УДК 681.5

Н.В. Карпович, магистрант;
И. Ф. Кузьмицкий, канд. техн. наук;
Д.С. Карпович, канд. техн. наук
(БГТУ, г. Минск)

СПОСОБЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБЪЕКТОВ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ НА ПРИМЕРЕ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Основными формами представления объектов с распределенными параметрами, как и в случае объектов с сосредоточенными параметрами, являются представление в виде дифференциальных уравнений в частных производных, представление в виде передаточных функций, представление в виде временных характеристик, представление в виде частотных характеристик.

Особенностью распределенных систем является наличие пространственных составляющих в сигнале входа и выхода.

Как известно, в сосредоточенных системах импульсная переходная функция характеризует реакцию системы на единичный идеальный импульс, переходная характеристика характеризует реакцию системы на единичную ступенчатую функцию, а комплексная передаточная функция – реакцию системы на гармоническое входное воздействие. В распределенных системах к временным входным воздействиям, рассмотренным выше, необходимо добавить пространственную форму.

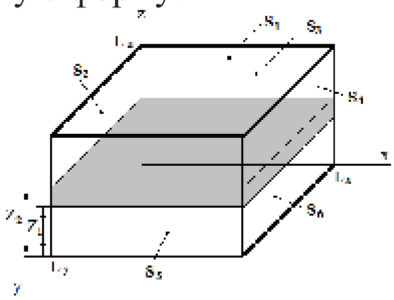

Рисунок 1 – Объект управления

В настоящей работе в качестве объекта управления выступает температурное поле многослойной пластинки, которая представлена на рисунке 1. Управляющим воздействием служит тепловой поток, распределенный по поверхности, а функцией выхода – температурное поле $T(x,y,z,t)$. Поверхности S_3, S_5, S_4 теплоизолированы, а поверхности S_2, S_6 поддерживаются при постоянной температуре.

При описании объектов с распределенными параметрами можно выделить три подхода:

1. Представление в форме дифференциальных уравнений в частных производных. Уравнение Фурье можно записать в виде:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \quad (1)$$

$$0<x<L_x,\ 0<y< L_y,\ 0<z< L_z,$$

где $T(x,y,z,t)$ - фазовая переменная; x, y, z, - пространственные координаты; a – заданный коэффициент; L_x, L_y, L_z – заданные числа.

Граничные и начальные условия для уравнения (1) имеют вид:

$$T(0,y,z,t) = T(x,0,z,t) = T(L_x,y,z,t) = T(x,L_y,z,t) = 0$$

$$\frac{\partial T(x,y,0,t)}{\partial z} = 0, \quad T(x,y,L_z,t) = U(x,y,t), \quad T(x,y,z,0) = 0. \qquad (2).$$

Общий способ решения - использование приближенных численных методов. Наиболее широко распространены методы сеток.

Основная идея метода сеток - аппроксимация искомой непрерывной функции совокупностью приближенных значений, рассчитанных в некоторых точках области - узлах. Совокупность узлов, соединенных определенным образом, образует сетку. Сетка, в свою очередь, является дискретной моделью области определения искомой функции.

Общий алгоритм метода сеток:

1. Построение системы в заданной области (дискретизация задачи);
2. Получение системы алгебраических уравнений относительно узловых значений (алгебраизация задачи);
3. Решение полученной системы алгебраических уравнений .

Наиболее часто используют 2 вида метода сеток:

- метод конечных элементов.
- метод конечных разностей.

В методе конечных разностей используются, как правило, регулярные сетки, шаг которых постоянен либо меняется по несложному закону. Расстояние. между соседними узлами - шаг сетки.

В методе конечных элементов исходная область определения функции разбивается с помощью сетки, в общем случае неравномерной, на отдельные подобласти - конечные элементы. Искомая непрерывная функция апроксимируется кусочно-непрерывной, определенной на множестве КЭ. Практически МКЭ применяют в виде специальных программных систем, например, PDE Toolbox/MATLAB.

2. Определение реакции системы на входной сигнал, представленный в виде комбинации дельта функций в пространственной и временной областях

$$\omega(x,t) = \delta(x-\mu)\cdot\delta(t-\tau), \qquad (3)$$

где x, μ - заданные точки пространства,
t, τ - временные независимые переменные.

Реакция объекта на входное воздействие $\omega(t, x)$ представляется в виде функции Грина $G(x,t,\mu,\tau)$ или импульсной переходной функцией.

Реализация данного подхода сопряжено с определенными трудностями при использовании распространенных математических пакетов.

3. Определение реакции объекта на собственные вектор-функции оператора объекта. В этом случае распределенный объект (систему) структурно можно представить бесконечной совокупностью независимых условно сосредоточенных контуров. Передаточная функция каждого условно сосредоточенного контура может быть представлена в виде отношения аналитических целых функций.

Разложим входное воздействие $U(x,y,t)$ в ряд Фурье. Учитывая граничные условия (2), входное воздействие может быть представлено в виде:

$$U(x,y,t) = \sum_{\eta,\gamma=1}^{\infty} C_{\eta,\gamma}(t) \cdot sin(\psi_\eta \cdot x) \cdot sin(\widetilde{\varphi}_\gamma \cdot y),$$

где $\psi_\eta = \pi \cdot \eta / x_L$; $\widetilde{\varphi}_\gamma = \pi \cdot \gamma / y_L$.

Передаточная функция объекта по η,γ $\left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right)$ моде входного воздействия:

$$W_{0,\eta,\gamma}(p) = \frac{\overline{H}_{\eta,\gamma}\left(x,y,z=\overset{*}{z},p\right)}{\overline{C}_{\eta,\gamma}(p) \cdot sin(\psi_\eta \cdot x) \cdot sin(\widetilde{\varphi}_\gamma \cdot y)} = \frac{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma} \cdot \overset{*}{z}\right) + \exp\left(-\beta_{\eta,\gamma} \cdot \overset{*}{z}\right)}{\exp\left(\beta_{\eta,\gamma} \cdot z_L\right) + \exp\left(-\beta_{\eta,\gamma} \cdot z_L\right)}, \quad \left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right),$$

где $\beta_{\eta,\gamma} = \left(\frac{p}{a} + \psi_\eta^2 + \sim_\gamma^2\right)^{1/2}$, $\left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right)$.

Таким образом, рассматриваемый распределенный объект может быть представлен в виде совокупности передаточных функций $W_{0,\eta,\gamma}(p)$ $\left(\eta,\gamma = \overline{1,\infty}\right)$.

В зависимости от особенностей теплового объекта и необходимости в определении выходных параметров объекта управления с учетом влияния входного или входных воздействий можно воспользоваться любым из представленных выше способов описания.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Eyges, Leonard, The Classical Electromagnetic Field, Dover Publications, New York, 1972.

2. Рапопорт Э . Я . Оптимальное управление системами с распределенными параметрами .– М .: Высшая школа , 2009. – 677 с.

3. Бутковский А . Г . Методы управления системами с распределенными параметрами .– М .: Наука , 1975. – 568 с.

4. Коваль В . А . Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем . – Саратов : СГТУ , 1997. – 191 с.

5. Рапопорт Э . Я . Оптимизация процессов индукционного нагрева металла . – М .: Металлургия , 1993. – 278 с .

6. Карташов Э . М . Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел . – М .:Высшая школа , 2001. – 550 с.