

**МОДЕЛЬ АВТОДИНА С ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ  
ВОЗБУЖДЕНИЕМ**

Метод автодинного детектирования спиновых резонансов достаточно актуален в технике стационарной спектроскопии, в частности, ядерного магнитного резонанса (ЯМР) [1]. Современные методы обработки сигналов позволяют существенно расширить возможности автодинных радиоспектрометров. Автодин по существу является генератор слабых высокочастотных колебаний, амплитуда которых зависит от внесённых потерь в колебательный контур за счет ядерной динамической восприимчивости образца [2]. Поглощение энергии радиочастотного поля на резонансной частоте ядерной спиновой системой исследуемого образца приводит к уменьшению добротности контура и, как следствие вызывает изменение амплитуды высокочастотных (ВЧ) колебаний. Для эффективного поглощения энергии радиочастотного поля спиновой системой необходимо, чтобы добротность катушки с исследуемым веществом была максимальной.

Обычно колебательный контур автодинного детектора характеризуется тремя основными параметрами: индуктивностью  $L$ , ёмкостью  $C$  и сопротивлением  $R$ , которые при своей независимости от сигналов в контуре образуют линейную систему. Описать которую можно следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{L} \int u dt + \frac{u}{R} + C \frac{du}{dt} = 0. \quad (1)$$

Если какой-либо из параметров контура зависит от величины сигнала в нём, то уравнение (1) становится нелинейным, а для нелинейной системы нет принципиального различия в получении резонанса либо воздействием на систему внешним ЭДС, либо параметрическим возбуждением. Периодическое изменение реактивного параметра при достаточной интенсивности и соответствующей частоте вызывает параметрическое возбуждение колебаний в системе [3]. Подобная система представляет собой усилитель мощности, в котором энергия от изменения реактивного параметра преобразуется в энергию сигнала. Усиление в параметрическом усилителе происходит за счет внесения генератором накачки в сигнальный контур условного отрицательного сопротивления, которое зависит от амплитуды накачки.

Однако, помимо создания соответствующей амплитуды колебаний генератора накачки, необходимых для изменения емкости контура, требуется также обеспечить совпадение фаз сигналов накачки и

контура. Причем частоту накачки следует выбирать в 2 раза больше частоты сигнала, чтобы обеспечит подвод мощности к контуру [3].

Таким образом, схема автодина с параметрическим возбуждением может быть условно разделена на несколько функциональных узлов: колебательный контур, генератор накачки и цепь обратной связи. Схема автодина приведена на рисунке 1. В рассматриваемом генераторе в качестве переменного реактивного элемента колебательного контура используется емкость р-п перехода полупроводниковой варикапы VD1; в качестве генератора накачки используется схема возведения в квадрат, которая построена на DA1. Поскольку в качестве опорного сигнала для параметрического изменения емкости используется непосредственно сигнал колебательного контура на удвоенной частоте, которая получается с выхода схемы умножения, то тем самым обеспечивается совпадение фаз. Обратная связь реализуется через подачу сигнала после усиления на схеме DA2 на управляющий электрод варикапы VD1.

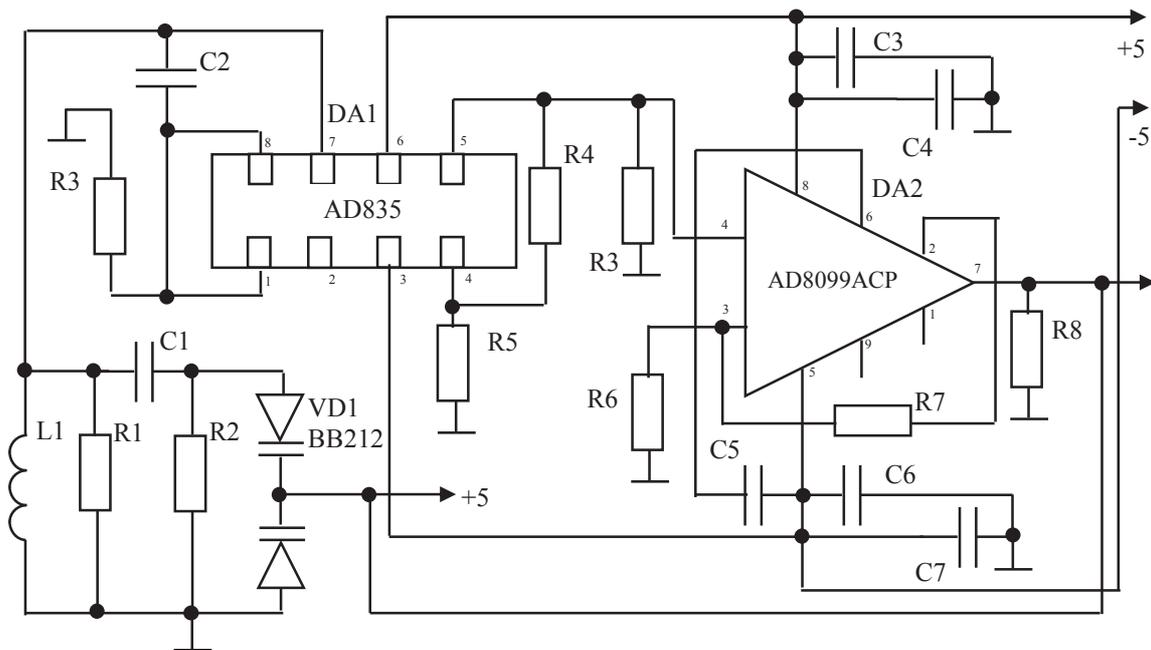


Рисунок 1 – Схема электрическая принципиальная автодина

Для составления математической модели рассмотрим колебательный контур, емкость которого является некоторой изменяемой величиной. При этом зависимость емкости варикапы VD1 от приложенного напряжения можно записать в виде:

$$C = \frac{C_0}{1 + m \cdot \cos 2\omega t}, \quad (2)$$

где  $m = \frac{\Delta C}{2C} = \frac{C_{VD1 \max} - C_{VD1 \min}}{C_{VD1 \max} + C_{VD1 \min}}$  – коэффициент модуляции емкости.

При определенных условиях подобный колебательный контур может стать параметрическим генератором.

Продифференцируем уравнение (1):

$$\frac{1}{L1} u + \frac{1}{R1} \frac{du}{dt} - C \frac{d^2 u}{dt^2} = 0. \quad (3)$$

Тогда подставляя уравнение (2) в (3) для колебательного контура можно будет получить:

$$\frac{1}{L1} u + \frac{1}{R1} \frac{du}{dt} - \frac{C_0 C1}{C1(1 - m \cdot \cos 2\omega t) - C_0} \frac{d^2 u}{dt^2} = 0. \quad (4)$$

Если пренебречь потерями на R1 и принять значение C1 равным значению C<sub>0</sub>, то уравнение (4) можно записать в следующем виде:

$$\omega_0^2 (2 - m \cdot \cos 2\omega t) u + \frac{d^2 u}{dt^2} = 0, \quad (4a)$$

где  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L1C_0}}$ .

Решим (4a) методом медленно меняющихся амплитуд. При малой нелинейности емкости и малой глубине модуляции параметра можно ограничиться рассмотрением гармонического приближения и искать решение  $u(t)$  как:

$$u = a(t) \sin \omega t + b(t) \cos \omega t, \quad (5)$$

где  $a(t)$  и  $b(t)$  – медленно меняющиеся во времени амплитуды искомого колебания.

Медленность изменения  $a$  и  $b$  во времени определяется тем, что их производные по времени являются величинами первого порядка малости по сравнению с произведениями  $\omega a$  и  $\omega b$ :

$$\frac{da}{dt} \ll \omega a, \quad \frac{db}{dt} \ll \omega b \quad (6)$$

С учетом (6) первая производная:

$$\frac{du}{dt} \approx a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t + \sin \omega t \frac{da}{dt} - \cos \omega t \frac{db}{dt}$$

в первом приближении принимает вид:

$$\frac{du}{dt} \approx a\omega \cos \omega t - b\omega \sin \omega t. \quad (7)$$

Для второй производной:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &\approx -\omega^2 a \sin \omega t - \omega^2 b \cos \omega t - \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} - \omega \sin \omega t \frac{db}{dt} + \\ &+ \frac{d^2 a}{dt^2} \sin \omega t + \frac{d^2 b}{dt^2} \cos \omega t + \omega \cos \omega t \frac{da}{dt} - \omega \sin \omega t \frac{db}{dt}, \end{aligned}$$

пренебрежем слагаемыми второго порядка малости и оставим слагаемые первого порядка малости. Получим

$$\frac{d^2 u}{dt^2} \approx - \left( \omega^2 a + 2\omega \frac{db}{dt} \right) \sin \omega t + \left( -\omega^2 b + 2\omega \frac{da}{dt} \right) \cos \omega t, \quad (8)$$

Слагаемые первого порядка малости оставлены в (8) и ими пренебрегли в (7). Это объясняется тем, что схема обладает малыми потерями, поэтому амплитуда второго слагаемого левой части исходного уравнения относительно мала по сравнению с амплитудами первого и третьего слагаемых.

Подставив (5, 8) в уравнение (4а), получим:

$$\omega_0^2 (2 - m \cdot \cos 2\omega t) (a \sin \omega t - b \cos \omega t) - \left( \omega^2 a + 2\omega \frac{db}{dt} \right) \sin \omega t + \left( -\omega^2 b + 2\omega \frac{da}{dt} \right) \cos \omega t = 0 \quad (9)$$

Поскольку на систему не действует внешняя периодическая сила и частота автоколебаний равна  $\omega_0$  а не  $\omega$ , то (9) примет вид:

$$\omega_0^2 (2 - m \cdot \cos 2\omega_0 t) a \sin \omega_0 t - \omega_0^2 a \sin \omega_0 t + 2\omega_0 \frac{da}{dt} \cos \omega_0 t = 0. \quad (10)$$

Введем безразмерный параметр  $\tau = \omega_0 t$ , а производную будем брать по времени. Тогда решение уравнение (10) можно будет записать в виде:

$$a(\tau) = B e^{-\frac{K1}{K2} \tau}, \quad (11)$$

где  $K1 = \omega_0^2 (1 + m \cdot \cos 2\tau) \sin \tau$ ,  $K2 = 2\omega_0 \cos \tau$ .

В момент времени  $t=0$  амплитуда определяется шумом Найквиста:

$$a(t=0) = \sqrt{4kTR\Delta f}. \quad (12)$$

где  $a(t=0)$  амплитуда напряжения при  $t=0$ ,  $\Delta f$  – ширина полосы;  $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура,  $K, R$  – общее сопротивление.

В итоге общее решение примет вид:

$$u(\tau) = \sqrt{4kTR\Delta f} e^{-\frac{\omega_0 (1+m \cos 2\tau) \tau}{2}} \sin \omega_0 t. \quad (13)$$

## ЛИТЕРАТУРА

1. Яценко А. В. Датчик сигналов ЯМР для исследования веществ с большим значением  $T1$ . / А. В. Яценко, С. В. Евдокимов // ПТЭ. – 2003.-№1. –С.64-66.

2. Леше, А. Ядерная индукция / А. Леше; пер. с нем. под ред. П. М. Бородина. – М.: Изд-во иностранной лит-ры, 1963. – 684с.

Мандельштам Л. И., Папалекси Н.Д. О параметрическом возбуждении электрических колебаний. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д. // Журн. техн. физики. – 1934. – № 3. – С. 5–29.