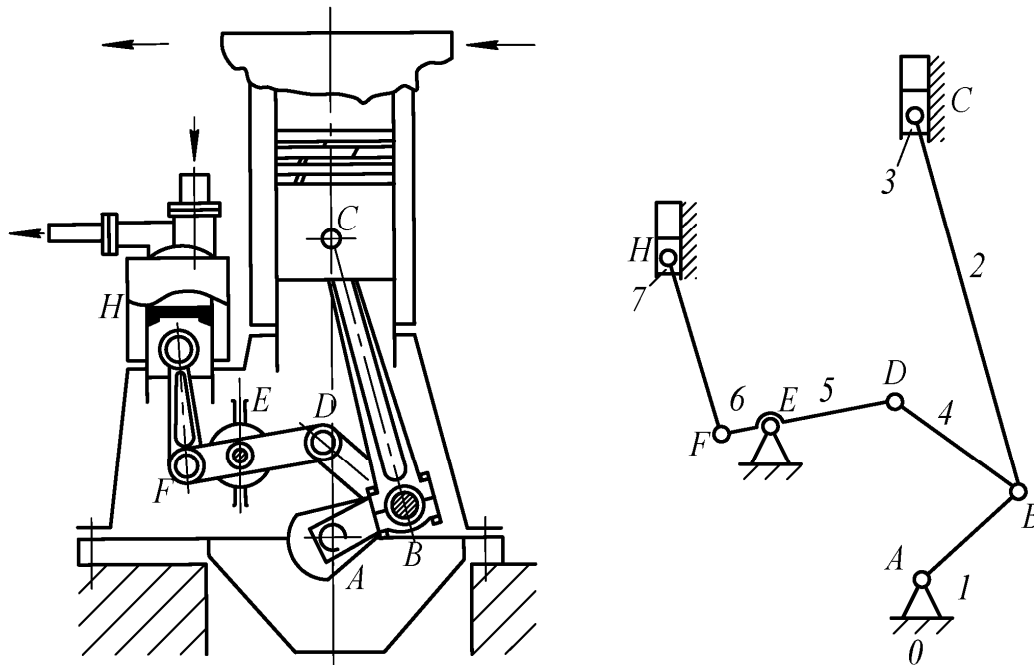


Рис. 1.2. Механизм двигателя с компрессором и его кинематическая схема

### ***Структурный анализ механизмов***

Структурный анализ механизма, т. е. изучение его строения, включает решение следующих задач:

- а) определение степени подвижности механизма;
- б) разложение механизма на структурные группы (группы Ассура);
- в) определение класса механизма и составление формулы его строения.

Степень свободы (степень подвижности)  $W$  механизма показывает число степеней свободы (число возможных независимых движений) его звеньев относительно стойки. Плоский механизм обладает определенностью движения в том случае, если число ведущих звеньев равно числу степеней подвижности. В плоских механизмах степень подвижности определяется по формуле Чебышева:

$$W = 3n - 2p_5 - p_4,$$

где  $n$  – число подвижных звеньев механизма;  $p_5$  – число кинематических пар 5-го класса (низших пар);  $p_4$  – число пар 4-го класса (высших пар).

В тех случаях когда в механизме сложные шарниры соединяют более двух звеньев (рис. 1.3), в каждом из них необходимо учитывать несколько одноподвижных пар, число которых определяется как разность  $k - 1$ , где  $k$  – число звеньев, соединенных сложным шарниром.

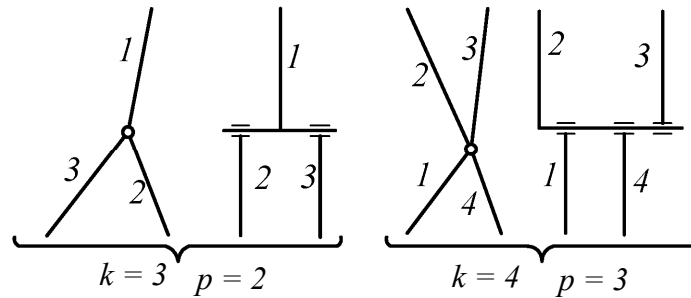


Рис. 1.3. Кинематические схемы сложных шарниров

Иногда в реальных механизмах встречаются такие звенья и пары, которые создают или пассивные связи, или лишние степени свободы (тогда  $W$  не совпадает с числом ведущих звеньев), но не влияют на движение остальных звеньев механизма. Такие звенья и пары нужно предварительно удалить из схемы механизма и не учитывать их при структурном анализе.

Структурная классификация плоских рычажных механизмов основана на работах Л. В. Ассура и И. И. Артоболевского и заключается в том, что любой механизм может быть образован из механизма 1-го класса, представляющего собой ведущее звено со стойкой, и присоединенных к нему структурных групп (групп Ассура).

Группой Ассура называется такая кинематическая цепь, которая после присоединения свободными элементами звеньев к стойке имеет нулевую степень подвижности. После присоединения группы к звеньям механизма степень подвижности этого механизма не изменится. В плоских рычажных механизмах все пары одноподвижные ( $p_4 = 0$ ). Поэтому по определению группы

$$W_{\text{гр}} = 3n - 2p_5 = 0.$$

Так как  $n$  и  $p_5$  – целые числа, то структурная группа должна состоять из четного числа звеньев  $n$ , а число пар должно быть кратно трем:



$$p_5 = \frac{3}{2}n.$$

Например, при  $n = 2$   $p_5 = 3$ ; при  $n = 4$   $p_5 = 6$  и т. д.

Согласно классификации, структурные группы делятся на классы: II, III, IV и т. д. В группах II класса  $n = 2$ ,  $p_5 = 3$  и каждое звено входит только в две пары. В группах III класса есть звенья, входящие в три пары, а в группах IV класса и выше есть замкнутые контуры, состоящие из четырех и большего числа звеньев, совпадающего с номером класса (таблица).

Порядок группы определяется числом элементов, которыми группа присоединяется к механизму. Очевидно, все группы II класса имеют второй порядок. Группы II класса делятся на виды в зависимости от сочетания и взаимного расположения вращательных и поступательных пар (таблица).

Класс механизма определяется высшим классом группы Ассура, входящей в его состав. Главной особенностью структурной классификации является то, что все группы одного класса имеют единые методы кинематического и силового анализа.


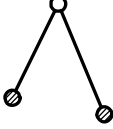
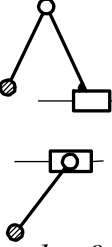
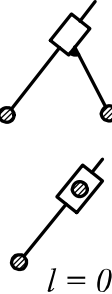
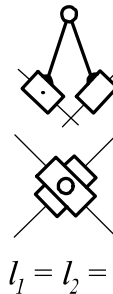
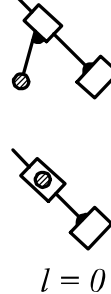
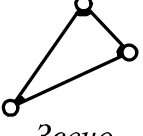
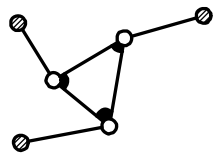
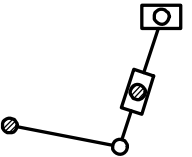
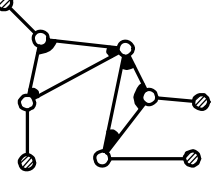
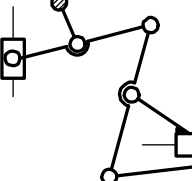
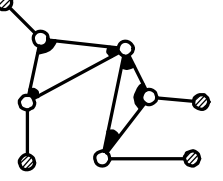
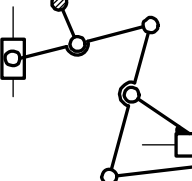
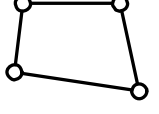

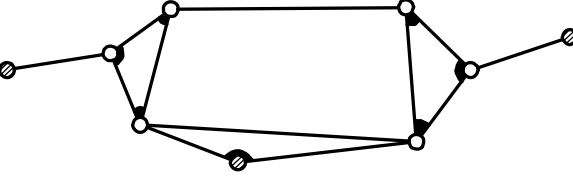
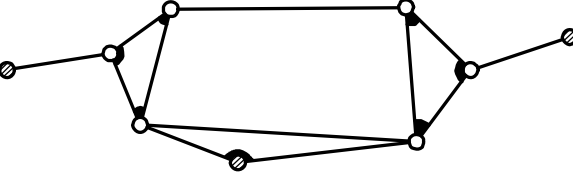
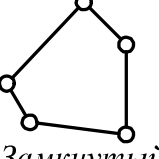
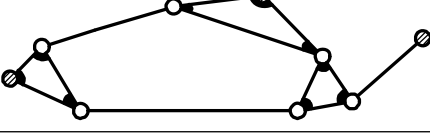
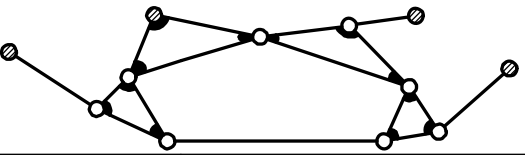
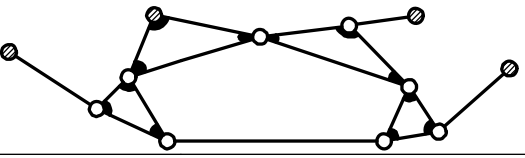
Разложение механизма на структурные группы следует начинать с отсоединения наиболее удаленной от ведущего звена группы, состоящей из двух звеньев и трех пар, т. е. группы II класса. Если это не удастся, то надо попытаться отделить группу более высокого класса. После отделения первой группы надо попытаться отделить группу II класса и так до тех пор, пока не останется механизм I класса.

Структурный анализ заканчивается определением класса механизма и составлением формулы строения механизма, на основании которой можно наметить метод и порядок дальнейшего кинематического и силового расчета.

При разложении механизма на структурные группы следует иметь в виду, что класс механизма может изменяться в зависимости от выбора ведущего звена.

В плоских механизмах могут быть звенья, входящие не только в низшие, но и в высшие пары. При изучении структуры этих механизмов можно условно заменить каждую высшую пару добавочным звеном, входящим в две низшие пары. После такой замены степень подвижности механизма не должна изменяться. Мгновенные относительные движения звеньев тоже должны сохраняться. Замену высших пар производят следующим образом.

### Кинематические схемы групп Ассура

Класс	Признак	Схемы групп Ассура					Порядок
$\bar{\text{II}}$	 $n = 2, p = 3$	 1	 $l = 0$ 2	 $l = 0$ 3	 $l_1 = l_2 = 0$ 4	 $l = 0$ 5	2-й
		<i>Виды групп</i>					
$\bar{\text{III}}$	 Звено, входящее в 3 пары в 3 пары	 3-й	 4-й	 4-й	 4-й	3-й	
		 4-й	 4-й	4-й			
$\bar{\text{IV}}$	 Замкнутый контур из 4 звеньев	 2-й	 3-й	2-й			
		 3-й	3-й				
$\bar{\text{V}}$ и более	 Замкнутый контур из 5 звеньев и более	 3-й	 4-й	3-й			
		 4-й	4-й				

Через точку соприкосновения звеньев  $1$  и  $2$  проводится нормаль  $n-n$  к криволинейным элементам (рис. 1.4). На этой нормали в центрах кривизны  $O_1$  и  $O_2$  соприкасающихся кривых помещаются шарниры, которые соединяются условным звеном  $3$ . Если один из соприкасающихся элементов представляет собой прямую, то центр кривизны его будет бесконечно удален и вращательная пара переходит в поступательную.

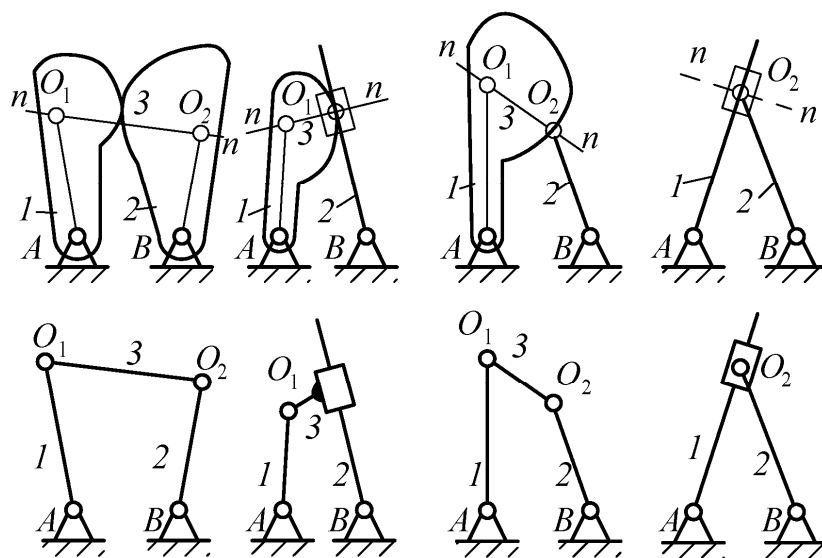


Рис. 1.4. Примеры замены высших кинематических пар на низшие

### *Примеры на составление кинематических схем и структурный анализ механизмов*

**Пример 1.** Произвести структурный анализ механизма двигателя с компрессором (рис. 1.5, а).

В этом механизме вращательное движение коленчатого вала (кривошипа)  $AB$  преобразуется в возвратно-поступательное движение поршня  $C$  двигателя и поршня  $H$  компрессора. Ведущее звено – кривошип обозначаем круговой стрелкой, показывающей направление его вращения. Все неподвижные детали, образующие одно неподвижное звено – стойку, – цифрой  $0$ . Цифрой  $1$  обозначаем кривошип,  $2$  – шатун,  $3$  – ползун,  $4$  – шатун,  $5$  – коромысло,  $6$  – шатун,  $7$  – ползун. Кинематические пары обозначаем буквами. Замечаем, что шарнир  $B$  – сложный. Он соединяет три звена. Значит, в этом шарнире число вращательных пар равно двум:

$$k - 1 = 3 - 1 = 2,$$

а именно,  $B(1, 2)$  и  $B(1, 4)$ . Здесь в скобках указаны номера звеньев, образующих кинематическую пару. Парты  $A(0, 1)$ ,  $B(1, 2)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(2, 3)$ ,  $D(4, 5)$ ,  $E(0, 5)$ ,  $F(5, 6)$ ,  $H(6, 7)$  – вращательные, а парты  $C(0, 3)$  и  $H(0, 7)$  – поступательные. Высших пар в этом механизме нет.

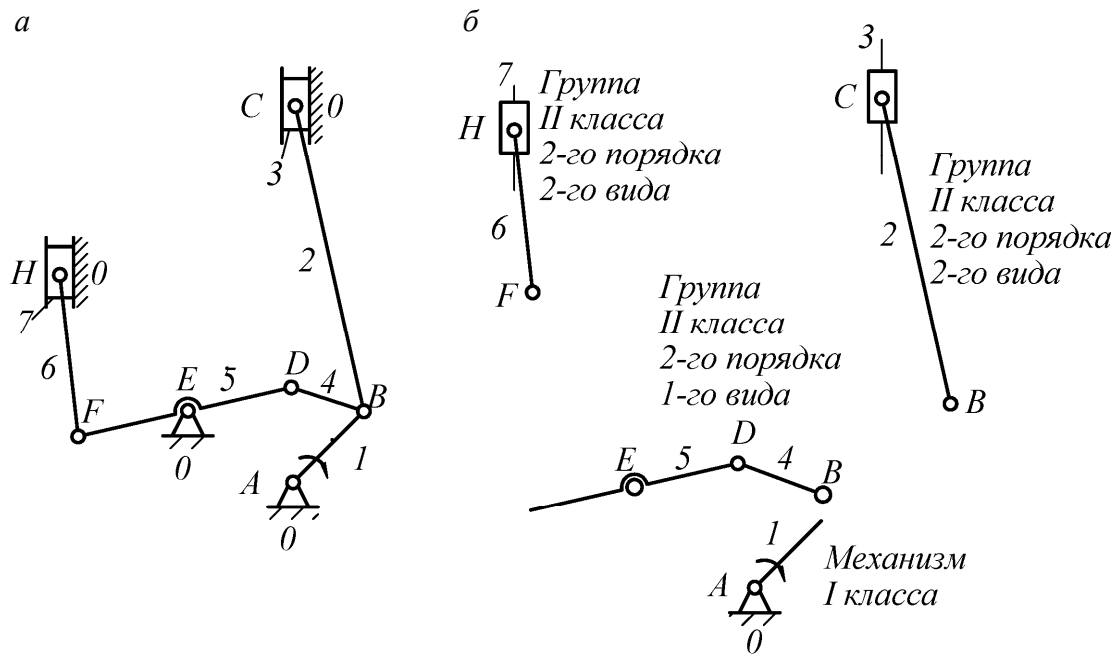


Рис. 1.5. Кинематическая схема механизма (а) и его структурный анализ (б)

Определяем число степеней подвижности механизма по формуле Чебышева:

$$W = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 10 - 0 = 1.$$

Так как движение задано одному звену и степень подвижности  $W$  тоже равна единице, то данный механизм обладает определенностью движения.

При разложении механизма на структурные группы (рис. 1.5, б) выясняется, что на механизм I класса последовательно наслаивались группы (4, 5) и (6, 7). Независимо от них к механизму I класса присоединена еще одна группа – (2, 3). Все эти группы Ассур относятся ко II классу. Поэтому рассматриваемый механизм тоже относится ко II классу.

Записываем формулу строения механизма, показывающую, из каких структурных групп он состоит и в какой последовательности они соединяются:

$$\begin{aligned}
 & I(0, 1) \rightarrow II(4, 5) \rightarrow II(6, 7) \\
 & \downarrow \\
 & II(2, 3)
 \end{aligned}$$

В формуле строения римские цифры обозначают классы групп Ассур (цифра I обозначает механизм I класса), а стрелки показывают на порядок присоединения групп Ассур к механизму I класса.

**Пример 2.** На рис. 1.6, *a* изображена схема кулачкового механизма, в котором вращательное движение кулачка 1 (он является ведущим звеном) преобразуется в сложное движение толкателя 3 и в качательное движение коромысел 4 и 5. Число  $n$  подвижных звеньев здесь равно пяти, число  $p_5$  низших (вращательных) пар равно шести, число  $p_4$  высших пар равно единице (высшую пару  $B$  образуют кулачок 1 и ролик 2).

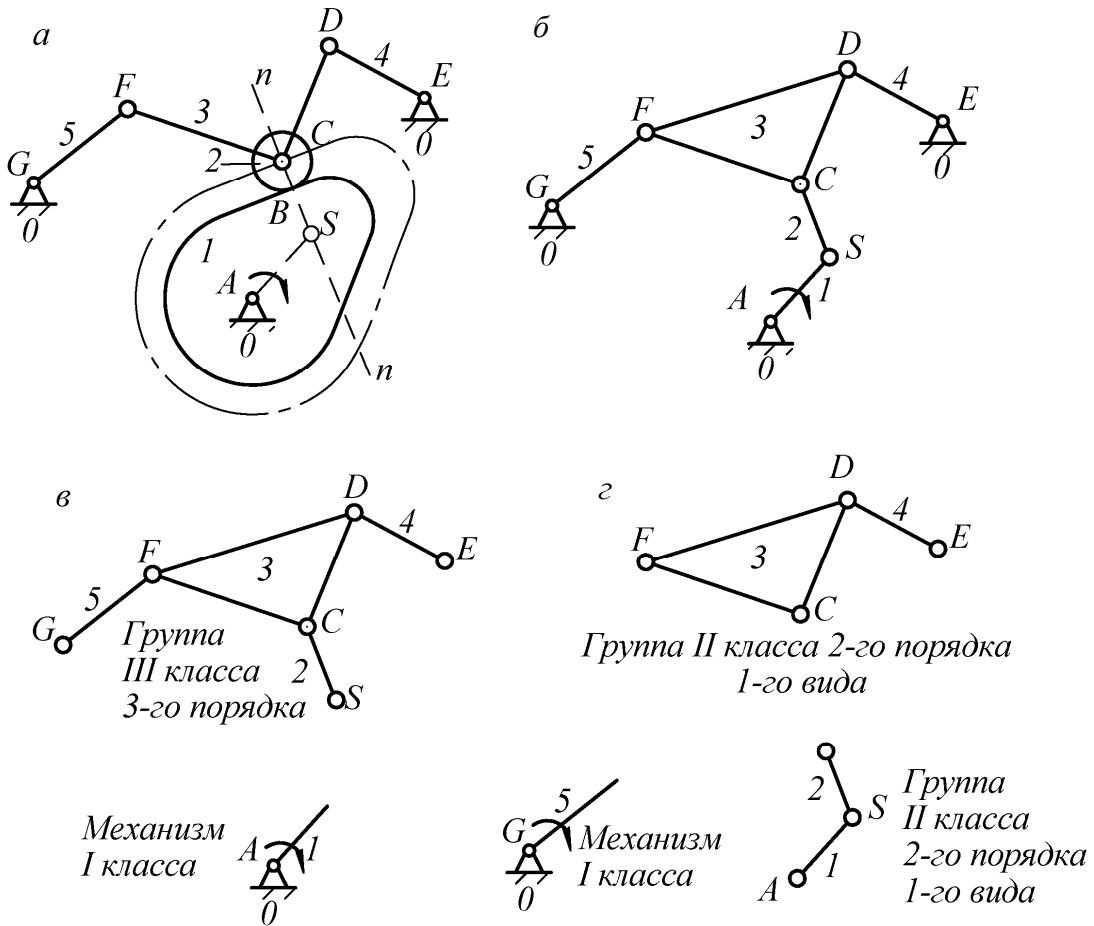


Рис. 1.6. Кинематическая схема механизма (*a*), «заменяющего» механизма (*б*), его структурный анализ при ведущем звене 1 (*в*) и ведущем звене 5 (*г*)

Степень подвижности механизма равна двум:

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 6 - 1 = 2.$$

В данном случае имеется одна лишняя степень свободы – возможность круглого ролика 2 поворачиваться вокруг оси  $C$ , не вызывая движений остальных звеньев. Ролик введен из конструктивных соображений для замены трения скольжения кулачка 1 по толкателю 3 трением качения. При изучении структуры и кинематики механизма ролик можно не учитывать. Кинематика механизма не изменится, если профиль кулачка увеличить на величину радиуса ролика (увеличенный профиль показан на чертеже штрихпунктирной линией), а ролик удалить. Тогда толкатель 3 будет непосредственно соприкасаться с увеличенным профилем кулачка в точке  $C$ , образуя высшую пару. После удаления ролика

$$W = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 - 1 = 1,$$

т. е.  $W$  совпадает с числом ведущих звеньев.

Для замены высшей пары проводим через точку  $C$  нормаль  $n-n$  к увеличенному профилю кулачка и находим центр кривизны  $S$ . Центр кривизны профиля толкателя совпадает с точкой  $C$ . Помещаем в этих центрах шарниры и соединяем их звеном  $CS$ . У «заменяющего» механизма (рис. 1.6, б) звенья изменили свои очертания. Ведущим стал стержень  $AS$ . Звено 3 представлено в несколько ином изображении. Степень подвижности «заменяющего» механизма по-прежнему осталась равной единице.

На рис. 6, в показано разложение «заменяющего» механизма на структурные группы. Этот механизм относится к третьему классу. Его формула строения записывается так:

$$I(0, 1) \rightarrow III(2, 3, 4, 5).$$

На рис. 6, г показано разложение этого же механизма на структурные группы, когда за ведущее принято звено 5. В этом случае на механизм I класса  $(5, 0)$  последовательно наложены группы II класса  $(3, 4)$  и  $(2, 1)$ . Формула строения механизма имеет вид:

$$I(0, 5) \rightarrow II(3, 4) \rightarrow II(2, 1).$$

Из примера видно, что класс механизма может изменяться в зависимости от выбора ведущего звена.

### ***Практическая часть***

Составить схему и провести структурный анализ реального механизма или модели механизма.

Принадлежности для работы

1. Механизм или модель механизма.
2. Чертежные принадлежности.
3. Бланк протокола.

### ***Порядок проведения работы***

1. Ознакомиться с механизмом, установить его назначение (по преобразованию движений), выбрать положение механизма, при котором хорошо видно относительное расположение звеньев.

2. Составить структурную схему механизма, пользуясь условными обозначениями звеньев и пар (см. прил. 1).

3. Пронумеровать все звенья (стойку обозначить цифрой 0), кинематические пары обозначить заглавными буквами латинского алфавита, заполнить таблицу кинематических пар в протоколе.

4. Подсчитать число подвижных звеньев и кинематических пар. Определить степень подвижности механизма  $W$  по формуле Чебышева.

5. Если  $W$  механизма не совпадает с числом ведущих звеньев, то выявить звенья, создающие пассивные связи или лишние степени свободы, и условно удалить их. При наличии высших пар произвести условную замену каждой высшей пары одним звеном с двумя низшими парами и начертить схему «заменяющего» механизма.

6. Обозначить ведущее звено стрелкой (ведущее звено задается преподавателем).

7. Разложить механизм на структурные группы Ассура. Начертить каждую группу отдельно, указать ее класс, порядок и вид.

8. Определить класс механизма и написать формулу его строения.

### ***Контрольные вопросы***

1. Что называется звеном, механизмом, кинематической парой, элементом звена, кинематической цепью?

2. Как подразделяются кинематические пары по числу условий связи, налагаемых на относительное движение звеньев?

3. Какие кинематические пары относятся к низшим и какие к высшим?

4. Какие механизмы называются рычажными?

5. Какие задачи решаются в ходе структурного анализа механизмов?

6. Как рассчитать степень подвижности плоского механизма?

7. В чем сущность структурной классификации плоских механизмов?

8. Что называется группой Ассура и как определяются ее класс, порядок и вид?

9. Каким образом высшие пары можно заменить кинематически цепями с низшими парами?

# Лабораторная работа № 2 ИЗГОТОВЛЕНИЕ ЗУБЧАТЫХ КОЛЕС МЕТОДОМ ОГИБАНИЯ ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ РЕЙКОЙ

## Общие положения

Согласно основной теореме плоского зацепления (теореме Виллиса), профили, передающие вращение между параллельными осями с заданным отношением угловых скоростей, должны быть очерчены по таким кривым, у которых общая нормаль, проведенная в точке их касания, делит межосевое расстояние на части, обратно пропорциональные мгновенным угловым скоростям. При этом обеспечивается нормальная работа зацепления, т. е. профили не внедряются и не отходят друг от друга, а находятся в постоянном контакте.

Точка  $\Pi$  пересечения общей нормали к профилям с межосевой линией называется *полюсом зацепления* (рис. 2.1).

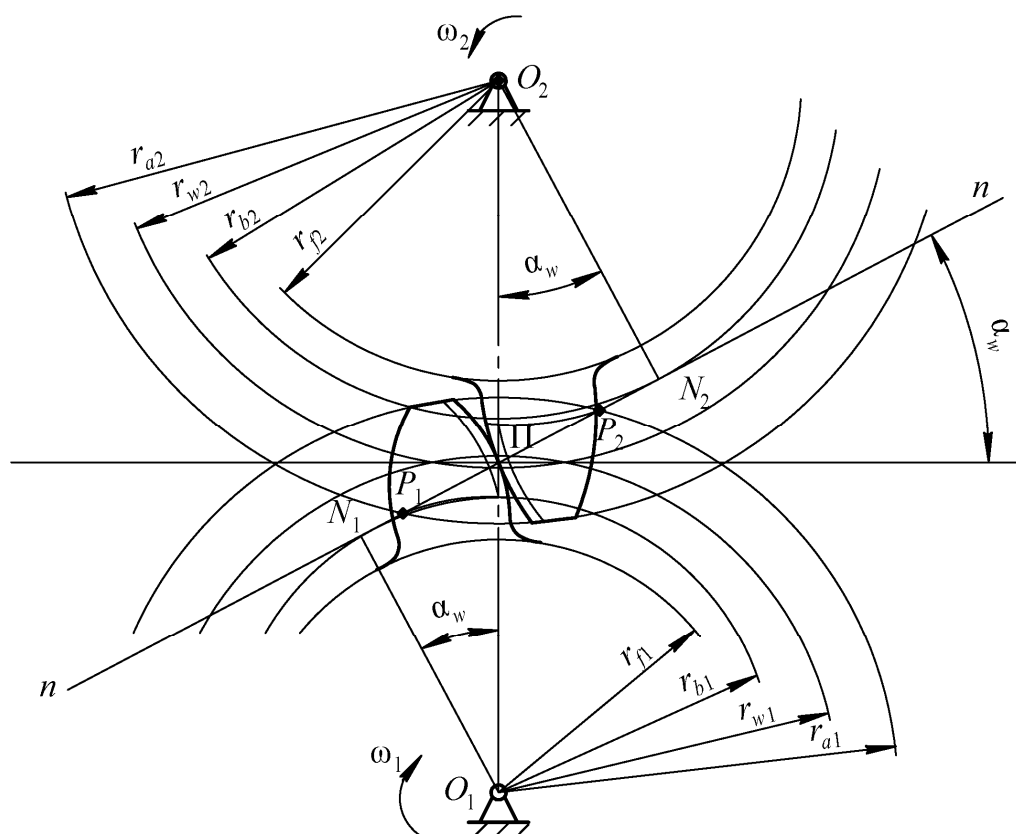


Рис. 2.1. Картина зацепления



Полус зацепления является мгновением центром вращения в относительном движении колес 1 и 2. Центроида каждого из колес представляет собой геометрическое место мгновенных центров вращения в системе координат, связанной с этим колесом. При постоянном передаточном отношении  $i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \text{const}$  полюс зацепления является неподвижной точкой, а центроиды представляют собой окружности, называемые *начальными*. При вращении колес начальные окружности все время касаются в полюсе зацепления и перекатываются одна по другой без скольжения, причем

$$i_{1,2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \pm \frac{r_{w2}}{r_{w1}},$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  – угловые скорости колес 1 и 2;  $r_{w1}$  и  $r_{w2}$  – радиусы начальных окружностей (начальные радиусы).

В современном машиностроении преимущественно используется эвольвентное зацепление, в котором профили зубьев очерчены по эвольвенте окружности. *Эвольвентой окружности* называется траектория любой точки прямой линии, перекатываемой без скольжения по окружности (рис. 2.2).

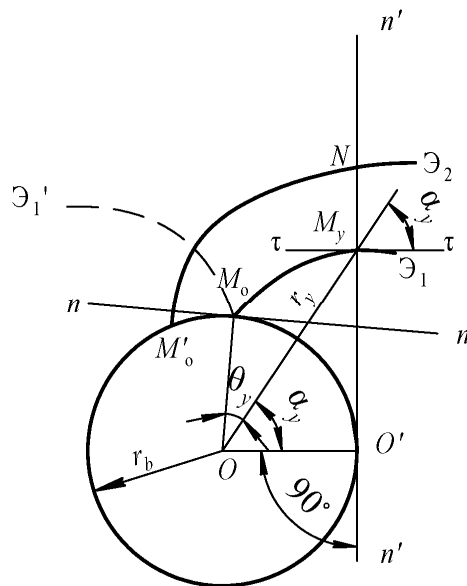


Рис. 2.2. Характеристики эвольвенты

Окружность, по которой перекатывается прямая  $n - n'$ , образующая эвольвенту, называется *основной окружностью*. Углом профиля эволь-

венты в данной точке  $M_y$  называется острый угол  $\alpha_y$  между касательной  $\tau - \tau$  к эвольвенте и радиусом-вектором, проведенным в данную точку.

Радиус-вектор  $OM_y$  произвольной точки  $M_y$  эвольвенты по модулю равен

$$r_y = \frac{r_b}{\cos \alpha_y}, \quad (2.1)$$

где  $r_b$  – радиус основной окружности (основной радиус).

Полярный угол  $\theta_y$ , называемый *эвольвентным углом профиля* в точке  $M_y$ , равен

$$\theta_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y.$$

Функция  $\operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$  получила название *эвольвентной функции*, или *инволюты*:  $\operatorname{inv} \alpha_y = \operatorname{tg} \alpha_y - \alpha_y$ . Следовательно,

$$\theta_y = \operatorname{inv} \alpha_y. \quad (2.2)$$

Уравнения (2.1) и (2.2), рассматриваемые совместно, являются уравнениями эвольвенты в полярных координатах в параметрической форме (параметр – угол профиля  $\alpha_y$ ).

Угол  $\nu_y = \theta_y + \alpha_y$  называется *углом развернутости эвольвенты*. Эвольвента является разверткой основной окружности.

Из условия образования эвольвенты вытекают следующие ее свойства.

1. Эвольвента начинается на основной окружности и имеет правую и левую ветви ( $M_0\mathcal{E}_1$  и  $M_0\mathcal{E}'_1$ ).

2. Нормаль к эвольвенте в любой ее точке является касательной к основной окружности, причем точка касания есть центр кривизны, а расстояние по нормали от точки касания до эвольвенты есть радиус кривизны эвольвенты в данной точке ( $\rho_y = CM_y$ ).

3. Две одноименные эвольвенты одной и той же окружности являются эквидистантными (равноотстоящими; расстояние между ними по нормали равно дуге основной окружности, заключенной между началами эвольвент ( $NM_y = M'_0M_0$ )).

4. Форма эвольвенты зависит только от радиуса основной окружности. В пределе  $r_b \rightarrow \infty$  эвольвента превращается в прямую линию.

Основные геометрические параметры цилиндрического зубчатого колеса показаны на рис. 2.3.

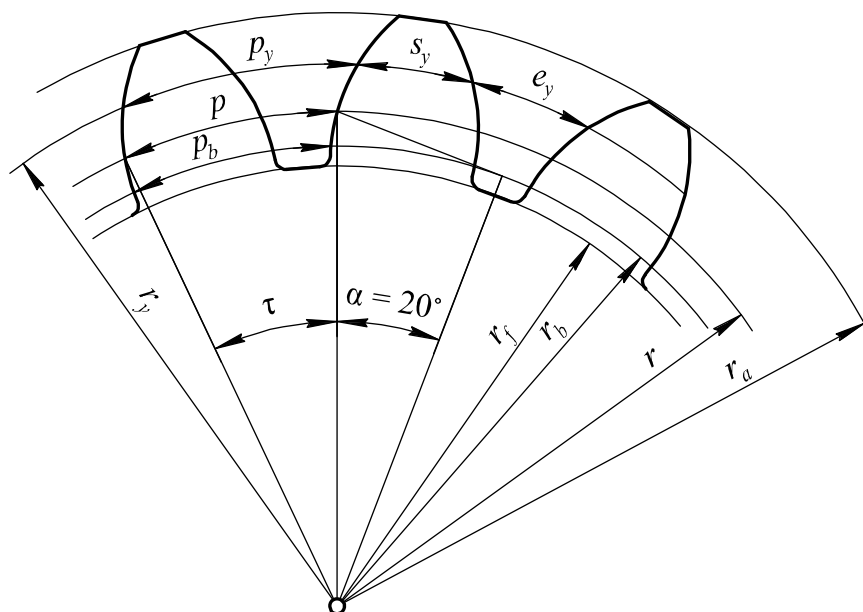


Рис. 2.3. Основные геометрические параметры цилиндрического зубчатого колеса

Высота зубьев ограничена окружностью вершин и окружностью впадин:

$$h = r_a - r_f,$$

где  $r_a$  – радиус вершин зубьев;  $r_f$  – радиус впадин.

Профили зубьев являются эвольвентами основной окружности радиуса  $r_b$ . Эвольвентный профиль и окружность впадин соединяются переходной кривой, которая имеет различное очертание в зависимости от способа нарезания зубьев.

Расстояние между одноименными (левыми или правыми) профилями соседних зубьев по дуге окружности называется *окружным шагом зубьев*. Шаг складывается из толщины зуба и ширины впадины. Для окружности произвольного радиуса  $r_y$

$$p_y = s_y + e_y,$$

где  $p_y$  – окружной шаг;  $s_y$  – окружная толщина зуба;  $e_y$  – окружная ширина впадины.

Отношение

$$m_y = \frac{p_y}{\pi}$$

называется *окружным модулем зубьев* на окружности радиуса  $r_y$ . Тогда

$$r_y = \frac{m_y z}{2},$$

где  $z$  – число зубьев колеса.

Шаг  $p_y$  и модуль  $m_y$  зависят от того, по какой окружности они замеряются или рассчитываются.

На колесе выделяется расчетная окружность, окружной модуль на которой равен стандартному модулю зуборезного инструмента. Эта окружность называется *делительной*, а окружной модуль зубьев на делительной окружности называется *расчетным модулем* зубчатого колеса:

$$m = \frac{p}{\pi},$$

где  $p$  – шаг по делительной окружности.

Расчетный модуль – основной параметр зубчатого колеса, его значения определены ГОСТ 9563–60. Следовательно, радиус делительной окружности (делительный радиус) равен

$$r = \frac{mz}{2}.$$

Для прямозубых колес, нарезанных стандартным инструментом, угол профиля эвольвенты на делительной окружности равен  $\alpha = 20^\circ$ .

Часть зуба, заключенная между окружностью вершин и делительной окружностью, называется *делительной головкой* зуба или *головкой* зуба. Высота головки зуба

$$h_a = r_a - r.$$

Часть зуба, заключенная между делительной окружностью и окружностью впадин, называется *делительной ножкой* зуба или *ножкой* зуба. Высота ножки зуба

$$h_f = r - r_f.$$

Центральный угол  $\tau = \frac{2\pi}{z}$  или  $\tau = \frac{360^\circ}{z}$  называется *угловым шагом* зубьев.

Эвольвентное зацепление обеспечивает передачу вращения с постоянным передаточным отношением.

Траектория общей точки контакта профилей в неподвижной системе координат называется *линией зацепления*. В эвольвентном зацеплении линией зацепления является прямая  $N_1N_2$  (см. рис. 2.1), общая касательная к основным окружностям. Эвольвентные профили могут быть сопряженными только в пределах  $N_1N_2$ , за пределами  $N_1N_2$  эвольвенты пересекаются. Участок  $P_1P_2$  линии зацепления, заключенный между окружностями вершин зубьев, называется *активной линией зацепления*. Эвольвентные профили касаются только на этом участке, причем контактируют друг с другом только части профилей, называемые *активными профилями*.

Угол  $\alpha_w$  между линией зацепления и перпендикуляром к межосевой линии называется *углом зацепления*. Он равен углу профиля эвольвент на начальных окружностях.

Существуют два принципиально отличающихся друг от друга метода изготовления цилиндрических эвольвентных колес – метод копирования и метод обкатки (огибания). При изготовлении колес методом копирования рабочие части инструмента имеют форму впадины между зубьями. К этому методу относится, например, фрезерование модульной дисковой или пальцевой фрезой. Существенные недостатки метода копирования – низкая производительность, потребность в большом комплекте инструмента, невысокая точность.

Метод обкатки является основным. При нарезании режущий инструмент и заготовка имеют такое же относительное движение, как и два зубчатых колеса в зацеплении (движение обкатки). Поэтому инструмент (долбяк) представляет собой колесо с зубьями эвольвентного профиля, заточенными для резания. Кроме вращательного, долбяк совершает возвратно-поступательное движение вдоль оси заготовки (движение резания). Вместо долбяка в качестве зуборезного инструмента может быть использована рейка (гребенка) с прямолинейными профилями зубьев или модульная червячная фреза, которая в осевом сечении имеет профиль рейки.

Преимущества метода обкатки – высокая производительность, большая точность, возможность нарезания колес с различными числами зубьев одним инструментом данного модуля.

Параметры зуборезного инструмента, работающего по методу обкатки, определяются в соответствии со стандартным исходным контуром зубчатых колес, под которым понимается контур зубьев рейки в сечении плоскостью, перпендикулярной к направлению зубьев (ГОСТ 13755–68).

Зубья инструментальной рейки очерчены по впадинам исходного контура. Сечение инструментальной рейки называется *исходным производящим контуром* (ИПК) (рис. 2.4).

$\alpha = 20^\circ$  – угол профиля исходного контура;

$h_a^* = 1$  – коэффициент высоты головки зуба;

$c^* = 0,25$  – коэффициент радиального зазора (в ряде случаев допускается увеличение до  $c^* = 0,35$ );

$\rho_f = 0,4$  – радиус закругления.

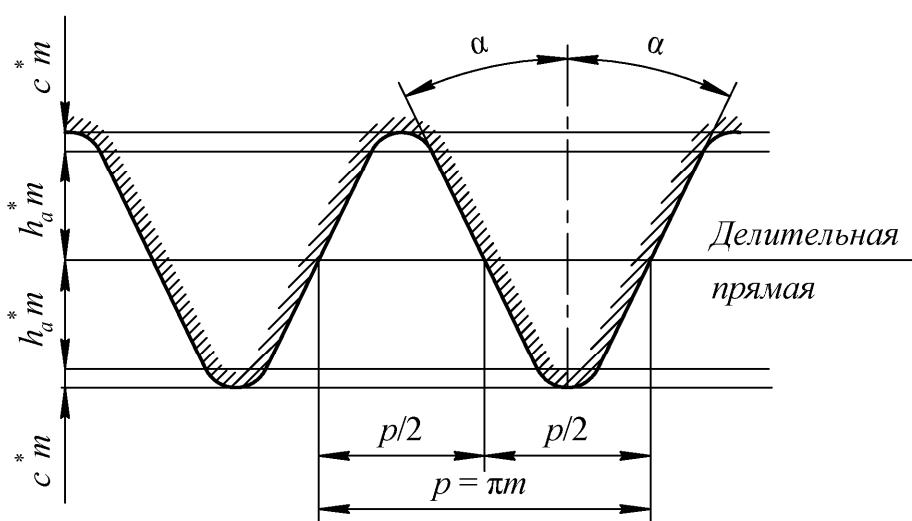


Рис. 2.4. Инструментальная рейка

В пределах высоты  $2h_a^*m$  профиль зубьев рейки – прямолинейный. Эвольвентная часть зуба колеса формируется только этим участком, а переходная кривая между эвольвентой и окружностью впадин создается скругленным участком зубьев рейки.

Номинальной считается такая установка инструментальной рейки, при которой ее делительная (средняя) прямая касается делительной окружности нарезаемого колеса. В этом случае нарезается колесо без смещения (нулевое или нормальное). Если же в станочном зацеплении делительной окружности касается любая другая прямая, параллельная делительной (такая прямая называется начальной), то нарезается колесо со смещением (корректированное). Делительная окружность колеса и начальная прямая рейки являются центроидами в относительном движении, они перекатываются друг по другу без скольжения. Поэтому только по делительной окружности шаг и модуль зубьев колеса равны шагу и модулю зуборезной рейки.

Расстояние  $xm$  между делительной прямой и делительной окружностью представляет собой смещение исходного контура от номинального положения (рис. 2.5). Отношение смещения исходного контура к расчетному модулю называется коэффициентом смещения исходного контура ( $x$ ).

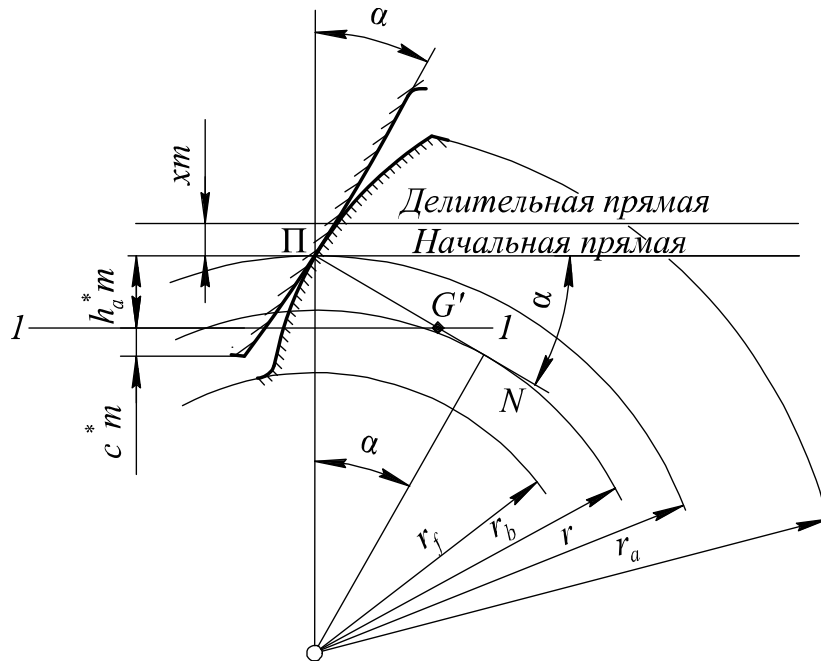


Рис. 2.5. Смещение исходного контура

Смещение считается положительным ( $x > 0$ ), если делительная прямая не пересекает делительной окружности нарезаемого колеса, и отрицательным ( $x < 0$ ), если пересекает ее. Для колес без смещения (нулевых)  $x = 0$ .

Если граничная прямая  $l-l$  у вершин зубьев инструментальной рейки пересекает линию зацепления за предельной точкой  $N$ , то возникает явление подрезания зубьев, которое заключается в том, что часть эвольвентного профиля у основания зуба срезается, ножка зуба ослабляется в опасном сечении. Подрезание объясняется тем, что эвольвентные профили могут касаться только на линии зацепления, а за ее пределами эвольвенты пересекаются. В случае подрезания точка  $G'$  оказывается вне отрезка  $PN$ .

Наименьшее число зубьев, свободных от подрезания, определяется по формуле

$$z_{\min} = \frac{2(h_a^* - x)}{\sin^2 \alpha}.$$

В случае нарезания колес без смещения ( $x = 0$ ) инструментом со стандартными параметрами  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$  получим  $z_{\min} = 17$ .

Подрезание при нарезании колеса с числом зубьев  $z < z_{\min}$  можно устранить путем соответствующего выбора коэффициента смещения  $x$ . Коэффициент наименьшего смещения, определяемый из условия отсутствия подрезания, равен

$$x_{\min} = h_a^* - \frac{z}{2} \sin^2 \alpha$$

при  $h_a^* = 1$  и  $\alpha = 20^\circ$

$$x_{\min} = 1 - 0,0585z, \text{ или } x_{\min} \approx \frac{17 - z}{17}.$$

Колеса со смещением применяются не только для устранения подрезания при  $z < z_{\min}$ , но и для повышения контактной и изгибной прочности зубьев, для уменьшения их износа и повышения долговечности, для получения заданного межосевого расстояния пары колес и в ряде других случаев.

Коэффициенты смещения выбирают исходя из условия получения требуемых показателей зацепления с помощью специально составленных таблиц или графиков, называемых блокирующими контурами.

В зависимости от сочетания коэффициентов смещения различают следующие типы зацеплений: 1) нулевое; 2) нулевое равносмещенное; 3) положительное; 4) отрицательное. Нулевые зацепления первого и второго типов характеризуются тем, что коэффициент суммы смещений  $x_\Sigma = x_1 + x_2 = 0$ , причем в зацеплении первого типа  $x_1 = x_2 = 0$ , т. е. оба колеса без смещения, а в зацеплении второго типа  $x_1 = -x_2$ , т. е. смещения равны по величине, но противоположны по знаку. В обоих случаях угол зацепления  $\alpha_w$  равен углу профиля исходного контура  $\alpha$ , делительные окружности одновременно являются начальными окружностями в зацеплении, высота зубьев равна

$$h = (2h_a^* + c^*)m = 2,25m.$$

В первом случае, кроме того, толщина зубьев по делительным окружностям равна половине шага.

В положительном зацеплении  $x_\Sigma > 0$ , следовательно,  $\alpha_w > \alpha$ ; в отрицательном зацеплении  $x_\Sigma < 0$ , следовательно,  $\alpha_w < \alpha$ . Для зацепления этих типов характерно несовпадение начальных окружностей с



делительными. Между делительными окружностями обоих колес имеется воспринимаемое смещение

$$ym = a_w - a,$$

где  $y$  – коэффициент воспринимаемого смещения,

$$y = \frac{a_w - a}{m},$$

где  $a_w$  – межосевое расстояние передачи;  $a$  – делительное межосевое расстояние, равное сумме делительных радиусов.

Для положительного зацепления  $y > 0$ , для отрицательного –  $y < 0$ , для нулевых зацеплений  $y = 0$ .

Воспринимаемое смещение в передаче ( $ym$ ) не равно сумме смещений исходного контура для обоих колес ( $x_\Sigma m$ ):

$$ym = x_\Sigma m - \Delta y m,$$

где  $\Delta y$  – коэффициент уравнивающего смещения:

$$\Delta y = x_\Sigma - y,$$

где  $\Delta y m$  – уравнивающее смещение.

Высота зубьев при  $x_\Sigma \neq 0$  однозначно не выражается через расчетный модуль колеса и может быть вычислена по формуле

$$h = (2h_a^* + c^* - \Delta y)m.$$

Из формулы видно, что уравнивающее смещение  $\Delta y m$  показывает уменьшение высоты зубьев в зацеплениях со смещением (когда  $x_\Sigma \neq 0$ ) по сравнению с высотой зубьев в нулевых зацеплениях (когда  $x_\Sigma = 0$ ). Для нулевых зацеплений  $\Delta y = 0$ .

Процесс изготовления зубчатого колеса позволяет моделировать лабораторная установка ТММ-42 (рис. 2.6), состоящая из диска 4, на котором закрепляется бумажный круг нужного диаметра (он имитирует заготовку), и рейки 2, представляющей исходный производящий контур режущего инструмента. Рейка крепится к каретке 1 двумя винтами 9 и 12, входящими в пазы рейки. С обеих сторон рейки на платформе имеются две шкалы 8 и 13, служащие для фиксации положения рейки в зависимости от смещения  $xm$ . В процессе движения рейка 2 огибает диск 4, как ИПК заготовку. При перемещении  $\Delta s$  рейки диск поворачивается на угол  $\varphi = \Delta s / r$ . Прерывистое поступа-

тельное шаговое перемещение рейки осуществляется клавишей 11 в том случае, если Г-образная рукоятка 10 лежит на упорном штифте. Повернув рукоятку 10 против часовой стрелки, получим свободное перемещение рейки. Перемещение  $\Delta s$  рейки 2 и поворот диска 4 на угол  $\Delta\varphi$  согласуются при помощи натяжной струны 7. Чтобы повернуть диск независимо от рейки, необходимо ослабить струну, поставив рукоятку 14 (поворачивая против часовой стрелки) в положение нижнего упора. Для натяга струны рукоятку 14 ставят в положение верхнего упора.

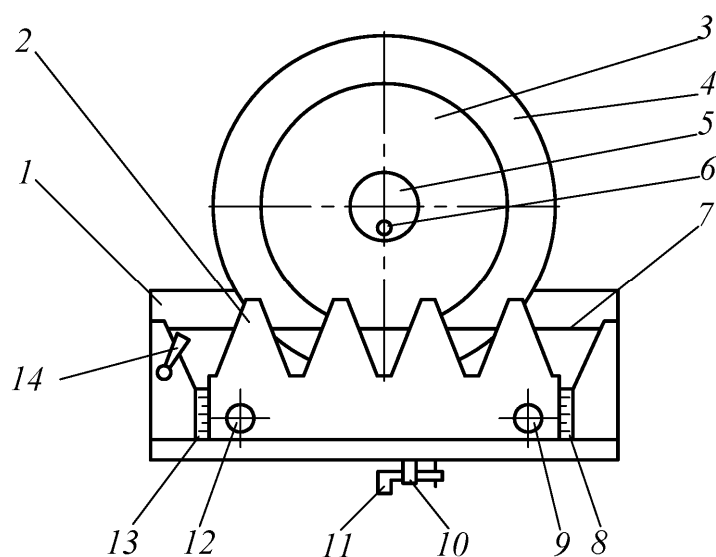


Рис. 2.6. Установка ТММ-42

При последовательном обведении зубьев рейки карандашом можно получить на бумажном круге профиль зубьев, которые моделируют в масштабе 1:1 зубья колеса, изготовляемого на станке. Профили зубьев, полученные при разных смещениях  $xm$ , дают возможность оценить влияние смещения на форму зуба.

В данной работе вначале вычерчиваются зубья колеса без смещения (нулевого), которые оказываются подрезанными, так как  $z < 17$ . Затем определяется смещение ИПК (зуборезной рейки), необходимое для устранения подрезания, и вычерчиваются зубья колеса со смещением (положительным).

### **Практическая часть**

Построить эвольвентные зубья колеса методом огибания при помощи инструментальной рейки и выполнить их геометрический расчет.

Принадлежности для работы

1. Установка ТММ-42 для вычерчивания зубьев эвольвентного профиля.
2. Бумажный круг (заготовка).
3. Карандаш, циркуль, линейка.
4. Калькулятор.
5. Бланк протокола.

### **Порядок проведения работы**

1. Записать в бланк протокола номер установки, заданные величины  $m$ ,  $d_1$  (они выгравированы на рейке прибора), а также параметры рейки  $\alpha = 20^\circ$ ,  $h_a^* = 1$ ,  $c^* = 0,25$ . Число зубьев  $z_1$  определяется по формуле  $z_1 = d_1 / m$ , а  $z_2$  выбирается по таблице. Вариант задается преподавателем.

**Число зубьев колеса 2**

Номер установки	Вариант									
	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	К
1	19	10	11	12	13	14	15	16	17	18
2	18	20	10	11	12	13	14	15	16	17
3	17	19	20	10	11	12	13	14	15	16
4	16	18	19	20	10	11	12	13	14	15
5	15	17	18	19	20	10	11	12	13	14
6	14	16	17	18	19	20	10	11	12	13
7	13	15	16	17	18	19	20	10	11	12
8	12	14	15	16	17	18	19	20	10	11
9	11	13	14	15	16	17	18	19	20	10
10	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
11	20	11	12	13	14	15	16	17	18	19
12	11	20	19	18	17	16	15	14	13	12
13	12	10	20	19	18	17	16	15	14	13
14	13	11	10	20	19	18	17	16	15	14
15	14	12	11	10	20	19	18	17	16	15

2. С помощью съемной шайбы 5 и винта 6 укрепить бумажный круг на диске 4.

3. Ослабить винты 9 и 12 и установить рейку 2 в нулевое положение  $mx = 0$ , при этом риска на рейке должна совпадать с нулевой отметкой на шкале, а делительная (средняя) прямая рейки коснется делительной окружности 3.

4. Пользуясь рычагом свободного хода 10, перевести рейку 2 в крайнее правое положение.

5. Нажимая на клавишу 11 и обводя карандашом профили зубьев рейки до тех пор, пока она не придет в крайнее левое положение, получить два-три профиля зубьев колеса.

6. По формуле (п. 2.2 на бланке протокола) определить коэффициент смещения  $x_{1\min}$  и смещение  $\Delta_1 = x_{1\min}m$  (п. 3 на бланке протокола). Отодвинуть рейку от центра заготовки на величину  $\Delta_1$  (по шкалам) и закрепить винтами 9 и 12.

7. Снова отвести рейку в крайнее правое положение. Повернув рукоятку 14, ослабить натяжение струны и повернуть диск 4 примерно на  $180^\circ$  так, чтобы чистая часть заготовки оказалась справа. Вернуть рукоятку 14 в исходное положение.

8. Методом, описанным в п. 5, вычертить зубья колеса со смещением, после чего снять бумажный круг с диска.

9. По приведенным в протоколе формулам (4.1)–(4.14) рассчитать параметры колеса без смещения и со смещением (значения функции инволюты приведены в прил. 2).

10. Нанести на бумажный круг полуокружности радиусов  $r_1$ ,  $r_{w1}$ ,  $r_{b1}$ ,  $r_{f1}$  и  $r_{a1}$  (на одной половине – для колеса без смещения, а на другой – для колеса со смещением).

11. Измерить толщины зубьев  $s_1$ ,  $s_{w1}$ ,  $s_{b1}$  и  $s_{a1}$  для обоих колес и сопоставить полученные значения с расчетными. Результаты занести в таблицу.

12. Оформить протокол.

### ***Контрольные вопросы***

1. Как расположена делительная прямая рейки относительно делительной окружности колеса при  $x = 0$ ,  $x > 0$ ,  $x < 0$ ?

2. Как определить коэффициент смещения, при котором возникает подрезание зуба?

3. Как изменяются делительная толщина зуба и толщина зуба на окружности вершин при увеличении коэффициента смещения?

4. Что называется зубчатым зацеплением, станочным зацеплением?

5. Что такое окружной модуль зубьев, расчетный модуль зубчатого колеса, делительная окружность?

# Лабораторная работа № 3

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА МЕТОДОМ ФИЗИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

### *Общие положения*

Моментом инерции твердого тела относительно оси называется мера инертности этого тела при вращательном движении вокруг данной оси. Момент инерции тела зависит только от массы тела и ее распределения.

Математически момент инерции тела относительно оси, проведенной в теле или вне его, выражается суммой произведений массы  $m_k$  каждой материальной частицы тела на квадрат расстояния  $\rho_k$  ее от данной оси:

$$J = \sum_{k=1}^{k=n} m_k \rho_k^2 . \quad (3.1)$$

Точно вычислить момент инерции тела можно, перейдя к интегралу:

$$J = \int_m \rho^2 dm . \quad (3.2)$$

В системе СИ момент инерции выражается в килограммах на метр в квадрате ( $\text{кг} \cdot \text{м}^2$ ).

Если известен момент инерции  $J_S$  относительно оси, проходящей через центр масс тела, то момент инерции  $J_x$  относительно какой-либо другой оси, параллельной первой и отстоящей от нее на расстоянии  $a$ , определяется на основании теоремы о моментах инерции относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса – Штейнера):

$$J_x = J_S + ma^2 , \quad (3.3)$$

где  $m$  – масса тела.

Моменты инерции однородных тел, имеющих правильную геометрическую форму, определяются аналитически по формулам, которые можно найти в технических справочниках.

В деталях машин сложной формы моменты инерции иногда вычислить затруднительно. Поэтому их определяют экспериментально, выбирая метод, наиболее удобный для тела данной формы.

Рассмотрим определение момента инерции по методу физическо-го маятника. Этот метод применим для тел удлиненной формы, имеющих отверстия для подвешивания на горизонтальную ось, не проходящую через центр тяжести (рис. 3.1).

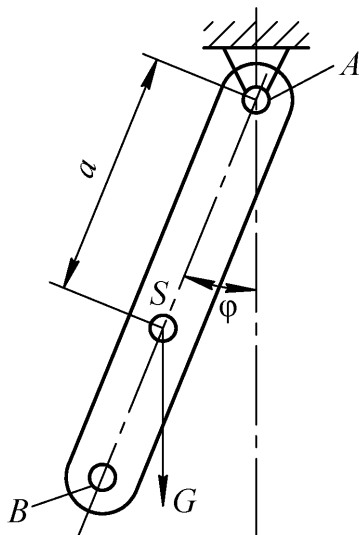


Рис. 3.1. Физический маятник

Такое тело представляет собой физический маятник, момент инерции которого определяется при колебании его под действием силы тяжести. Запишем дифференциальное уравнение вращения тела вокруг данной неподвижной горизонтальной оси:

$$J_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M, \quad (3.4)$$

или

$$J_A \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -G a \sin \varphi, \quad (3.5)$$

где  $a$  – расстояние от оси до центра тяжести  $S$ .

Для малых колебаний, когда  $\varphi \leq 5...10^\circ$ ;  $\sin \varphi \approx \varphi$ .

Обозначив  $G = mg$  и  $k^2 = \frac{mga}{J_A}$ , уравнение (3.5) перепишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2\varphi = 0. \quad (3.6)$$

Это есть уравнение гармонических колебаний с периодом полного колебания

$$T_A = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{J_A}{mga}}, \quad (3.7)$$

где  $k$  – частота качания физического маятника.

Откуда

$$J_A = \frac{T_A^2 mga}{4\pi^2}. \quad (3.8)$$

Момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр тяжести, определяется на основании выражения (3.3):

$$J_S = J_A - ma^2. \quad (3.9)$$

Если положение центра тяжести (расстояние  $a$ ) неизвестно, то опыт повторяют для двух точек подвеса  $A$  и  $B$  и находят значения периодов  $T_A$  и  $T_B$ . Если расстояние между точками подвеса  $AB = l$ , то систему двух уравнений с двумя неизвестными можно записать:

$$\begin{aligned} J_A &= J_S + ma^2, \\ J_B &= J_S + m(l-a)^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Решая их, получим:

$$a = \frac{l \left( T_B^2 - \frac{4\pi^2}{g} l \right)}{T_B^2 + T_A^2 - 2 \frac{4\pi^2}{g} l}. \quad (3.11)$$

### ***Практическая часть***

Определить опытным путем осевой момент инерции шатуна методом физического маятника. Установка (рис. 3.2,  $a$ ) состоит из вертикальной стойки  $1$ , к которой прикреплена горизонтальная призма  $2$ .

Принадлежности для работы

1. Стойка с призмой.
2. Секундомер.
3. Штангенциркуль или линейка.
4. Звено, для которого определяется момент инерции (шатун).
5. Бланк протокола.

### ***Порядок проведения работы***

1. Определить период колебаний  $T_A$  звена на призме для первой точки подвеса  $A$ , соответствующей расстоянию  $a$  от центра тяжести.

Для этого звено подвесить на призму и отклонить от вертикального положения на угол  $5...7^\circ$ , затем отпустить. Оно совершает свободные колебания. Когда звено придет в одно из крайних положений (правое или левое), включить секундомер и замерить время 20-ти полных колебаний (для более точного определения периода). Выполнить по 5...7 замеров для каждой точки подвеса.

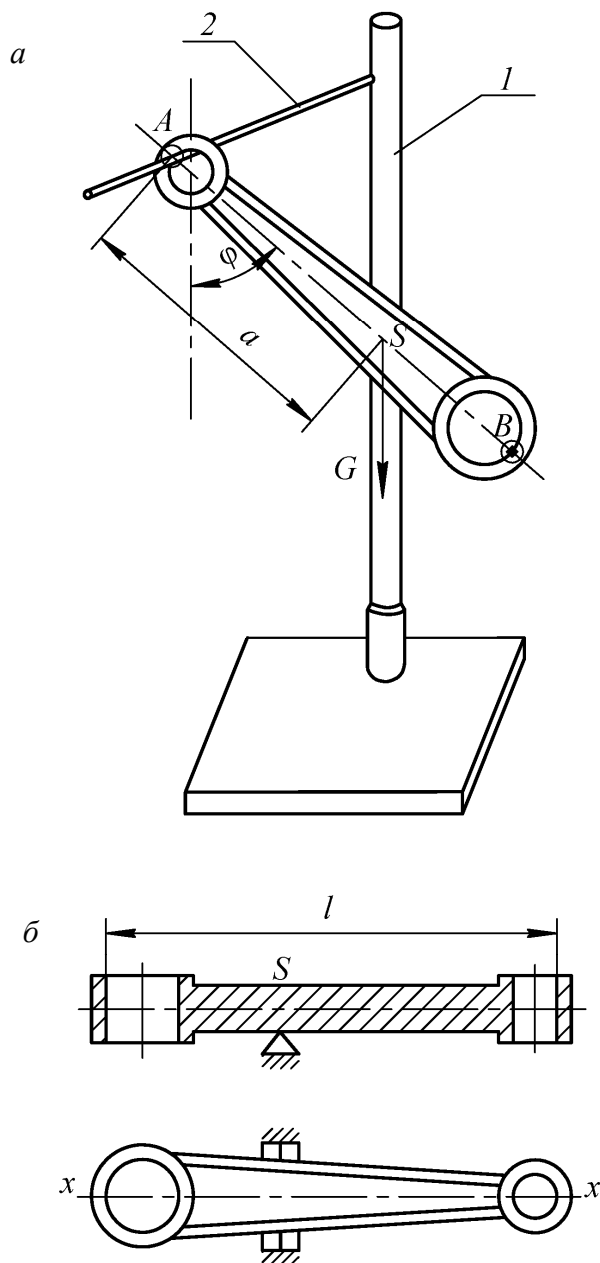


Рис. 3.2. Лабораторная установка

**Примечание.** Положение центра тяжести можно приблизительно определить, положив звено на ребро призмы 2 таким образом, чтобы оно находилось в равновесии (рис. 3.2, б).



2. Для нахождения положения центра тяжести звена (величина  $a$ ) измеряется штангенциркулем расстояние  $l$  между точками подвеса (рис. 3.2, б) и по формуле (3.11) вычисляется расстояние  $a$ .

3. Вычислить величину  $J_A$  по формуле (3.8).

4. Определить  $J_S$  по формуле (3.9).

5. Аналогично производится расчет для точки подвеса  $B$ , т. е.

$$J_B = \frac{T_B^2 mg(l-a)}{4\pi^2}, \quad (3.12)$$

$$J_S = J_B - m(l-a)^2.$$

6. Результаты измерений и вычислений занести в таблицы протокола.

7. Вычислить относительную погрешность результатов расчета  $J_S$  при различных точках подвеса:

$$\Delta = 2 \left| \frac{J_S^{(A)} - J_S^{(B)}}{J_S^{(A)} + J_S^{(B)}} \right|. \quad (3.13)$$

### ***Контрольные вопросы***

1. Что называют моментом инерции твердого тела?
2. От чего зависит величина момента инерции твердого тела?
3. Как записывается общая формула для вычисления осевого момента инерции твердого тела?
4. Как формулируется теорема Гюйгенса – Штейнера?
5. Как определяется момент инерции твердого тела по методу физического маятника?

# Лабораторная работа № 4

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ ВИНТОВОГО МЕХАНИЗМА (ВИНТОВОЙ ПАРЫ)

### Общие сведения

Для приближенных расчетов коэффициента полезного действия (к.п.д.) винтовой пары пользуются формулой для определения к.п.д. наклонной плоскости

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho')}, \quad (4.1)$$

где  $\alpha$  – угол подъема средней винтовой линии (рис. 4.1);  $\rho'$  – приведенный угол трения резьбы.

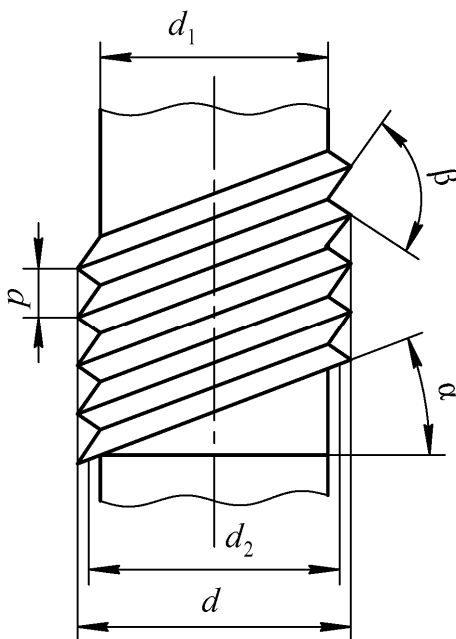


Рис. 4.1. Основные параметры резьбы

Угол  $\alpha$  определяется из формулы

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{H}{\pi d_2},$$

где  $H$  – ход резьбы;  $d_2$  – средний диаметр резьбы.

Ход резьбы

$$H = np,$$

где  $n$  – число заходов;  $p$  – шаг резьбы.

Средний диаметр резьбы

$$d_2 = \frac{d_1 + d}{2},$$

где  $d_1$  – внутренний,  $d$  – наружный диаметры винта.

Приведенный угол трения

$$\rho' = \arctg f',$$

где  $f'$  – приведенный коэффициент трения.

Для метрической (треугольной) резьбы

$$f' = \frac{f}{\cos \beta / 2},$$

где  $f$  – коэффициент трения скольжения между винтом и гайкой;  $\beta$  – угол профиля нарезки винта.

Для метрической резьбы  $\alpha = 60^\circ$ ,  $f' = 1,155f$ . Формула для определения к.п.д. винтового механизма при подъеме груза с учетом (4.1) имеет вид

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \rho')} \eta_0, \quad (4.2)$$

где  $\eta_0$  – коэффициент, учитывающий потери мощности на трение в опорах.

В зависимости от вида подшипников, смазки  $\eta_0$  может изменяться в пределах от 0,92 до 0,97.

Для экспериментального определения к.п.д. винтовых механизмов используется установка ТММ-33. Она (рис. 4.2) монтируется стационарно по вертикали.

Основанием установки является станина 12. К верхней части станины крепится кронштейн с подшипниковым узлом 15, в который вмонтирован электропривод с редуктором 1. Корпус (статор) электродвигателя жестко связан с редуктором, хвостовик которого в виде втулки является валом по отношению к шарикоподшипникам кронштейна. На крышке редуктора укреплен рычаг 18 с точечными упорами, соприкасающимися с плоской пружиной 17, которая препятствует повороту системы электродвигатель – редуктор относительно станины.

Через втулку в бронзографитовых подшипниках скольжения выходит приводной вал 14 от редуктора к винту 2 исследуемой винтовой пары. Винт сообщает гайке 3 поступательное движение вверх-вниз. От поворота гайку предохраняет ползун 11, закрепленный в обойме 9 с гайкой и входящий в направляющий паз станины. Опорой винта является шарикоподшипниковый пдпятник 5 нижнего кронштейна с гнездом для закрепления винта. Осевая нагрузка на гайку осуществляется подвешиванием грузов 7 к обойме 9 с помощью приспособления, состоящего из двух тяг 4 с траверсой 6 и полочкой 8 для грузов.

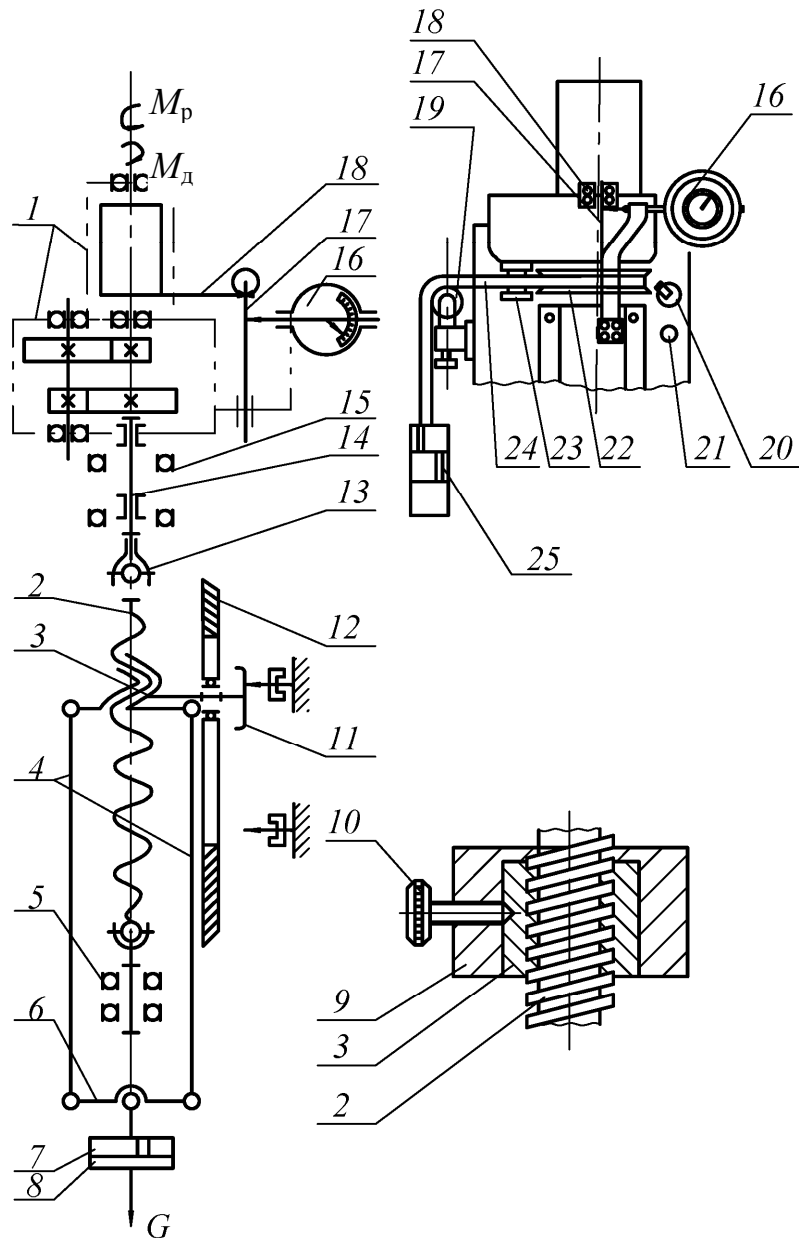


Рис. 4.2. Экспериментальная установка ТММ-33

Управление установкой автоматизировано. При нажатии кнопки 21 «пуск» происходит рабочий ход гайки вверх, реверсирование электродвигателя, ход гайки вниз и выключение двигателя по достижении исходного положения.

Крутящий момент движущих сил  $M_d$ , приложенный к винту, определяют замером реактивного момента  $M_p$ . При работе ротор электродвигателя через редуктор 1 начинает вращать винт и перемещать вверх гайку с грузом  $G$ . Одновременно реактивный момент стремится повернуть статор двигателя вместе с редуктором в сторону, обратную вращению ротора. Поворачиваясь, корпус редуктора рычагом 18 деформирует плоскую пружину 17.

Прогиб этой пружины пропорционален величине движущего момента  $M_d$  и определяется по отклонению стрелки индикатора часового типа 16:

$$M_d = k\nu,$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности (тарировочный коэффициент);  $\nu$  – число делений по шкале индикатора.

Тарировка шкалы индикатора, т. е. определение цены деления шкалы, производится опытным путем.

Для определения к.п.д. гайку нагружают известным грузом  $G$ . После пуска установки при установившемся движении записывают показания  $\nu$  индикатора 16 и по тарировочному графику (или таблице) определяют величину момента движущих сил  $M_d$  на винте.

Среднее значение к.п.д. винтовой пары (винтового механизма) определяют как к.п.д. пары за время одного оборота винта при установившемся движении. Так как за один оборот винта гайка, а следовательно, и груз  $G$  поднимаются на величину хода резьбы  $H$ , то работа  $A_{п.с}$  силы  $G$  полезного сопротивления равна

$$A_{п.с} = GH.$$

Работа же  $A_d$  момента  $M_d$  за один оборот винта равна

$$A_d = M_d 2\pi.$$

К.п.д. винтового механизма определяется по выражению

$$\eta = \frac{A_{п.с}}{A_d} = \frac{GH}{M_d 2\pi}. \quad (4.3)$$

### **Практическая часть**

Определить опытным путем к.п.д. винтовой пары при различных нагрузках и сравнить с результатами теоретического расчета к.п.д.

Необходимое оборудование

1. Установка ТММ-33 для определения коэффициента полезного действия винтовых пар.
2. Набор винтовых пар.
3. Тарировочное приспособление со сменными грузами.
4. Штангенциркуль.

### **Порядок выполнения работы**

1. Ознакомиться с установкой и теоретическим обоснованием опыта.

2. Определить геометрические параметры винтовой пары, указанной преподавателем.

3. Произвести тарировку шкалы индикатора. Установка при тарировке должна быть отключена от электрической сети и без пары винт – гайка. Установить стрелку индикатора 16 на нуль, поворачивая его шкалу. Охватить шнуром тарировочный шкив 22 по ручью, закрепить шнур петель в проточке головки винта 23 и перекинуть его через ролик 19. Нагружая свисающий конец шнура поочередно тарировочными грузами 25, для каждого из них снять показания индикатора  $v_i$ .

Результаты измерений записать в тарировочную таблицу. Подсчитать цену одного деления индикатора

$$k_1 = \frac{M}{v_i},$$

где  $M$  – крутящий момент, создаваемый весом тарировочного груза на шкиве 22;  $v_i$  – число делений индикатора 16:

$$M = G \frac{d_{\text{ш}}}{2}.$$

Здесь  $G$  – вес тарировочного груза;  $d_{\text{ш}}$  – диаметр шкива 22,  $d_{\text{ш}} = 60$  мм.

Полученные значения тарировочного коэффициента  $k_i$  должны быть близки между собой. Найти среднее значение тарировочного коэффициента, которое используется при дальнейших расчетах.

После окончания тарировки снять грузы 25 и шнур.

4. Определить экспериментально изменение к.п.д. винтового механизма в зависимости от осевой нагрузки  $\eta = \eta(G)$ . Для этого выбранную гайку укрепить в обойме 9 при помощи винта 10. Винт должен упираться в углубление на боковой поверхности гайки. Навернуть обойму с гайкой на винт и вставить его в установку так, чтобы ползун 11 вошел в паз на станине. Закрепить винт, опустив и застопорив подвижную муфту 14. Гайку опустить в нижнее положение и подвесить для ее нагружения приспособление, вес которого (он включает вес гайки 3, обоймы 9, тяг 4, траверсы 6 и полочки для грузов 8) равен 30 Н. Перед размещением винта с гайкой в установке проверить, стоит ли стрелка индикатора на нуле.

Тумблером 20 включить установку и нажатием кнопки 21 «пуск» – двигатель. За время движения гайки вверх снять отсчеты по шкале индикатора. При этом показания индикатора могут получаться различными. Причины этого – неодинаковое качество резьбы по длине винта, изменение зазоров, различное качество смазки. В таблицу заносят средние значения показаний индикатора.

Установить последовательно нагрузку 50, 80 и 100 Н (путем комбинации добавочными грузами 20 Н и 50 Н) и снять показания индикатора с измененными осевыми нагрузками  $G$ . Вычислить момент движущих сил

$$M_d = kv_{cp},$$

где  $k$  – среднее значение тарировочного коэффициента.

Определить к.п.д. винтовой пары по формуле (4.3). Результаты отсчетов и вычислений занести в протокол. Вычертить график зависимости к.п.д. от нагрузки.

5. Определить к.п.д. аналитическим путем по формуле (4.2), сравнить с экспериментальными значениями и обосновать возможное расхождение результатов.

6. Оформить протокол.

### ***Контрольные вопросы***

1. По какой формуле определяется к.п.д. винтового механизма?
2. Как определяется угол трения у винтов с треугольной нарезкой?
3. От каких факторов зависит к.п.д. машины?
4. От чего зависит величина тарировочного коэффициента?
5. Нарисуйте схему и объясните принцип определения величины движущего момента в данной работе.

# Лабораторная работа № 5

## ИССЛЕДОВАНИЕ

### КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА

#### *Общие положения*

Широкое применение в технике имеют кулачковые механизмы. Наибольшее распространение получили механизмы с вращающимся кулачком 1 и поступательно движущимся толкателем 2, снабженным для уменьшения трения роликом 3 (рис. 5.1, а).

Главным достоинством кулачковых механизмов является то, что с их помощью можно осуществить почти любой заданный закон движения толкателя.

Характерная диаграмма перемещения толкателя  $S$  в зависимости от угла поворота кулачка  $\varphi$  или от времени  $t$  представлена на рис. 5.1, в. В движении толкателя можно различить четыре фазы:

– фаза 1 – фаза удаления. За время  $t_y$  поворота кулачка на угол  $\varphi_y$  толкатель перемещается на величину  $h_{\max}$  (ход толкателя) из ближнего (нижнего) крайнего положения в дальнее (верхнее) крайнее положение;

– фаза 2 – фаза дальнего стояния. На протяжении этой фазы кулачок за время  $t_{д.с}$  поворачивается на угол  $\varphi_{д.с}$ , а толкатель находится в покое в дальнем (верхнем) крайнем положении;

– фаза 3 – фаза возвращения. В течение этой фазы за время  $t_b$  поворота кулачка на угол  $\varphi_b$  толкатель возвращается в исходное положение.

– фаза 4 – фаза ближнего стояния. На протяжении этой фазы, занимающей отрезок времени  $t_{б.с}$ , за который кулачок поворачивается на угол  $\varphi_{б.с}$ , толкатель находится в покое в ближнем (нижнем) положении.

После каждого оборота кулачка движение толкателя снова повторяется в соответствии с приведенной диаграммой.

Сумма углов поворота кулачка в течение всех фаз равна  $360^\circ$ .

$$\varphi_y + \varphi_{д.с} + \varphi_b + \varphi_{б.с} = 360^\circ (2\pi). \quad (5.1)$$

Сумма отрезков времени всех фаз равна периоду  $T$  одного оборота кулачка:

$$t_y + t_{д.с} + t_b + t_{б.с} = T. \quad (5.2)$$



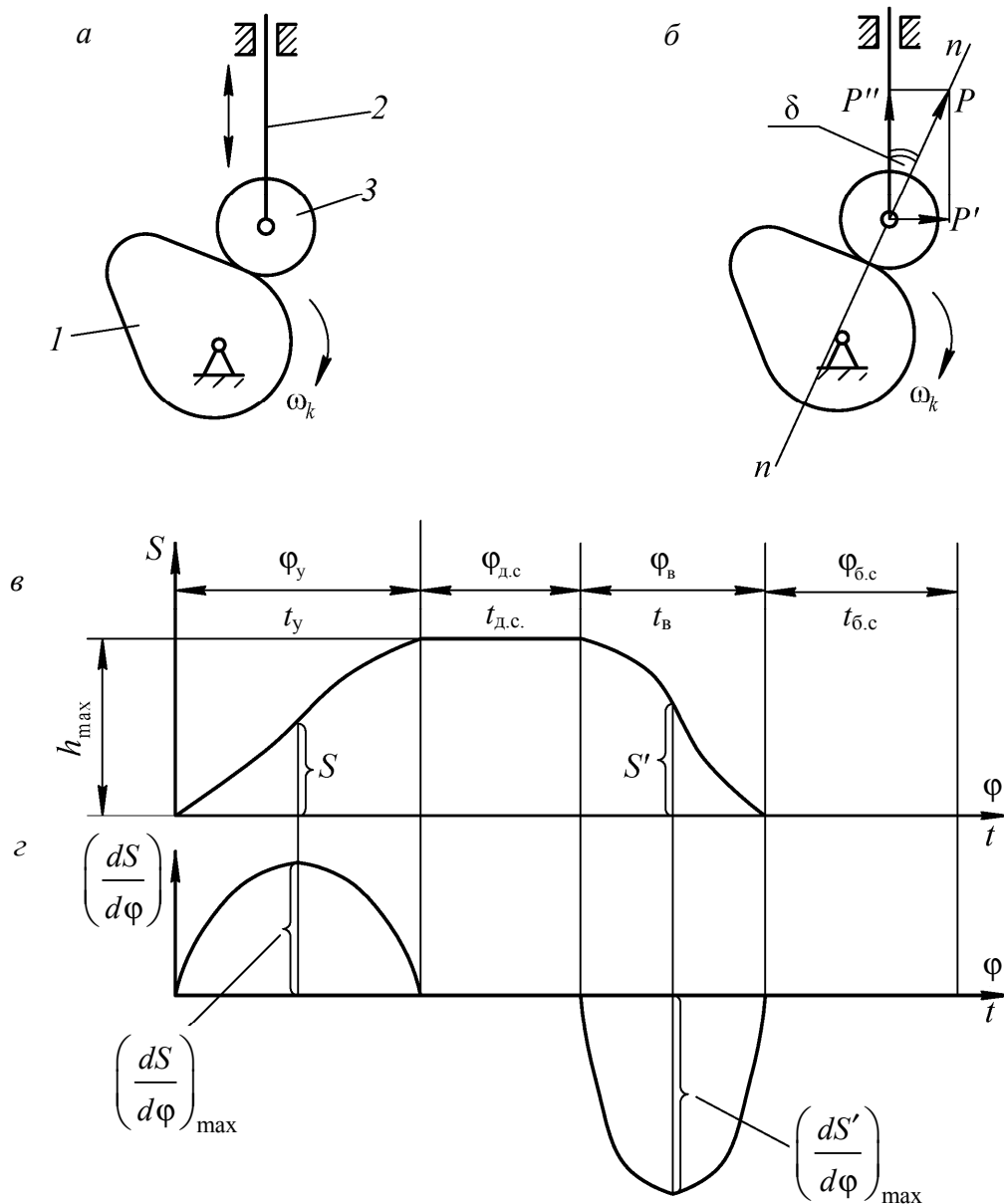


Рис. 5.1. Основные параметры кулачкового механизма: *a* – кулачковый механизм; *б* – угол давления; *в* – диаграмма перемещений; *г* – диаграмма аналогов скоростей

При вращении кулачка последний действует на толкатель силой  $P$ , которая, если пренебречь трением, направлена по общей нормали  $n - n$  в точке касания профиля кулачка и ролика толкателя (рис. 5.1, *б*).

Разложим эту силу на две составляющие:  $P'$ , направленную вдоль линии движения толкателя, и  $P''$ , направленную перпендикулярно направлению движения толкателя. Эти силы, как следует из рисунка, равны:

$$P' = P \sin \delta ; P'' = P \cos \delta .$$

Угол  $\delta$  между общей нормалью к профилю кулачка и толкателю в точке их касания и направлением его движения называется *углом давления*.

Сила  $P''$  является *полезной силой*. Именно она направлена на преодоление технологических сопротивлений.

Сила  $P'$  является *вредной силой*. Если она велика, то она может заклинить, согнуть и даже сломать толкатель.

Поэтому с точки зрения направления усилий выгодно, чтобы угол давления был как можно меньше.

Угол давления при работе кулачкового механизма все время изменяется. Но его максимальное значение не должно превосходить некоторой оптимальной допустимой величины:

$$\delta_{\max} < \delta_{\text{доп}} \quad (5.3)$$

Посмотрим, как определить угол давления, если заданы диаграмма перемещения толкателя  $S = f(\varphi)$  и положение оси вращения кулачка. Для этого построим для кулачкового механизма (рис. 5.2, а) план скоростей по векторному уравнению:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_{Ax} + \vec{V}_{AAx}, \quad (5.4)$$

где  $A$  – центр ролика толкателя,  $Ax$  – точка, принадлежащая теоретическому профилю кулачка, которая в данном положении механизма совпадает с точкой  $A$  толкателя.

Векторы направлены следующим образом:

$$\vec{V}_A \parallel AA_1, \quad \vec{V}_{Ax} \perp OA, \quad \vec{V}_{AAx} \parallel TT (\perp n - n).$$

На рис. 5.2, б по уравнению (5.4) построен план скоростей. Из построения следует, что треугольник плана скоростей  $paax_x$  подобен треугольнику  $OBA$  (рис. 5.2, а), как треугольники с взаимно перпендикулярными сторонами. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{y}{r_x} = \frac{V_A}{V_{Ax}} = \frac{\frac{dS}{dt}}{r_x \omega} = \frac{dS}{r_x \omega dt} = \frac{dS}{r_x d\varphi}$$

или

$$y = \frac{dS}{d\varphi}. \quad (5.5)$$

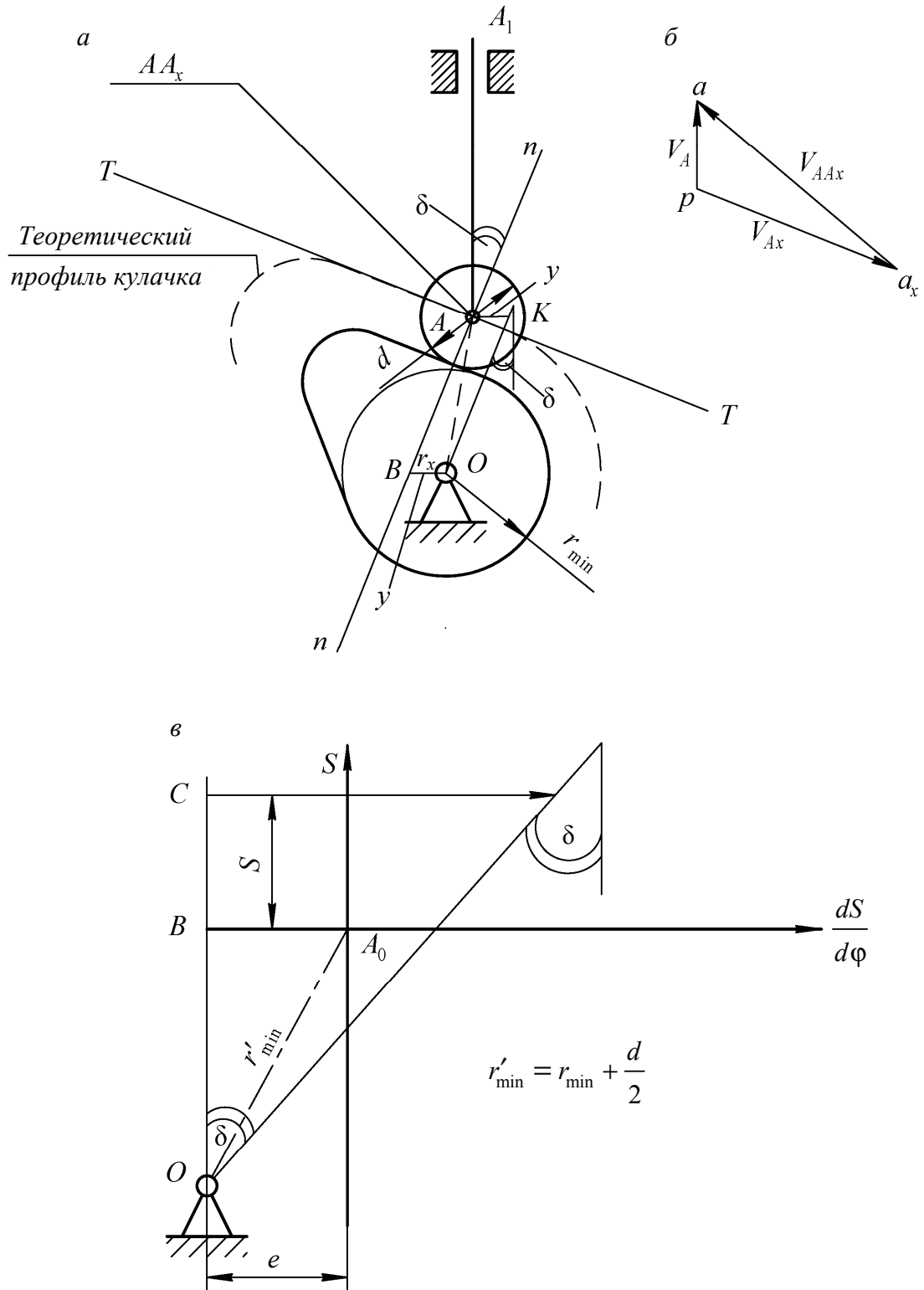


Рис. 5.2. Угол давления в кулачковом механизме: *a* – кулачковый механизм; *б* – план скоростей; *в* – схема для определения угла давления

Величина  $y = \frac{dS}{d\varphi}$  называется аналогом скорости. При равномерном вращении кулачка аналог скорости пропорционален скорости ( $y = \frac{dS}{d\varphi}$ ,  $V = \frac{dS}{dt}$ ). Величину аналога скорости легко определить методом дифференцирования зависимости  $S = f(\varphi)$ .

Отложим для данного положения механизма (рис. 5.2, а) отрезок  $y = \frac{dS}{d\varphi}$  вправо от точки  $A$  ( $\perp AA_1$ ) и соединим конец этого отрезка (точку  $K$ ) с осью вращения кулачка  $O$ . Из построения видно, что угол между лучом  $OK$  и линией, параллельной линии движения толкателя, равен углу давления  $\delta$  (для данного положения механизма).

На рис. 5.2, в изображена схема для определения угла давления для произвольного положения толкателя в фазе удаления.

На рисунке обозначено:  $S$  – перемещение толкателя;  $y = \frac{dS}{d\varphi}$  – аналог скорости толкателя, соответствующий перемещению  $S$ ;  $e$  – эксцентриситет – отклонение линии движения толкателя от оси вращения кулачка;  $r'_{\min}$  – минимальный радиус теоретического профиля кулачка, который равен

$$r'_{\min} = r_{\min} + \frac{d}{2},$$

$r_{\min}$  – минимальный радиус действительного профиля кулачка,  $d$  – диаметр ролика,  $A_0$  – положение центра ролика в ближнем (нижнем) крайнем положении.

Из рисунка следует

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{dS}{d\varphi} + e}{OB + BC} = \frac{\frac{dS}{d\varphi} + e}{\sqrt{OA_0^2 - e^2} + S}.$$

Но так как  $OA_0 = r_{\min} + \frac{d}{2}$ , то

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\frac{dS}{d\varphi} + e}{\sqrt{\left(r_{\min} + \frac{d}{2}\right)^2 - e^2} + S}. \quad (5.6)$$

Аналогично в фазе возвращения толкателя угол давления определяется по формуле (вывод опускаем)

$$\operatorname{tg}\delta' = \frac{\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)' - e}{\sqrt{\left(r_{\min} + \frac{d}{2}\right)^2 - e^2 + S'}}. \quad (5.7)$$

Из формул (5.6) и (5.7) видно, что с увеличением размеров кулачка (с увеличением  $r_{\min}$ ) угол давления убывает.

Максимальное значение угол давления принимает, как это следует из формул, вблизи положения, при котором максимальным является и аналог скорости. Тогда:

на фазе удаления

$$\operatorname{tg}\delta_{\max} \approx \frac{\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max} + e}{\sqrt{\left(r_{\min} + \frac{d}{2}\right)^2 - e^2 + S}}, \quad (5.8)$$

на фазе возвращения

$$\operatorname{tg}\delta'_{\max} \approx \frac{\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)'_{\max} + e}{\sqrt{\left(r_{\min} + \frac{d}{2}\right)^2 - e^2 + S'}}, \quad (5.9)$$

где  $\delta_{\max}$ ,  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max}$ ,  $S$  – соответственно максимальный угол давления, максимальная величина аналога скорости и соответствующее последнему перемещение толкателя в фазе удаления;

$\delta'_{\max}$ ,  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)'_{\max}$ ,  $S'$  – аналогичные величины в фазе возвращения.

Определение величин аналогов скоростей  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max}$ ,  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)'_{\max}$  и соответствующих им величин перемещений  $S$  и  $S'$  понятно из диа-

граммы  $\frac{dS}{d\varphi} = f(\varphi)$ , изображенной на рис. 5.1, з, и диаграммы, изображенной на рис. 5.1, в.

Описание установки

Кулачковый механизм (рис. 5.3) состоит из кулачка 1, ось которого вращается в подшипнике скольжения, и толкателя 2, движущегося в направляющих 3.

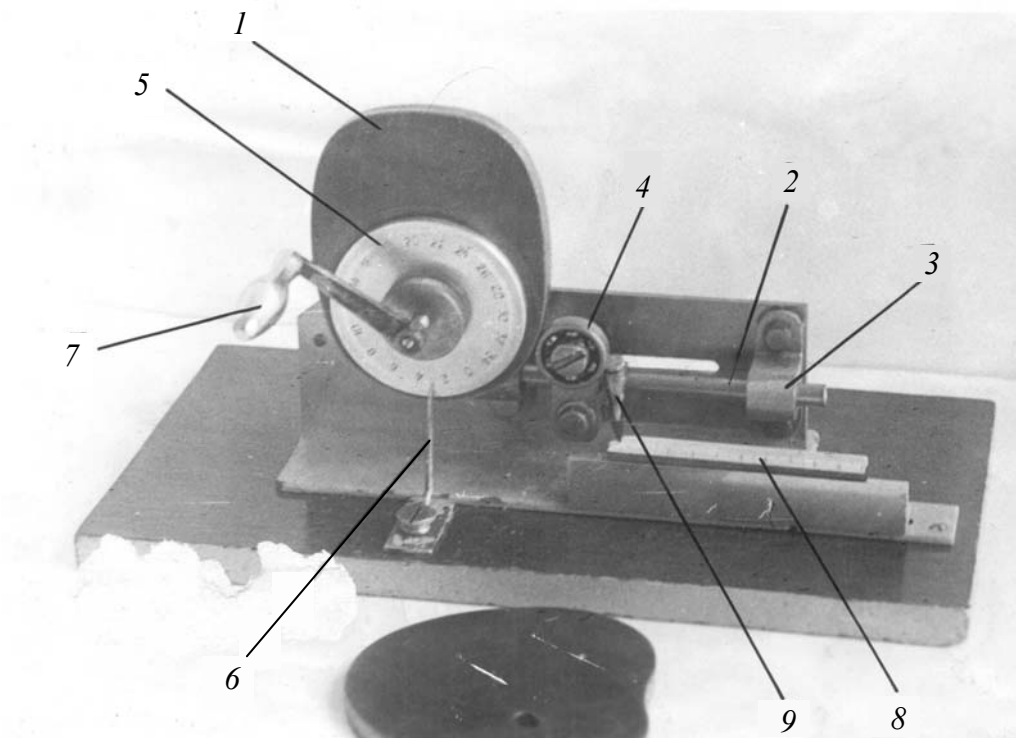


Рис. 5.3. Экспериментальная установка – кулачковый механизм

Для уменьшения трения между кулачком и толкателем последний снабжен роликом 4, который представлен радиальным подшипником качения. Замыкание между кулачком и толкателем осуществляется при помощи пружины (она на рисунке не видна). На оси кулачка посажен транспортер 5, по которому относительно стрелки-указателя 6 ведется отсчет углов поворота кулачка. Поворот кулачка осуществляется рукояткой 7. Соответствующее перемещение толкателя отсчитывается по линейке 8, для чего на толкателе укреплен стрелка-указатель 9.

### ***Практическая часть***

Ознакомиться с кулачковым механизмом, определить углы давления на фазах удаления и возвращения.

Принадлежности для работы

1. Экспериментальная установка – кулачковый механизм.
2. Линейка, штангенциркуль.
3. Бланк протокола.

### **Порядок выполнения работы**

1. Произвести измерения основных размеров кулачкового механизма. Результаты внести в протокол.

2. Поворачивая кулачок 1 (рис. 5.3) по направлению, указанному стрелкой, через каждые  $10^\circ$  записывать соответствующее перемещение толкателя 2. Результаты измерений внести в таблицу протокола.

Предварительно необходимо установить транспортир 5, по которому записывается угол поворота кулачка, таким образом, чтобы в начале фазы удаления отметка «0» на транспортире совпадала с указателем 6. При этом необходимо обратить внимание на направление вращения кулачка. Линейку 8, по которой записывается перемещение толкателя 2, установить таким образом, чтобы в крайнем (начальном) положении толкателя отметка «0» линейки совпадала со стрелкой-указателем 9, укрепленной на толкателе.

3. По полученным результатам построить диаграмму зависимости перемещения толкателя  $S$  от угла поворота кулачка  $\varphi$  –  $S = f(\varphi)$ . (Построение производится на обратной стороне протокола методом графического дифференцирования, см. прил. 3). На диаграмме следует отметить все полученные фазовые углы и ход толкателя. Все эти данные следует занести в протокол (рядом с диаграммой).

4. Методом графического дифференцирования диаграммы  $S = f(\varphi)$  построить диаграмму аналогов скоростей  $\frac{dS}{d\varphi} = f(\varphi)$  (вели-

чина полюсного расстояния  $H$  на координатной сетке  $\frac{dS}{d\varphi} - \varphi$  в про-

токоле подобрана так, чтобы масштаб аналога скорости получился таким же, как и масштаб перемещения, т. е.  $\mu_{\frac{dS}{d\varphi}} = \mu_S = 1 \frac{\text{мм}}{\text{мм}}$ ). По полу-

ченной диаграмме следует измерить величины максимальных значений аналогов скоростей в фазах удаления  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)_{\max}$  и возвраще-

ния  $\left(\frac{dS}{d\varphi}\right)'_{\max}$ , а также соответствующие им перемещения толкателя  $S$  и  $S'$ . Результаты внести в протокол.

5. По формулам (5.8) и (5.9) вычислить значения тангенсов углов давления на фазах удаления и возвращения ( $\operatorname{tg}\delta_{\max}$  и  $\operatorname{tg}\delta'_{\max}$ ), определить эти углы. Вычисления и результаты внести в протокол.

### ***Контрольные вопросы***

1. Как называются входное и выходное звенья кулачкового механизма?
2. Каково назначение кулачкового механизма?
3. Что такое угол давления в кулачковом механизме?
4. Чему равен период цикла кулачкового механизма?
5. Для чего ищут экстремум на диаграмме аналогов скоростей?
6. Каково основное положительное свойство кулачкового механизма?



# Лабораторная работа № 6

## УРАВНОВЕШИВАНИЕ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЗВЕНА С ИЗВЕСТНЫМ РАСПОЛОЖЕНИЕМ НЕУРАВНОВЕШЕННЫХ МАСС

### *Общие положения*

Рассмотрим вращающееся звено  $I$  (рис. 6.1) (такое звено в дальнейшем будем называть ротором), установленное на своей оси в подшипниках  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ .

При вращении звена возникают силы инерции. Эти силы, изменяясь по величине и направлению, воздействуют на подшипники, что приводит к возникновению в них дополнительных (динамических) усилий, расшатывают опоры и основание и при недостаточной жесткости вызывают их вибрацию. Последнее особенно опасно в тех случаях, когда частота вибраций, вызванная силами инерции, совпадает с частотой собственных колебаний основания, т. е. при наличии резонанса.

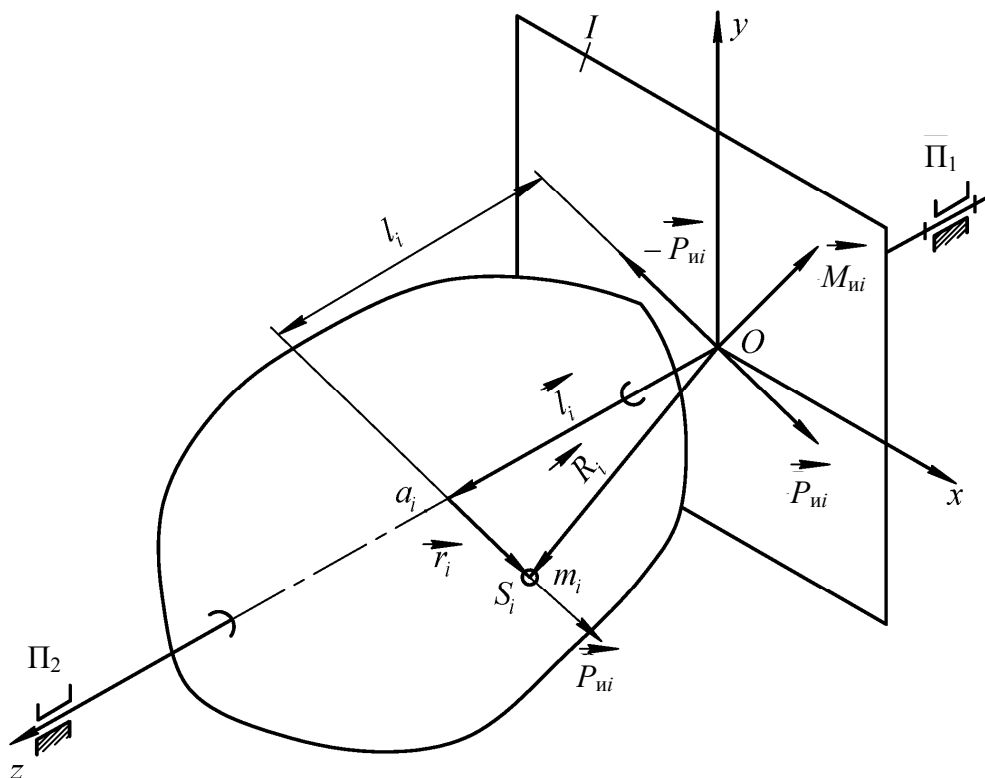


Рис. 6.1. Ротор

Поэтому все вращающиеся звенья – роторы (роторы электродвигателей, турбин, валы и т. д.) – подлежат уравниванию, заключающемуся в подборе дополнительных масс (противовесов), силы инерции которых частично или полностью уравнивают силы инерции роторов, и следовательно, частично или полностью уничтожаются дополнительные динамические усилия в опорах от этих сил.

При вращении ротора с постоянной угловой скоростью  $\omega$  к каждой элементарной массе  $m_i$  будет приложена центробежная сила инерции

$$\mathbf{P}_{ni} = m_i \mathbf{r}_i \omega^2, \quad (6.1)$$

где  $\mathbf{r}_i = \mathbf{O}_i \mathbf{S}_i$  – радиусы-векторы, определяющие расположение элементарных масс  $m_i$  относительно оси вращения  $z$ .

Систему распределенных по объему ротора сил  $\mathbf{P}_{ni}$  приведем в т.  $O$  (центр приведения), в точку пересечения оси вращения ротора с произвольно выбранной плоскостью  $I$  (плоскостью приведения), перпендикулярной этой оси. Для этого в т.  $O$  прикладываем две равные, но противоположно направленные силы  $\mathbf{P}_{ni}$  и  $-\mathbf{P}_{ni}$ . При переносе каждой силы  $\mathbf{P}_{ni}$  получаем элементарный момент  $\mathbf{M}_{ni}$  от пары сил  $\mathbf{P}_{ni}$  и  $-\mathbf{P}_{ni}$ :

$$\mathbf{M}_{ni} = \mathbf{R}_i \times \mathbf{P}_{ni}, \quad (6.2)$$

где  $\mathbf{R}_i$  – радиусы-векторы, определяющие расположение масс  $m_i$  относительно центра приведения  $O$ .

Из рис. 6.1 следует, что  $\mathbf{R}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{r}_i$ ,  $\mathbf{l}_i = l_i \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{r}_i = x_i \mathbf{i} + y_i \mathbf{j}$ , где  $l_i$  – расстояние между силами  $\mathbf{P}_{ni}$  и плоскостью приведения  $I$ .

Суммируем все силы  $\mathbf{P}_{ni}$ , приложенные в т.  $O$ , и все моменты сил  $\mathbf{M}_{ni}$ :

$$\mathbf{P}_n = \sum \mathbf{P}_{ni} = \omega^2 \sum m_i \mathbf{r}_i, \quad (6.3)$$

$$\mathbf{M}_{nO} = \sum \mathbf{M}_{ni} = \sum (\mathbf{R}_i \times \mathbf{P}_{ni}) = \sum (\mathbf{l}_i + \mathbf{r}_i) \times m_i \mathbf{r}_i \omega^2 = \omega^2 \sum \mathbf{l}_i \times m_i \mathbf{r}_i, \quad (6.4)$$

где  $\mathbf{P}_n$  – главный вектор центробежных сил инерции, приложенный в т.  $O$ ;  $\mathbf{M}_{nO}$  – главный момент сил инерции относительно т.  $O$ ;  $\sum m_i \mathbf{r}_i$  – статический момент ротора (звена).

Для придания условию (6.4) удобной для дальнейших расчетов графической формы, например для векторного суммирования, умножим (6.4) справа векторно на  $\mathbf{k}$  и, используя тождество

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}), \quad (6.5)$$

получим

$$\mathbf{M}_{иО} \times \mathbf{k} = \omega^2 \sum \mathbf{l}_i \times m_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{k} = \omega \sum (m_i \mathbf{r}_i (\mathbf{l}_i \mathbf{k}) - m_i \mathbf{k} (\mathbf{l}_i \mathbf{r}_i)) = \omega^2 \sum m_i l_i \mathbf{r}_i, \quad (6.6)$$

где  $\sum m_i l_i \mathbf{r}_i$  – центробежный момент инерции  $J_{иl}$  ротора относительно оси его вращения  $z$  и плоскости  $l$ .

Таким образом, систему центробежных сил инерции, действующих на вращающийся ротор, всегда можно заменить эквивалентной системой сил, состоящей из главного вектора сил инерции  $\mathbf{P}_и$ , приложенного в произвольно выбранной т.  $O$  ротора, и одной пары, момент которой  $\mathbf{M}_{иО}$  равен главному моменту сил инерции относительно этой же точки.

Соотношение (6.6) позволяет ввести вектор

$$\mathbf{M}_{иi}^* = \mathbf{M}_{иi} \mathbf{k}_i = \omega^2 m_i \mathbf{r}_i l_i,$$

где  $\mathbf{M}_{иi}^*$  – это вектор  $\mathbf{M}_{иi}$ , повернутый на  $90^\circ$  в плоскости, перпендикулярной оси вращения.

Тогда вместо главного вектора  $\mathbf{M}_{иi}$  можно использовать вектор

$$\mathbf{M}_и = \sum \mathbf{M}_{иi}^* = \omega^2 \sum m_i \mathbf{r}_i l_i, \quad (6.7)$$

который равен по величине вектору  $\mathbf{M}_{иО}$ , и расположен перпендикулярно ему.

Ротор считается статически уравновешенным, если главный вектор инерции

$$\mathbf{P}_и = 0. \quad (6.8)$$

Динамически уравновешенным считается ротор, если главный момент сил инерции

$$\mathbf{M}_{иО} = 0$$

или

$$\mathbf{M}_и = 0, \quad (6.9)$$

и, наконец, ротор считается полностью уравновешенным, если

$$\mathbf{P}_и = 0 \text{ и } \mathbf{M}_и = 0. \quad (6.10)$$

Условие статической уравновешенности получим из выражения (6.3). Так как  $\mathbf{P}_и = 0$ , а  $\omega \neq 0$ , то  $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$ .

Как известно из теоретической механики, статический момент равен  $m \mathbf{r}_S$ , где  $m$  – масса всего тела (ротора), а  $\mathbf{r}_S$  – расстояние от центра масс тела  $S$  до оси вращения. Следовательно,

$$m \mathbf{r}_S = \sum m_i \mathbf{r}_i = 0 \quad (6.11)$$

и есть условие статического уравновешивания ротора.

Условие (6.11) будет удовлетворено только в том случае, когда  $r_s = 0$ , т. е. когда центр масс звена (ротора) лежит на оси его вращения. Условие динамической уравновешенности получим из выражения (6.7). Так как  $M_{\text{и}} = 0$ , а  $\omega \neq 0$ , то

$$\sum m_i \mathbf{r}_i l_i = 0. \quad (6.12)$$

Как известно из теоретической механики, оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными осями инерции. Значит, условие (6.12) будет выполнено только в том случае, когда ось вращения ротора совпадет с одной из его главных осей инерции.

Условиями полной уравновешенности ротора являются выражения (6.11) и (6.12):  $\sum m_i \mathbf{r}_i = 0$  и  $\sum m_i \mathbf{r}_i l_i = 0$  или

$$r_s = 0 \text{ и } J_{r_l} = 0. \quad (6.13)$$

Условия (6.13) будут выполнены одновременно, если ось вращения ротора совпадает с одной из главных центральных осей инерции звена, т. е. такой главной осью инерции, которая проходит через центр масс звена.

В общем случае главный вектор  $\mathbf{P}_{\text{и}}$  и главный момент  $\mathbf{M}_{\text{и}O} = \mathbf{M}_{\text{и}}$  не равны нулю и задача уравновешивания вращающихся звеньев сводится к подбору дополнительных масс (противовесов), силы инерции которых частично или полностью уравновешивают главный вектор сил инерции  $\mathbf{P}_{\text{и}}$  и главный момент  $\mathbf{M}_{\text{и}}$ .

### ***Оборудование и описание установки***

Общий вид установки представлен на рис. 6.2. Установка имеет ротор, который состоит из вала 10 и пяти жестко закрепленных на нем дисков 12. Три средних диска предназначены для установки на них грузов 11, которые могут создать неуравновешенность любого вида. Два крайних диска используются для установки противовесов при уравновешивании сил инерции. Вал смонтирован на двух стойках. Левый конец вала закреплен в сферическом шарикоподшипнике, позволяющем валу, кроме вращательного движения, осуществлять поворот в горизонтальной плоскости. Правый конец вала закреплен в радиальном шарикоподшипнике, установленном в каретке 5. Каретка может перемещаться на роликах 8 по направляющей 7 в горизонтальной плоскости и удерживается в центральном положении при помощи пружин растяжения 6. Основанием станка служит плита 3, на которой жестко закреплены стойки вала с дисками (ротора).

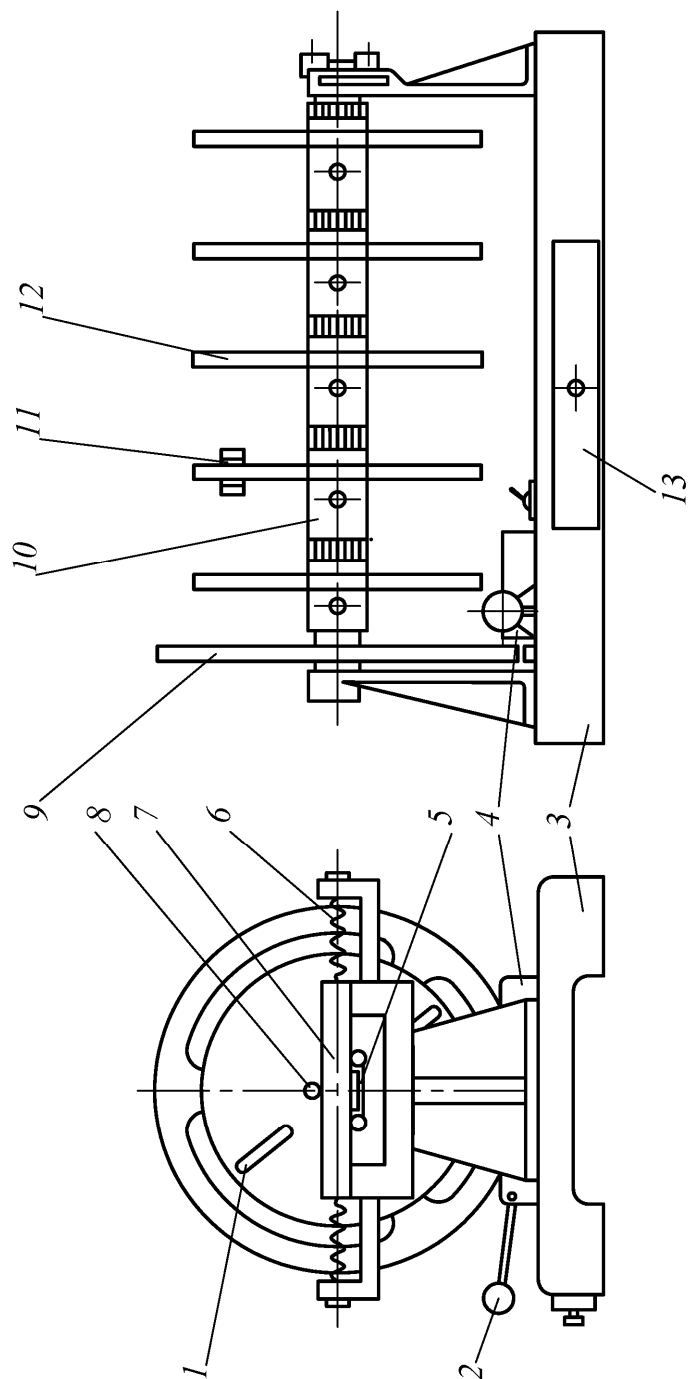


Рис. 6.2. Экспериментальная установка

Вращение ротора осуществляется от электродвигателя 4 посредством фрикционной передачи. Электродвигатель смонтирован у левой стойки на качающемся рычаге 2. Под рычагом установлен выключатель двойного действия. При нажатии рукоятки рычага вниз фрикционный диск прижимается к шкиву 9, одновременно автоматически включается электродвигатель и разгоняется ротор. При освобождении рукоятки под действием силы тяжести двигателя последний отключается от сети. В комплекте установки имеются грузы и противовесы массой 40, 50, 60 и 70 г, хранящиеся в выдвижном ящике 13. Грузы закрепляются в одном из радиальных пазов 1 диска, другой сквозной паз служит для уравнивания диска. На диске рядом с пазом для крепления грузов привернута шкала, позволяющая установить груз на нужный радиус. В осевом направлении диски ограничиваются кольцами, жестко закрепленными на валу. Кольца градуированы через один градус, а ступицы дисков имеют риску, позволяющую установить диск под необходимый угол. Фиксация дисков осуществляется винтами.

### **Порядок уравнивания ротора**

Изобразим ротор с известным расположением неуравновешенных масс (рис. 6.3).

Неуравновешенные массы  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  расположены в плоскостях (дисках) 1, 2 и 3. Положения центра массы каждого груза в плоскостях заданы радиусами-векторами  $\mathbf{r}_1$ ,  $\mathbf{r}_2$ ,  $\mathbf{r}_3$ , направление которых определяется углами  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ .

Величины масс и параметры, определяющие их расположение, выбираются по указанию преподавателя из таблицы.

Положение плоскостей 1, 2 и 3 относительно плоскости  $A$  определяется соответственно координатами  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ . Противовесы устанавливаются в плоскостях  $A$  и  $B$ , расстояние между которыми  $l_0$ . Для всех вариантов  $l_1 = 80$  мм,  $l_2 = 160$  мм,  $l_3 = 240$  мм и  $l_0 = 320$  мм.

#### **6.1. Статическое уравнивание**

Выберем в качестве плоскости приведения плоскость (диск)  $A$ . Главный вектор сил инерции  $\mathbf{P}_и$  неуравновешенных масс  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m_3$  будет равен

$$\mathbf{P}_и = \mathbf{P}_{и1} + \mathbf{P}_{и2} + \mathbf{P}_{и3}. \quad (6.14)$$

Для уравнивания вектора  $\mathbf{P}_и$  необходимо установить в плоскости  $A$  противовес массой  $m_{ст}^A$ , сила инерции которого окажется равной и противоположной  $\mathbf{P}_и$ :

$$\mathbf{P}_и + \mathbf{P}_{ст}^A = 0. \quad (6.15)$$

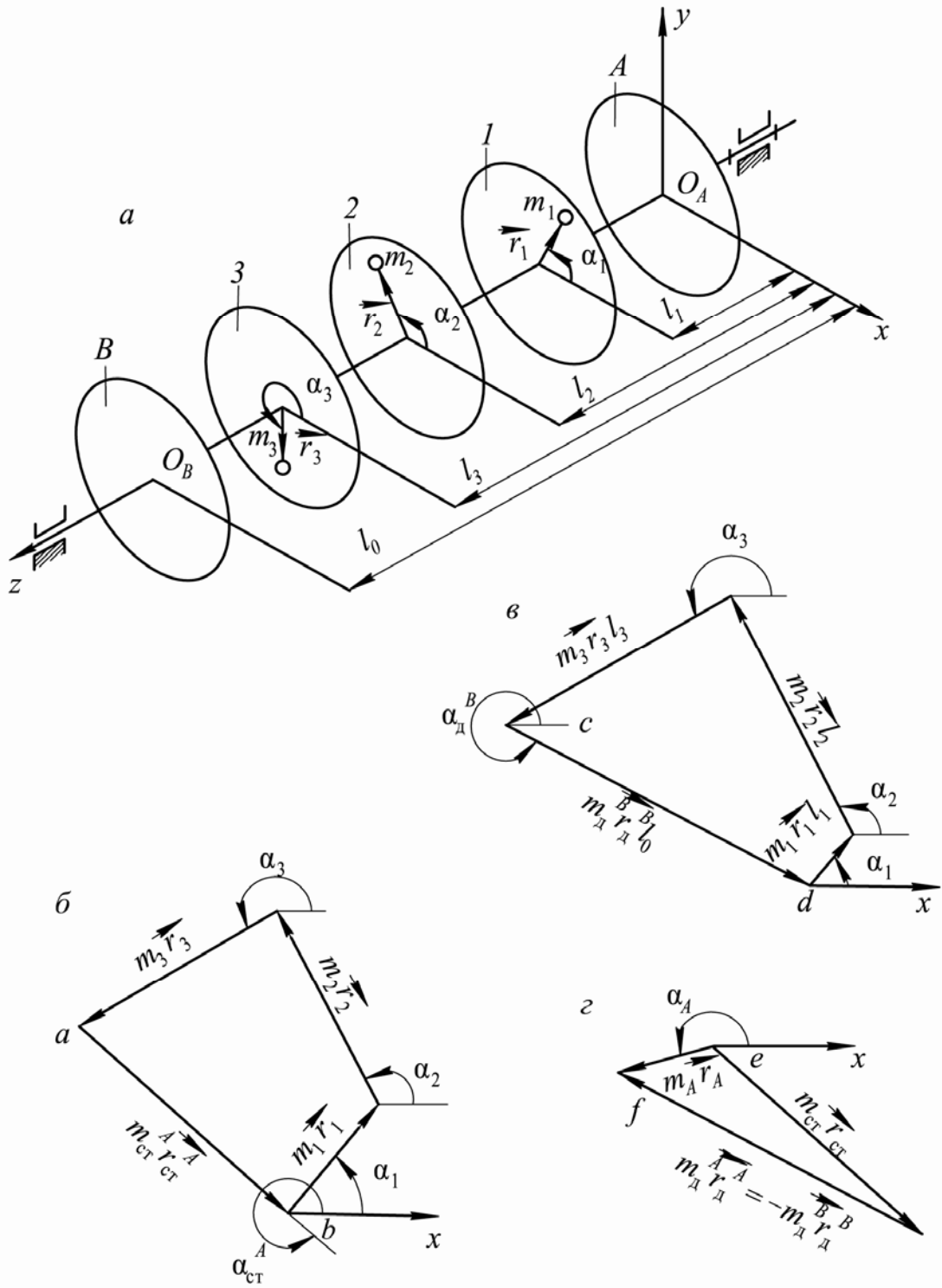


Рис. 6.3. Пример выполнения работы:

*a* – ротор с дисбалансами; *б* – диаграмма для статического уравнивания; *в* – диаграмма для динамического уравнивания; *г* – диаграмма для полного уравнивания ротора

Для определения массы противовеса  $m_{\text{ст}}^A$  и параметров, определяющих его положение в плоскости  $A - r_{\text{ст}}^A$  и  $\alpha_{\text{ст}}^A$ , запишем условие (6.15) в виде выражения (6.11):

$$m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + m_{\text{ст}}^A \mathbf{r}_{\text{ст}}^A = 0. \quad (6.16)$$

Вычисляем значения  $m_i r_i$  (где  $i = 1, 2, 3$ ), выбираем масштабный коэффициент (далее просто масштаб)  $\mu_{mr} = \dots$  (г·мм/мм) и, согласно уравнению (6.16), строим векторный многоугольник (рис. 6.3, б), из которого определяем величину  $m_{\text{ст}}^A r_{\text{ст}}^A = ab \mu_{mr}$  вектора  $m_{\text{ст}}^A \mathbf{r}_{\text{ст}}^A$ , а также его направление – угол  $\alpha_{\text{ст}}^A$ .

#### Исходные данные

Варианты	Массы грузов			Радиусы вращения			Углы		
	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$r_1$	$r_2$	$r_3$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$
	грамм			миллиметр			градус		
1	40	50	70	90	80	70	30	120	210
2	50	40	60	70	90	80	20	100	200
3	60	70	50	80	70	85	10	110	210
4	70	60	40	70	80	90	60	150	240
5	40	60	70	85	70	65	40	140	220
6	50	40	60	80	90	75	50	170	260
7	60	70	50	80	75	90	45	135	230
8	70	50	40	70	80	90	90	180	270
9	40	50	70	90	85	80	100	190	280
10	50	40	60	85	90	75	110	190	270
11	60	70	50	80	75	85	130	170	280
12	70	60	40	70	85	90	140	220	310
13	40	60	70	90	80	70	120	210	300

Выбирая из имеющегося комплекта противовес массой  $m_{\text{ст}}^A$  (массы противовесов  $m_i$  здесь и далее выбираются из условия, чтобы радиусы  $r_i$  были в пределах 40–90 мм), определяем



$$r_{\text{ст}}^A = \frac{m_{\text{ст}}^A r_{\text{ст}}^A}{r_{\text{ст}}^A} = \frac{ab\mu_{mr}}{m_{\text{ст}}^A}. \quad (6.17)$$

В плоскости  $A$  устанавливаем противовес  $m_{\text{ст}}^A$  на расстоянии  $r_{\text{ст}}^A$  под углом  $\alpha_{\text{ст}}^A$  и проверяем статическую уравновешенность ротора: при повороте ротора на любой угол он должен находиться в безразличном положении, т. е. находиться в равновесии.

## 6.2. Динамическое уравновешивание

Главный момент сил инерции относительно т.  $O$  (точки пересечения оси вращения ротора с плоскостью  $l$ ) равен

$$\mathbf{M}_{\text{и}} = \mathbf{M}_{\text{и}1} + \mathbf{M}_{\text{и}2} + \mathbf{M}_{\text{и}3}. \quad (6.18)$$

Его можно уравновесить равным, но противоположно направленным моментом. Для этого к заданной системе масс (включая и противовес для статического уравновешивания) добавим две равные, расположенные на противоположных направлениях в плоскостях  $A$  и  $B$ , массы (противовесы)  $m_{\text{д}}^A$  и  $m_{\text{д}}^B$ , силы инерции которых образуют пару сил с моментом  $M_{\text{д}}$ , уравновешивающим  $M_{\text{и}}$ .

$$\mathbf{M}_{\text{и}} + \mathbf{M}_{\text{д}} = 0. \quad (6.19)$$

Запишем условие (6.19) в виде выражения (6.12)

$$m_1 \mathbf{r}_1 l_1 + m_2 \mathbf{r}_2 l_2 + m_3 \mathbf{r}_3 l_3 + m_{\text{д}}^B \mathbf{r}_{\text{д}}^B l_0 = 0. \quad (6.20)$$

где  $\mathbf{r}_{\text{д}}^B$  – радиус-вектор противовеса, устанавливаемого в плоскости  $B$ ;  $l_0$  – расстояние между плоскостями  $A$  и  $B$ .

Вычисляем значения  $m_i r_i l_i$  (где  $i=1, 2, 3$ ), выбираем масштаб  $\mu_{mrl} = \dots$  (г·мм<sup>2</sup>/мм) и, согласно уравнению (6.20), строим векторный многоугольник (рис. 6.3, в).

Величина вектора  $m_{\text{д}}^B \mathbf{r}_{\text{д}}^B l_0$  равна  $m_{\text{д}}^B r_{\text{д}}^B l_0 = cd\mu_{mrl}$ , а его направление определяется углом  $\alpha_{\text{д}}^B$ .

Выбирая массу противовеса  $m_{\text{д}}^B$ , определяем радиус

$$r_{\text{д}}^B = \frac{m_{\text{д}}^B r_{\text{д}}^B l_0}{m_{\text{д}}^B l_0} = \frac{cd\mu_{mrl}}{m_{\text{д}}^B l_0}.$$

Для динамического уравнивания необходимо установить в плоскости  $B$  противовес  $m_d^B$ , на расстоянии  $r_d^B$  под углом  $\alpha_d^B$ , а в плоскости  $A$  установить противовес  $m_d^A = m_d^B$  на расстоянии  $r_d^A = r_d^B$  под углом  $\alpha_d^A = \alpha_d^B \pm 180^\circ (\alpha < 360^\circ)$ .

Таким образом, полное уравнивание достигается установкой трех противовесов. Однако два из них ( $m_{ст}^A$  и  $m_d^A$ ) находятся в одной плоскости и могут быть заменены одним.

### 6.3. Полное уравнивание

В итоге задача уравнивания центробежных сил инерции может быть решена постановкой двух противовесов. В плоскости  $B$  устанавливаем противовес  $m_B = m_d^B$  с координатами  $r_B = r_d^B$  и  $\alpha_B = \alpha_d^B$ , а в плоскости  $A$  – противовес  $m_A$ , величину и расположение которого определим из условия

$$m_A \mathbf{r}_A = m_{ст}^A \mathbf{r}_{ст}^A + m_d^A \mathbf{r}_d^A. \quad (6.21)$$

Согласно уравнению (6.21), строим в масштабе  $\mu_{mr} = \dots$  (Г·мм/мм) векторный треугольник (рис. 6.3, з), из которого определяем величину вектора  $m_A r_A = e f \mu_{mr}$  и его направление – угол  $\alpha_A$ . Выбираем массу противовеса  $m_A$  и определяем  $r_A$ :

$$r_A = \frac{m_A r_A}{m_A} = \frac{e f \mu_{mr}}{m_A}. \quad (6.22)$$

Устанавливаем в плоскости  $A$  противовес  $m_A$  на расстоянии  $r_A$  под углом  $\alpha_A$ .

### 6.4. Проверка уравновешенности ротора

Для проверки полученных результатов (подразд. 6.2 и 6.3) определяем массы и положения противовесов в плоскостях  $A$  и  $B$  вторым способом, используя при этом аналитическое решение. При первом способе решения система распределенных сил инерции  $\mathbf{P}_{иi}$  была заменена эквивалентной системой сил, состоящей из главного вектора сил инерции  $\mathbf{P}_и$  и главного момента сил инерции  $\mathbf{M}_и$ .

Из теоретической механики известно, что, в свою очередь, система сил  $\mathbf{P}_и$  и  $\mathbf{M}_и$  может быть выражена в виде двух скрещивающихся сил (крест-сил), расположенных в двух плоскостях, перпендикулярных оси

вращения. В данной лабораторной работе это будут силы  $\mathbf{P}_и^A$  и  $\mathbf{P}_и^B$ , которые расположены в плоскостях  $A$  и  $B$  и вращаются вместе с ротором.

Следовательно, динамическую неуравновешенность можно устранить двумя противовесами  $m_A$  и  $m_B$ , установленными в плоскостях  $A$  и  $B$ , силы инерции которых уравновешивают силы  $\mathbf{P}_и^A$  и  $\mathbf{P}_и^B$ . Вектор неуравновешенной силы  $\mathbf{F}_и$  можно записать в виде  $\mathbf{F}_и = \omega^2 m \mathbf{r}$  или  $\mathbf{F}_и = \omega^2 \mathbf{D}$ , где вектор  $\mathbf{D} = m \mathbf{r}$  называется вектором дисбаланса. Аналогично момент силы инерции  $\mathbf{M}_и$  можно представить в виде  $\mathbf{M}_и = \omega^2 m r l = \omega^2 \mathbf{D} l = \omega^2 \mathbf{M}_D$ , где  $\mathbf{M}_D$  – вектор момента дисбаланса. Таким образом, неуравновешенность ротора можно устранить двумя противовесами  $m_A$  и  $m_B$ , величину и место расположения которых можно определить из проекций векторных уравнений моментов дисбалансов относительно т.  $O_A$  и  $O_B$  (рис. 6.3,  $a$ ) на оси координат:

$$\sum M_{Dix}^A + M_{DBx}^A = 0, \quad (6.23)$$

$$\sum M_{Diy}^A + M_{DBy}^A = 0, \quad (6.24)$$

$$\sum M_{Dix}^B + M_{DAx}^B = 0, \quad (6.25)$$

$$\sum M_{Diy}^B + M_{DAy}^B = 0, \quad (6.26)$$

где, например,  $\sum M_{Dix}^A = \sum m_i r_i l_i \cos \alpha_i$ , ( $i=1, 2, 3$ ) – сумма проекций моментов дисбалансов неуравновешенных грузов  $m_i$  относительно т.  $O_A$  на ось  $x$ , а  $l_i$  – расстояние от плоскости  $A$  до плоскости (диска)  $i$ ;  $M_{DBx}^A = m_B r_B l_0 \cos \alpha_B$  – проекция вектора момента  $\mathbf{M}_{DB}$  дисбаланса противовеса  $m_B$  относительно т.  $O_A$  на ось  $x$ ;  $\sum M_{Diy}^B = \sum m_i r_i l_i^* \sin \alpha_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) – сумма проекций моментов дисбалансов неуравновешенных грузов  $m_i$  относительно т.  $O_B$  на ось  $y$ , а  $l_i^*$  – расстояние от диска  $B$  до диска  $i$ ;  $M_{DAy}^B = m_A r_A l_0 \cos \alpha_A$  – проекция вектора момента дисбаланса  $\mathbf{M}_{DA}$  противовеса  $m_A$  относительно т.  $O_B$  на ось  $y$ .

Сначала из уравнений (6.23)–(6.26) определяются значения  $M_{DBx}^A$ ,  $M_{DBy}^A$ , и  $M_{DAx}^B$ ,  $M_{DAy}^B$ , затем определяются величины моментов дисбалансов:

$$M_{DA} = \sqrt{(M_{DAx}^B)^2 + (M_{DAy}^B)^2}, \quad (6.27)$$

$$M_{DB} = \sqrt{(M_{DBx}^A)^2 + (M_{DBy}^A)^2}. \quad (6.28)$$

Далее определяются значения  $r_A$  и  $r_B$ :

$$r_A = \frac{M_{DA}}{m_A l_0} \text{ и } r_B = \frac{M_{DB}}{m_B l_0},$$

где массы  $m_A$  и  $m_B$  приняты равными массам, использованным при графическом решении в подразд. 6.3.

И, наконец, определяются углы  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  из выражений  $\cos \alpha_A = \frac{M_{DAx}^B}{M_{DA}}$  и  $\cos \alpha_B = \frac{M_{DBx}^A}{M_{DB}}$ , а так как полученным значениям  $\cos \alpha_A$  и  $\cos \alpha_B$  соответствуют два значения углов  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$ , то для выбора необходимого значения воспользуемся знаками  $\sin \alpha_A$  и  $\sin \alpha_B$ .

Оцениваем точность результатов, полученных графическим (подразд. 6.3) и аналитическим методами (подразд. 6.4) путем определения полной уравновешенности ротора на установке.

Установив противовесы  $m_A$  и  $m_B$ , разгоняем ротор до скорости  $\omega > \omega_k$ , где  $\omega_k$  – критическая скорость, соответствующая резонансной частоте колебаний. При условии уравновешенности подпружиненный (правый) конец вала не должен иметь колебаний на резонансных частотах, наблюдающихся в режиме выбега.

### ***Практическая часть***

Ознакомиться со способами уравновешивания вращающегося звена с помощью установки дополнительных масс (противовесов). Произвести уравновешивание ротора экспериментальной установки.

Принадлежности для работы

1. Экспериментальная установка ТММ-35.
2. Линейка, угольник, транспортир.
3. Бланк протокола.

### ***Порядок выполнения работы***

1. По указанию преподавателя из таблицы выбрать массы  $m_i$ , координаты  $r_i$  и  $\alpha_i$  неуравновешенных грузов.

2. Вычислить дисбалансы неуравновешенных грузов  $D_i = m_i r_i$ . По найденным дисбалансам построить векторный многоугольник (уравне-

ние (6.16), рис. 6.3, б). Задавшись массой противовеса  $m_{\text{ст}}^A$ , определить  $r_{\text{ст}}^A$  и по чертежу  $\alpha_{\text{ст}}^A$ .

3. Подсчитанный по п. 2 противовес установить на одном из дисков  $A$  или  $B$ .

4. Проверить статическую уравновешенность: при повороте вручную ротора на любой угол он должен находиться в положении равновесия.

5. Проверить динамическую неуравновешенность: при включении двигателя и разгоне ротора правый конец вала начинает совершать колебания в горизонтальной плоскости.

6. Вычислить моменты дисбалансов неуравновешенных грузов  $M_{Di} = m_i r_i l_i$ . По вычисленным моментам построить векторный многоугольник (уравнение (6.20), рис. 6.3, в). Задавшись массой противовеса  $m_d^B$ , определить  $r_d^B$  и по чертежу  $\alpha_d^B$ .

7. Установить противовес  $m_d^B$  на правом диске  $B$ .

8. Построить векторный треугольник дисбалансов (уравнение (6.21), рис. 6.3, г). Задавшись массой противовеса  $m_A$ , определить  $r_A$  и по чертежу –  $\alpha_A$ .

9. Противовес  $m_A$  установить на левый крайний диск  $A$ .

10. Проверить статическую уравновешенность (п. 4).

11. Разогнать ротор и убедиться в его полной уравновешенности. При выполнении этого условия правый конец ротора не должен иметь значительных колебаний.

12. Определить значения координат расположения противовесов  $m_A$  и  $m_B$  аналитическим методом (подразд. 6.4).

13. Значения координат установки  $r_A$  и  $r_B$ ,  $\alpha_A$  и  $\alpha_B$  противовесов  $m_A$  и  $m_B$ , полученные в п. 6 и п. 8, сравнить со значениями, определенными в п. 12. При существенной разности координат окончательно выбрать те их значения, при которых имеет место меньшая полная неуравновешенность ротора, оцениваемая амплитудой его колебаний (п. 11).

14. Оформить протокол лабораторной работы.

### **Контрольные вопросы**

1. Что такое неуравновешенность? Каковы вредные последствия неуравновешенности вообще и когда она особенно опасна?

2. Какие задачи ставятся при статическом и динамическом уравновешивании звеньев?

3. Напишите в нескольких видах условие статической уравновешенности звена.

4. Напишите в нескольких видах условие динамической уравновешенности звена.

5. Сколько уравновешивающих грузов необходимо для статического уравновешивания?

6. Сколько уравновешивающих грузов необходимо для полной уравновешенности звена?

7. Как должны размещаться уравновешивающие грузы при статическом и динамическом уравновешивании?

8. Может ли полностью уравновешенное звено испытывать при вращении внутренние напряжения и получать деформации от действия сил инерции?

9. Какие оси звена являются главными, центральными?

10. Как осуществляется проверка статической и динамической уравновешенности в проделанной работе?

# Лабораторная работа № 7

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ И ПОКОЯ

### Общие сведения

В данной лабораторной работе определение коэффициента трения производится с использованием установки, где обеспечивается возможность непосредственного измерения силы трения.

Основной частью установки ТММ-32 (рис. 7.1) является каретка 3, совершающая возвратно-поступательное движение на роликах 2 по основанию 13. Движение каретки осуществляется при помощи бесконечного троса 17, надетого на ролики 14 и 18. Ролик 18 получает вращение от реверсивного электродвигателя 1. На каретке 3 крепится сменная плита 4, на которую укладывается кольцевой поверхностью образец 5. Плиты 4 и образцы 5 могут быть выполнены из различных материалов.

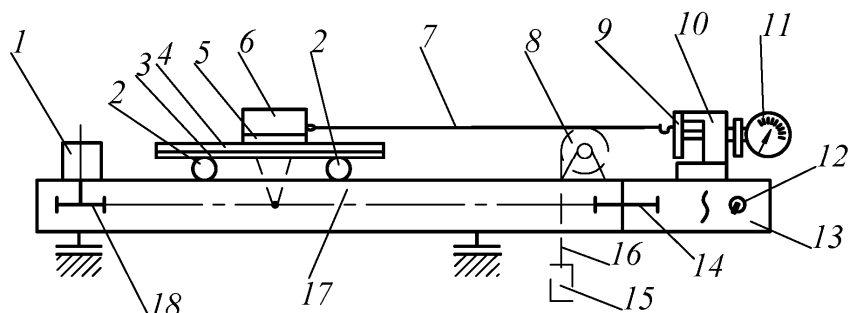


Рис. 7.1. Лабораторная установка ТММ-32

Соприкасающиеся поверхности образца и плиты образуют исследуемую пару трения. Для увеличения нормальной реакции и, естественно, силы трения, образец 5 дополняется грузом 6. Груз 6 с помощью жесткого троса 7 прикреплен к измерительной балочке 9, выполненной из пружинной закаленной стали и закрепленной на кронштейне 10. На этом же кронштейне установлен индикатор часового типа 11, который измерительным наконечником упирается в балочку 9.

При движении каретки 3 влево образец 5 с грузом 6, лежащие на плите 4, стремятся сдвинуться (за счет сил трения) вместе с кареткой

и через трос 7 вызывают изгиб балочки 9. Усилие упругой деформации балочки удерживает груз 6 с образцом 5 на месте, в результате происходит движение плиты относительно образца. Сила трения скольжения при этом равна

$$F = Nf, \quad (7.1)$$

где  $N$  – нормальная реакция, равная весу образца 5 с грузом 6;  $f$  – коэффициент трения скольжения.

Эта сила трения целиком, без всяких потерь, воспринимается балочкой 9. Деформация изгиба балочки измеряется индикатором 11. Показания индикатора пропорциональны силе трения:

$$F = kv, \quad (7.2)$$

где  $k$  – коэффициент пропорциональности (тарировочный коэффициент);  $v$  – число делений по шкале индикатора.

На установке можно также определить силу трения покоя (при трогании с места). Для этого жесткий трос 7, соединяющий груз 6 с балкой 9, заменяется пружиной 19 (рис. 7.2).

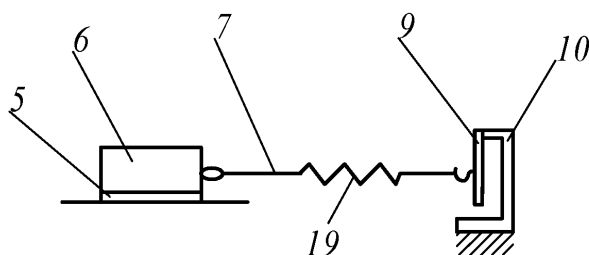


Рис. 7.2. Схема для определения силы трения покоя

Жесткость этой пружины небольшая, поэтому нарастание силы, приложенной к образцу 5 с грузом 6, будет происходить плавно. Груз 6 с образцом 5 вначале будет двигаться вместе с кареткой 3. Движение образца относительно каретки начнет происходить тогда, когда пружина разовьет усилие, равное силе трения покоя  $F_0$ . Этот момент нетрудно установить по максимальному показанию индикатора 11, так как стрелка индикатора при малой жесткости пружины 19 движется плавно и медленно.

Сила трения покоя равна

$$F_0 = Nf_0, \quad (7.3)$$

где  $f_0$  – коэффициент трения покоя.



Здесь величина силы трения определяется по показанию индикатора *11*:

$$F_0 = kV_0, \quad (7.4)$$

где  $V_0$  – максимальное показание индикатора, соответствующее моменту трогания образца с места.

Движение каретки (влево и вправо) осуществляется переключателем *12*, остановка каретки в крайних положениях происходит автоматически, для чего в корпусе *13* установки смонтированы два концевых выключателя (на схеме они не показаны).

### ***Практическая часть***

Определить опытным путем коэффициенты трения скольжения и покоя для различных материалов.

Необходимое оборудование

1. Установка ТММ-32 для определения коэффициента трения скольжения.
2. Образцы различных материалов.
3. Уровень.
4. Бензин и ветошь для протирания образцов.

### ***Порядок выполнения работы***

1. Ознакомиться с установкой и теоретическим обоснованием опыта.
2. Произвести тарировку измерительного устройства. Установку поставить на край стола с таким расчетом, чтобы груз *15* свободно проходил, не задевая его, и смонтировать по уровню в горизонтальном положении. На основании *13* установить съемный кронштейн с блоком *8*. К балочке *9* измерительного устройства прикрепить гибкую нить *16*, которую перекинуть через блок *8*. Индикатор *11* закрепить так, чтобы его шток касался балочки. Для удобства отсчета установить стрелку индикатора на нуль, поворачивая его шкалу.

К гибкой нити, перекинутой через блок, сначала подвесить тарировочный груз *15* массой 0,5 кг (вес  $\sim 5$  Н) и зафиксировать показание индикатора. Затем подвесить груз массой 1,5 кг (вес  $\sim 1,5$  Н) и снова зафиксировать показание индикатора.

Тарировочный коэффициент, т. е. цена деления шкалы индикатора, определяется по формуле

$$k = \frac{G_2 - G_1}{V_2 - V_1},$$

где  $G_2$  и  $G_1$  – вес тарировочных грузов;  $v_2$  и  $v_1$  – показания индикатора при соответствующих грузах в делениях.

3. Подготовить сменные плиты и образцы к выполнению работы по определению коэффициентов трения скольжения и покоя. После окончания тарировки кронштейн с блоком снять с основания. Поверхности трения сменных плит и образцов протереть обезжиривающим составом и дать им просохнуть. Согласно указанным преподавателем сочетаниям материалов пар трения, установить на каретку соответствующую плиту.

4. Определить силы для сухого трения скольжения. Включением электродвигателя каретку переместить в крайнее правое положение. **(Для того чтобы исключить соскакивание троса 17 с роликов 14 и 18 не перемещать каретку 3 вручную!!!)** Установить на нуль шкалу индикатора. На плиту 4 положить образец 5 с грузом 6 и соединить его гибким тросиком 7 с балочкой 9 измерительного устройства. Для определения силы трения скольжения выключателем 12 запустить двигатель 1. Каретка с плитой 4 будет передвигаться влево. Спустя 3...4 с после начала движения каретки зафиксировать показания индикатора.

Стрелка индикатора вследствие скачкообразного изменения силы трения для разных участков плиты будет иметь колебания в некотором диапазоне шкалы. Поэтому фиксируются крайние показания и по ним определяются средние значения  $v_{cp}$ , которые заносятся в бланк протокола. Опыт следует произвести с различными сочетаниями материалов. Определить силу трения скольжения по формуле (7.2) –  $F = kv_{cp}$ .

5. Определить силы трения покоя. Для этого между грузом 6 и измерительным устройством устанавливается пружинная тяга 19. Фиксацию показаний индикатора при движении каретки влево производить по максимальному отклонению стрелки. Каждый из опытов повторить не менее 3 раз (устанавливать образец с грузом в одном и том же месте плиты), средние значения  $v_{0cp}$  показаний индикатора занести в протокол и определить силу трения покоя по формуле (7.4) –  $F_0 = kv_{0cp}$ .

6. Определить коэффициенты трения скольжения  $f$  и покоя  $f_0$ . С учетом того что нормальная реакция  $N$  равна весу образца 5 –  $G_{об}$  с добавочным грузом 5 –  $G_{гр}$ , т. е.  $N = G = G_{об} + G_{гр}$  и с учетом соотношений (7.1)–(7.4) коэффициенты трения равны:

– скольжения  $f = F / G$  ;

– покоя  $f_0 = F_0 / G$  .

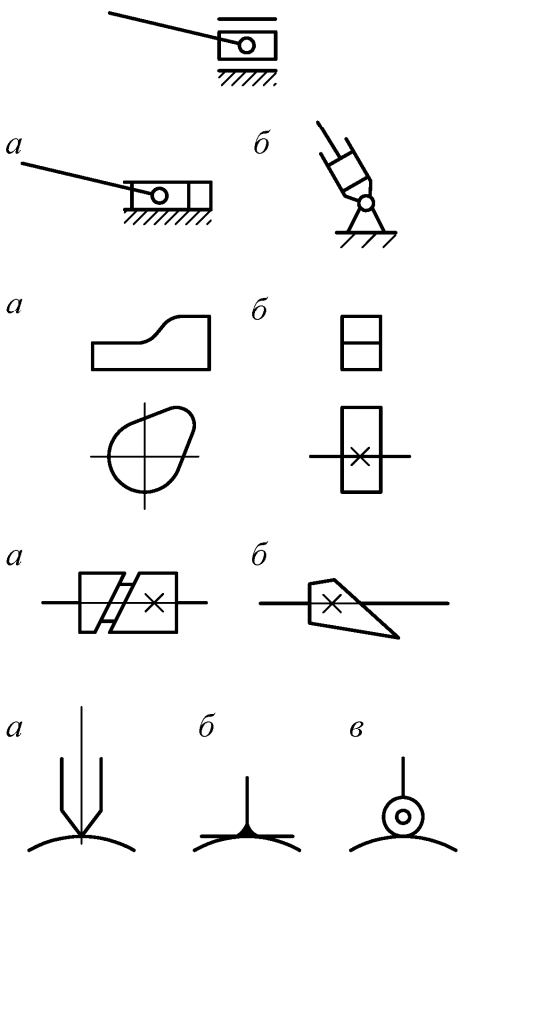
7. Оформить протокол.

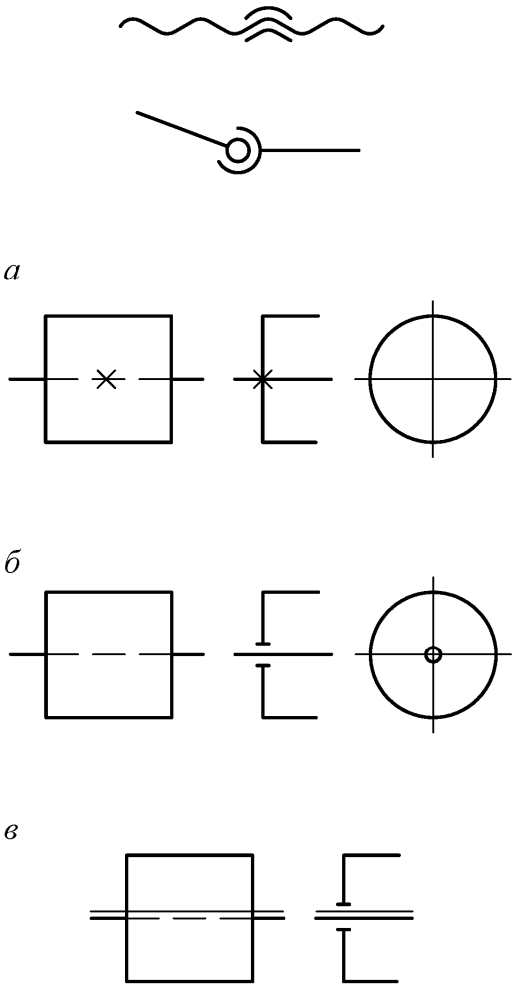
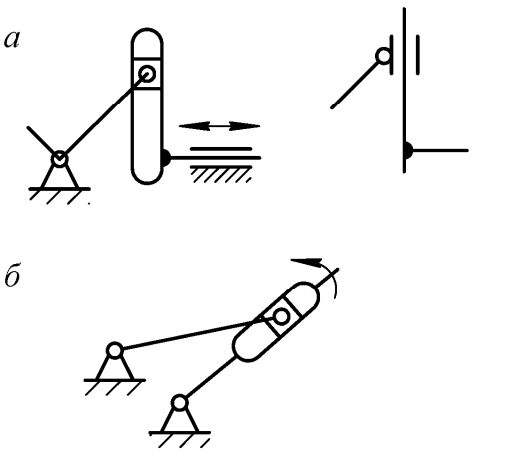
### ***Контрольные вопросы***

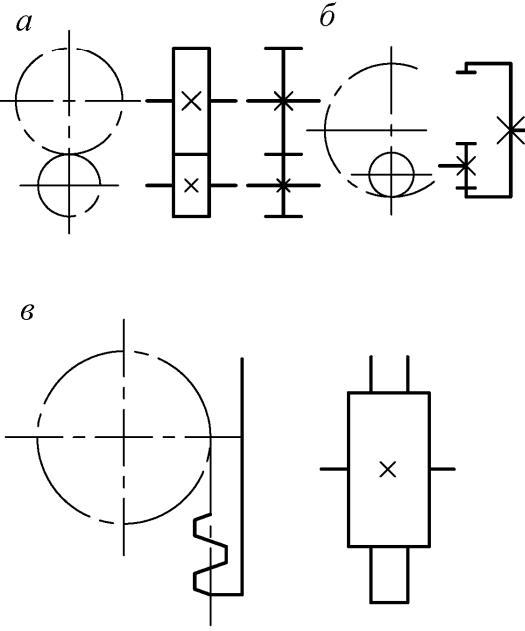
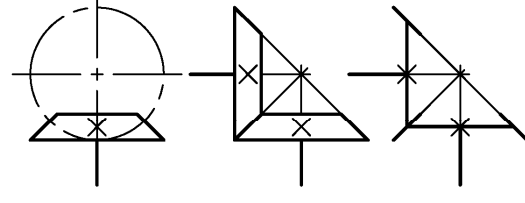
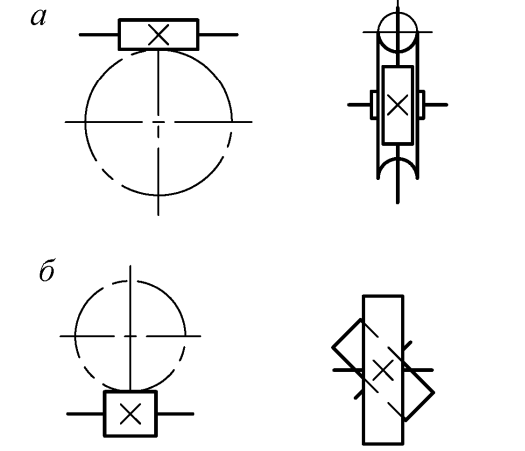
1. Какие факторы влияют на величину силы трения скольжения?
2. Какие существуют виды трения?
3. Как изменяется сила трения при переходе тела от состояния покоя к движению?
4. Учитывает ли закон трения Амонтона – Кулона все факторы, влияющие на величину силы трения?
5. От чего зависит величина тарировочного коэффициента?

## УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ КИНЕМАТИЧЕСКИХ СХЕМ МЕХАНИЗМОВ

Объект изображения 1	Обозначения 2
Звенья	
Рычаг, стержень, шатун, вал, валик, ось и т. д.	
Звено, входящее в две вращательные пары	
Звено, входящее в три вращательные пары	
Звено, входящее в пять вращательных пар	
Звено, входящее в три вращательные пары, центры которых расположены: <i>a</i> - не на одной прямой; <i>б</i> - на одной прямой	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"><i>a</i> </div> <div style="text-align: center;"><i>б</i> </div> </div>
Стойка (неподвижное звено), входящая в состав: <i>a</i> - вращательной пары; <i>б</i> - поступательной пары	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"><i>a</i> </div> <div style="text-align: center;"><i>б</i> </div> </div>
Звено (кривошип), образующее со стойкой вращательную пару: <i>a</i> - в плоскости движения; <i>б</i> - в плоскости, перпендикулярной к плоскости движения	<div style="display: flex; justify-content: space-around;"> <div style="text-align: center;"><i>a</i> </div> <div style="text-align: center;"><i>б</i> </div> </div>

1	2
<p>Ползун в неподвижных направляющих</p> <p>Поршень в цилиндре:  <i>a</i> - неподвижном;  <i>б</i> - подвижном</p> <p>Кулачки плоские:  <i>a</i> - для поступательного движения;  <i>б</i> - для вращательного движения                      (дисковые)</p> <p>Кулачки барабанные:  <i>a</i> - цилиндрические;  <i>б</i> - конические</p> <p>Толкатели для кулачковых механизмов:  <i>a</i> - пальцевые (игольчатые);  <i>б</i> - тарельчатые;  <i>в</i> - роликовые</p>	
<p>Кинематические пары</p>	
<p>Вращательная пара:  <i>a</i> - в плоскости движения;  <i>б</i> - в плоскости, перпендикулярной к плоскости движения</p>	
<p>Поступательная пара</p>	

1	2
<p>Винтовая пара</p> <p>Шаровая пара</p> <p>Соединение звена с валом:  <i>a</i> - глухое (жесткое);  <i>б</i> - свободное при вращении;  <i>в</i> - подвижное без вращения</p>	 <p><i>a</i></p> <p><i>б</i></p> <p><i>в</i></p>
<p>Рычажные механизмы</p>	
<p>Кривошипно-кулисные механизмы:  <i>a</i> - с поступательно движущейся кулисой;  <i>б</i> - с вращающейся кулисой</p>	 <p><i>a</i></p> <p><i>б</i></p>

1	2
<p><b>Зубчатые механизмы</b></p>	
<p>С параллельными осями (цилиндрические колеса):</p> <p><i>a</i> - внешнее зацепление;</p> <p><i>б</i> - внутреннее зацепление;</p> <p><i>в</i> - реечное зацепление</p>	
<p>С пересекающимися осями (конические колеса)</p>	
<p>Со скрещивающимися осями:</p> <p><i>a</i> - червячная передача;</p> <p><i>б</i> - винтовая передача</p>	

**ПРИЛОЖЕНИЕ 2**

**ЗНАЧЕНИЕ  $\text{inv } \alpha_w$**

$\alpha$ , град	Порядок	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'	$\alpha$ , град
10	0,00	17941	18397	18860	19332	19812	20299	20795	21299	21810	22330	22859	23396	10
11	0,00	23941	24495	25057	25628	26208	26797	27394	28001	28616	29241	29875	30518	11
12	0,00	31171	31832	32504	33185	33875	34575	35285	36005	36735	37474	38224	38984	12
13	0,00	39754	40534	41325	42126	42938	43760	44593	45437	46291	47157	48033	48921	13
14	0,00	49819	50729	51650	52582	53526	54482	55448	56427	57417	58420	59434	60460	14
15	0,00	61498	62548	63611	64686	65773	66873	67985	69110	70248	71398	72561	73738	15
16	0,0	07493	07613	07735	07857	07982	08107	08234	08362	08492	08623	08765	08889	16
17	0,0	09025	09161	09299	09439	09580	09722	09866	10012	10158	10307	10456	10608	17
18	0,0	10760	10915	11071	11228	11387	11547	11709	11873	12038	12205	12373	12543	18
19	0,0	12715	12888	13063	13240	13418	13598	13779	13963	14148	14334	14523	14713	19
20	0,0	14904	15098	15293	15490	15689	15890	16092	16296	16502	16710	16920	17132	20
21	0,0	17345	17560	17777	17996	18217	18440	18665	18891	19120	19350	19583	19817	21
22	0,0	20054	20292	20533	20775	21019	21266	21514	21765	22018	22272	22529	22788	22
23	0,0	23049	23312	23577	23845	24114	24386	24660	24936	25214	25495	25778	26062	23
24	0,0	26350	26639	26931	27225	27521	27820	28121	28424	28729	29037	29348	29660	24
25	0,0	29975	30293	30613	30935	31260	31587	31917	32249	32583	32920	33260	33602	25
26	0,0	33947	34294	34644	34997	35352	35709	36069	36432	36796	37166	37537	37910	26
27	0,0	38287	38666	39047	39432	39819	40209	40602	40997	41395	41797	42201	42607	27
28	0,0	43017	43430	43845	44264	44685	45110	45537	45967	46400	46837	47276	47718	28
29	0,0	48164	48612	49064	49518	49976	50437	50901	51368	51838	52312	52788	53268	29
30	0,0	53751	54238	54728	55221	55717	56217	56720	57226	57736	58249	58765	59285	30



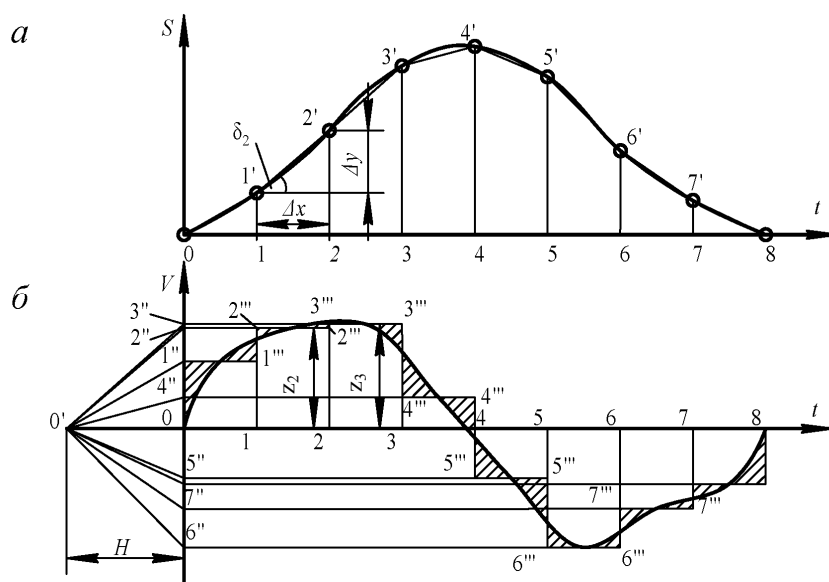
## Окончание прил. 2

α, град	Порядок	0'	5'	10'	15'	20'	25'	30'	35'	40'	45'	50'	55'	α, град
31	0,0	59809	60336	60866	61400	61937	62478	63022	63570	64122	64677	65236	65799	31
32	0,0	66364	66934	67507	68084	68665	69250	69838	70430	71026	71626	72230	72838	32
33	0,0	73449	74064	74684	75307	75934	76565	77200	77839	78483	79130	79781	80437	33
34	0,0	81097	81760	82428	83100	83777	84457	85142	85832	86525	87223	87925	88631	34
35	0,0	89342	90058	90777	91502	92230	92963	93701	94443	95190	95942	96698	97459	35
36	0,	09822	09899	09977	10055	10133	10212	10292	10371	10452	10533	10614	10659	36
37	0,	10778	10861	10944	11028	11113	11197	11283	11369	11455	11542	11630	11718	37
38	0,	11806	11895	11985	12075	12165	12257	12348	12441	12534	12627	12721	12815	38
39	0,	12911	13006	13102	13199	13297	13395	13493	13592	13692	13792	13893	13995	39
40	0,	14097	14200	14303	14407	14511	14616	14722	14729	14936	15043	15152	15261	40
41	0,	15370	15480	15591	15703	15815	15928	16041	16156	16270	16286	16502	16619	41
42	0,	16737	16855	16974	17083	17214	17336	17457	17579	17702	17826	17951	18076	42
43	0,	18202	18329	18457	18585	18714	18844	18975	19106	19238	19371	19505	19639	43
44	0,	19774	19910	20047	20185	20323	20463	20603	20743	20885	21028	21171	21315	44
45	0,	21460	21606	21753	21900	22049	22198	22348	22499	22651	22804	22958	23112	45
46	0,	23268	23424	23582	23740	23899	24059	24220	24382	24545	24709	24875	25040	46
47	0,	25206	25374	25543	25713	25883	26055	26228	26401	26576	26752	26929	27107	47
48	0,	27285	27465	27646	27828	28012	28196	28381	28567	28755	28943	29133	29324	48
49	0,	29516	29709	29903	30098	30295	30492	30691	30891	31092	31295	31498	31703	49
50	0,	31909	32116	32324	32534	32745	32957	33171	33385	33601	33818	34037	34257	50

## МЕТОД ХОРД

Метод хорд заключается в следующем. Разбиваем кривую на ряд участков (участки могут быть неравными) и заменяем на этих участках кривые хордами (рисунок, а), т. е. неравномерное движение на каждом участке приближенно заменяем движением равномерным с постоянной скоростью, равной действительной средней скорости на данном участке.

На оси  $t$  будущей диаграммы  $V = f(t)$  влево от начала координат на произвольном расстоянии  $H$  выбираем точку  $0'$  (рисунок, б). Из этой точки проводим лучи  $0'-1''$ ,  $0'-2''$ ,  $0'-3''$  и т. д., параллельные соответствующим хордам  $0-1'$ ,  $1'-2'$ ,  $2'-3'$  и т. д. Эти лучи отсекают на оси  $V$  отрезки  $0-1'''$ ,  $0-2'''$ ,  $0-3'''$  и т. д., пропорциональные средним скоростям на соответствующих участках. Откладывая равные этим отрезкам ординаты  $z_i$  на соответствующих участках, получим ступенчатую линию  $1''1'''2''2'''3''3'''$  и т. д. графика скорости. Истинный график скорости легко получить, проведя плавную кривую через уступы ступенчатого графика таким образом, чтобы заштрихованные площади, расположенные с обеих сторон кривой, на каждом участке были одинаковы.



Графическое дифференцирование по методу хорд

При проведении кривой  $V = f(t)$  с достаточной для практики точностью можно принять, что она проходит через середины уступов

1''–1''', 2''–2''', 3''–3''' и т. д. Это облегчает построение кривой. Следует отметить, что при проведении хорд на графике  $S = f(t)$  нужно, чтобы они были достаточно близки к кривой. Если этого не получается, то участок следует разбить на более мелкие части. Например, на участке 2–3 (рисунок) хорда 2'–3' далека от кривой, поэтому данный участок можно разбить на два меньших участка и на них к кривой провести две новые хорды.

Определим масштаб скорости

$$V_i = \frac{dS}{dt} \approx \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\mu_s \Delta y}{\mu_t \Delta x} = \frac{\mu_s}{\mu_t} \operatorname{tg} \delta = \frac{\mu_s z_i}{\mu_t H} = \mu_v z_i,$$

откуда масштаб равен

$$\mu_v = \frac{\mu_s}{\mu_t H},$$

т. е. определяется точно по такой же формуле, как и при дифференцировании по методу касательных.

# ТЕОРИЯ МЕХАНИЗМОВ И МАШИН

Составители: **Борисевич** Сергей Анатольевич  
**Гапанюк** Дмитрий Владимирович  
**Ласовский** Руслан Николаевич

Редактор *Т. Е. Самсанович*  
Компьютерная верстка *Е. Ю. Орлова*  
Корректор *Т. Е. Самсанович*

Издатель:  
УО «Белорусский государственный технологический университет».  
ЛИ № 02330/0549423 от 08.04.2009.  
Ул. Свердлова, 13а, 220006, г. Минск.