познавания образов // Известия Тульского государственного университета. Технические науки №10 2013 г.

3 Преобразование Хафа [Электронный ресурс] / Википедия. – Режим доступа: https://ru.wikipedia.org/wiki/Преобразование_Хафа. – Дата доступа: 15.09.2015.

4 Р. Гонсалес. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс 2012г.

УДК 611.53

С.Г. Тихомиров, проф., д-р техн. наук
Ю.В. Пятаков, доц., канд. физ.-мат. наук
О.В. Карманова, проф., д-р техн. наук
В.И. Молчанов, доц., канд. хим. наук
А. А. Маслов, асп.
(ВГУИТ, г. Воронеж)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕПЛОВОГО ПОЛЯ ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ В ПРОЦЕССЕ ВУЛКАНИЗАЦИИ

Моделирование процессов вулканизации связано необходимостью расчета температурных полей в многоэлементных изделиях сложной конфигурации, теплофизические характеристики которых зависят от температуры [1,2]. Решение этой задачи позволяет моделировать процессы вулканизации изделий с целью неразрушающего контроля их качества, рассчитывать продолжительность процессов в широком диапазоне температур и оптимумов вулканизации с учетом теплофизических свойств и геометрических параметров объектов [2,3].

Постановка задачи. В качестве математической модели процесса рассмотрим систему уравнений теплового баланса вида:

$$C_k(T(t,\boldsymbol{x}))\partial T(t,\boldsymbol{x})/\partial t = \nabla\left[\lambda_k(T(t,\boldsymbol{x}))\nabla T(t,\boldsymbol{x})\right] + q_k(t,\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in V_k,\ k=1,2,\ldots,K; \qquad (1)$$

где $C_k(T(t,\boldsymbol{x}))$, $\lambda_k(T(t,\boldsymbol{x}))$ соответственно объемная теплоемкость и теплопроводность k-го слоя шины; $T(t,\boldsymbol{x})$, $q_k(t,\boldsymbol{x})$–температура и плотность тепловыделения в точке $\boldsymbol{x}$ k-го слоя в момент времени t: $q_k(t,\boldsymbol{x}) = q_k^{сум}\cdot\partial X(t,\boldsymbol{x})/\partial t$, $q_k^{сум}$ – суммарное количество тепла, выделяемое в k-м слое; $X(t)$–степень завершенности процесса вулканизации [4,5].

Систему уравнений (1) дополним начальными:

$$T(0,\boldsymbol{x}) = T_0, \qquad (2)$$

граничными:

$$T(t,\boldsymbol{x}) = \varphi_i(t,\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in S_i,\ i=1,2; \qquad (3)$$

и контактными условиями:

$$\lim_{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}} T(t,\boldsymbol{x}') = \lim_{\boldsymbol{x}''\to\boldsymbol{x}} T(t,\boldsymbol{x}''),\qquad \lim_{\boldsymbol{x}'\to\boldsymbol{x}}\lambda_m(T(t,\boldsymbol{x}'))\partial T(t,\boldsymbol{x}')/\partial\boldsymbol{n} = \lim_{\boldsymbol{x}''\to\boldsymbol{x}}\lambda_p(T(t,\boldsymbol{x}''))\partial T(t,\boldsymbol{x}'')/\partial\boldsymbol{n}. \qquad (4)$$

В (2)-(4) T_0 – начальная температура; S_1 и S_2 – поверхности контакта шины с пресс-формой и диафрагмой, соответственно; $\boldsymbol{x}' \in V_m$, $\boldsymbol{x}'' \in V_p$, $\boldsymbol{x} \in S_{m,p}$; $S_{m,p}$ – поверхность контакта смежных слоёв V_m и V_p, $\boldsymbol{n}$ -вектор нормали к $S_{m,p}$.

Степень завершенности процесса вулканизации $X(t)$ в точке $\boldsymbol{x}$ k -го слоя в момент времени t будем оценивать по формулам:

$$X(t) = 0, \text{ при } t < t_{\text{инд.}};\ X(t) = \left(M(t_э) - M_0\right)/\left(M_{\max} - M_0\right), \text{ при } t \geq t_{\text{инд.}}, \qquad (5)$$

где $M(t), M_0, M_{\max}$ - текущее, минимальное и максимальное значения динамического модуля M, определяемые по данным контрольных испытаний образцов смеси при изотермическом режиме вулканизации [1]; $t_э = t_э(t)$-эквивалентное время вулканизации, $t_{\text{инд.}}$ - индукционный период вулканизации, определяемые по формулам:

$$t_э(t) = \int_0^t \exp\left(E_k R^{-1}\left((T_1 + 273{,}15)^{-1} - (T(\tau) + 273{,}15)^{-1}\right)\right) d\tau\ ;\ t_{инд.} = \int_0^{t_{инд.}} \tau_0 \exp\left(E_{инд.}/R/(T(\tau) + 273{,}15)\right) d\tau\ ,$$

где E_k – энергия активации процесса вулканизации k-го слоя; R – универсальная газовая постоянная; $T(\tau)$ – текущее значение температуры в точке $\boldsymbol{x}$ в момент времени τ, τ_0 – константа, $E_{\text{инд.}}$ – энергия активации индукционного периода (с достаточной точностью может быть принято $E_k \approx E_{\text{инд.}}$).

Константу τ_0 и значение $E_{\text{инд.}}$ определим по формулам:

$$E_{\text{инд.}} = R(T_2 + 273{,}15)(T_1 + 273{,}15)/(T_1 - T_2)\ln t''_{\text{инд.}}/t'_{\text{инд.}},\quad \tau_0 = t'_{инд.} \exp\left(-E_{инд.}/R/(T_1 + 273{,}15)\right),$$

где $t'_{\text{инд.}}$ – индукционный период вулканизации при температуре T_1; $t''_{\text{инд.}}$ – индукционный период вулканизации при температуре T_2.

Решение системы уравнений (1)-(5). Введем в рассмотрение функции $S_k(T)$, $\Lambda_k(T)$, определенные следующим образом:

$$S_k(T) = \int_{T_0}^{T} C_k(\tau)\, d\tau\ , \qquad \Lambda_k(T) = \int_{T_0}^{T} \lambda_k(\tau)\, d\tau\ . \qquad (6)$$

Тогда система уравнений теплопроводности (1) примет вид:

$$\partial S_k(t, \boldsymbol{x})/\partial t = \Delta\, \Lambda_k(t, \boldsymbol{x}) + q_k(t, \boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x} \in V_k, \qquad \Lambda_k(t, \boldsymbol{x}) = \Lambda_k(T(t, \boldsymbol{x})) \qquad (7)$$

Начальное условие (2) примет вид:

$$S_k(0, \boldsymbol{x}) = \Lambda_k(0, \boldsymbol{x}) = 0\ ;\quad k = 1,2,\ldots,K. \qquad (8)$$

Граничные условия (3) примут вид:

$$S(t, \boldsymbol{x}) = S^{(i)}(t, \boldsymbol{x}),\ \Lambda(t, \boldsymbol{x}) = \Lambda^{(i)}(t, \boldsymbol{x});\ \boldsymbol{x} \in S_i,\ i = 1,2; \qquad (9)$$

где $S^{(1)}(t,\boldsymbol{x}) = S_m(\varphi_1(t,\boldsymbol{x}))$, $\Lambda^{(1)}(t,\boldsymbol{x}) = \Lambda_m(\varphi_1(t,\boldsymbol{x}))$, m – номер слоя, граница которого в точке $\boldsymbol{x}$ совпадает с S_1; $S^{(2)}(t,\boldsymbol{x}) = S_n(\varphi_2(t,\boldsymbol{x}))$, $\Lambda^{(2)}(t,\boldsymbol{x}) = \Lambda_n(\varphi_2(t,\boldsymbol{x}))$, n – номер слоя, граница которого в точке $\boldsymbol{x}$ совпадает с S_2.

Контактные условия (4) примут вид:

$$S_m^{-1}(t,\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}} = S_p^{-1}(t,\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}};\ \Lambda_m^{-1}(t,\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}} = \Lambda_p^{-1}(t,\boldsymbol{x})\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}};\ \partial\Lambda_m(t,\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{n}\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}} = \partial\Lambda_p(t,\boldsymbol{x})/\partial\boldsymbol{n}\Big|_{\boldsymbol{x}\in S_{m,p}}. \quad (10)$$

Далее будем полагать, что шина имеет осесимметрическую форму. В этом случае уравнение (7) удобно записать в цилиндрической системе координат Ox_1x_2, ось Ox_1 которой совпадает осью симметрии шины:

$$\partial S_k(t,\boldsymbol{x})/\partial t = \partial^2\Lambda_k(t,\boldsymbol{x})/\partial x_1^2 + \partial^2\Lambda_k(t,\boldsymbol{x})/\partial x_2^2 + \partial\Lambda_k(t,\boldsymbol{x})/\partial x_2/x_2 + q_k(t,\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{x}\in V_k,\ \boldsymbol{x}=(x_1,x_2). \quad (11)$$

Численное решение системы уравнений (8)-(11) будем осуществлять методом конечно-разностной аппроксимации дифференциальных операторов в (11) на системе точек $\{t^{(m)},\boldsymbol{x}_{j,i}\}$, где $t^{(m)} = t^{(m-1)} + \Delta t$; $t^{(0)} = 0$; $m = 1,2,...,M_t$, Δt - шаг дискретизации по времени; $i = 1,2,...,N$; $j = 1,2,...,K_i$. Точки $\boldsymbol{x}_{1,i}, \boldsymbol{x}_{2,i}, \ldots, \boldsymbol{x}_{K_i,i}$; i=1,2,…,N расположены на отрезках [$\boldsymbol{x}_{1,i}, \boldsymbol{x}_{K_i,i}$], $\boldsymbol{x}_{1,i}\in S_1$, $\boldsymbol{x}_{K_i,i}\in S_2$. Способ аппроксимации операторов (11) описан в работе [1].

Пусть $\Omega(t^{(m)},\boldsymbol{x}_{j,i})$ - вычисленное значение дифференциального оператора в правой части (11) в точке $\{t^{(m)},\boldsymbol{x}_{j,i}\}$. Тогда, при $\Delta t \le C_{\min}\Delta^2/(\lambda_{\max})$, на основе явной разностной схемы решения уравнения (11), имеет место соотношение:

$$S_k(t^{(m+1)},\boldsymbol{x}_{j,i}) = S_k(t^{(m)},\boldsymbol{x}_{j,i}) + \Delta t\cdot\Omega(t^{(m)},\boldsymbol{x}_{j,i}), \quad \boldsymbol{x}_{j,i}\in V_k,$$

где Δ - минимальное расстояние между точками $\boldsymbol{x}_{j,i}$; $C_{\min}$, $\lambda_{\max}$ - минимальное и максимальное значения теплоемкости и теплопроводности слоев шины. Учитывая, что $S_k(T)$ и $\Lambda_k(T)$ в (6) являются непрерывными и монотонными функциями аргумента T, значение температуры в точке $\boldsymbol{x}_{j,i}$ в момент времени $t^{(m+1)}$ можно определить по формуле:

$$T_k(t^{(m+1)},\boldsymbol{x}_{j,i}) = S^{-1}{}_k(t^{(m+1)},\boldsymbol{x}_{j,i}),\ \boldsymbol{x}_{j,i}\in V_k,$$

где $S^{-1}{}_k$ - функция, обратная S_k.

Пример расчета. В примере выполнен расчет температурного поля для шины, имеющей наружный диаметр – 1,078 м, посадочный диаметр – 0,6096 м. Теплоемкость и теплопроводность слоев определялась соотношениями: $C_k(T) = c_k\rho_k$, $\lambda_k(T) = a_k - b_k\cdot T$. Значения параметров c_k, ρ_k, a_k, b_k приведены в таблице.

Таблица - Теплофизические параметры компонентов шины

№	Наименование компонента	ρ_k, кг/м^3	c_k, Дж/(кг·град)	a_k, Вт/(м·град)	b_k, Вт/(м·град·с)
1	Протектор	1162	717	0,2158	0,0002
2	Боковина	1154	663	0,30336	0,0004
3	Брекер	1126	641	0,26124	0,0003
4	Каркас	1121	615	0,2548	0,0003
5	Борт	3960	560	17,2	0,0001
6	Наполнительный шнур	1218	664	0,3426	0,0006

Расчет осуществлялся при заданных начальных: T_0=25 °C и граничных:

$$\varphi_1(t, \boldsymbol{x}) = \varphi_2(t, \boldsymbol{x}) = \begin{cases} 150\ °\text{C}, & \text{при} \quad 0 \le t \le 2700\ \text{с}, \\ 25\ °\text{C}, & \text{при} \qquad t > 2700\ \text{с} \end{cases}$$

условиях.

На рисунке приведено распределение температуры и степень завершенности процесса $X(t)$ в момент времени t = 3000 с.

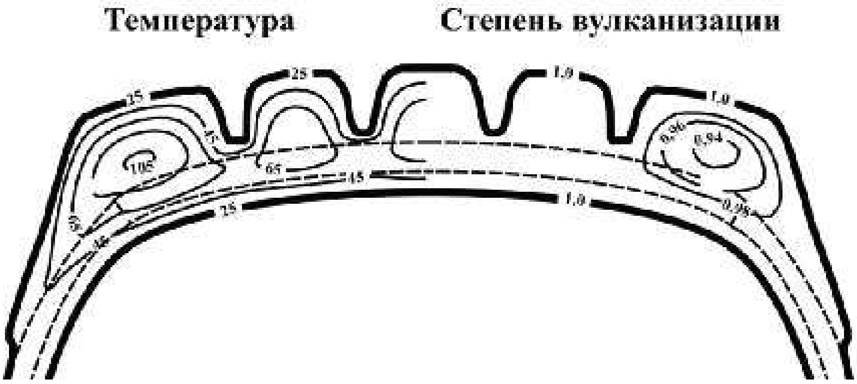

Рисунок – Распределение температуры и степени завершенности процесса вулканизации в момент времени *t* = 3000 с

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихомиров, С. Г. Численный алгоритм расчета температурных полей пневматических шин в процессе вулканизации [Текст] / С.Г. Тихомиров, Ю.В. Пятаков, О.В. Карманова, В.И. Молчанов // Вестник ВГУИТ. – 2015. - № 2. С. 158-164.

2. Карманова, О. В. Моделирование кинетики неизометрической вулканизации массивных резиновых изделий [Текст] / О. В. Карманова, С. Г. Тихомиров, Ю.В. Пятаков, А. В. Касперович В. И. Молчанов // Труды БГТУ. – 2014. – № 4. – С. 100–104.

3. Лукомская, А. И. Расчеты и прогнозирование режимов вулканизации резиновых изделий [Текст] / А. И. Лукомская, П. Ф. Баденков, Л. М. Кеперша, – М.: Изд-во Химия, 1978. – 280 с.

4. Ищенко, В. А. Особенности расчетов режимов вулканизации пневматических шин с учетом трехмерности конструкции [Текст] / В. А. Ищенко, М. В. Шаптала // Системные технологии: региональный межвуз. сб. науч. трудов. – Днепропетровск, – 2008. – Вып. 2 (55). – С. 147 – 158.

5. Власко А. В. Влияние неизотермической вулканизации и механические свойства резиновых и резинокордных образцов [Текст] / А. В. Власко, М. Э. Сахаров, З. Порицкая // Каучук и резина – 1991. – № 6. С. 6-8.