УДК 519.624

И.Ф. Соловьева, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ СТАРШЕЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Граничные задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (о. д. у.) являются довольно распространенным классом задач вычислительной математики, прикладное значение которых широко известно. Они распространены в механике, акустике, динамике жидкостей, физике и других областях науки и техники. Многие методы численного решения дифференциальных уравнений в частных производных и ряд задач оптимизации в конечном счете приводят к необходимости решения граничных задач для о. д. у. и систем.

Граничные задачи с малым параметром при старшей производной в большинстве своем являются математическими моделями, решения которых отличаются сложным характером поведения, в частности, им присуще развитие пограничных слоев либо внутренних переходных слоев с большими градиентами решений. Это значительно усложняет решение такого рода задач [1].

Часто в приложениях встречаются граничные задачи, у которых коэффициент при производной второго порядка мал по сравнению с коэффициентом при производной первого порядка. Они называются сингулярно возмущенными. Их решение может быстро изменяться вблизи граничных точек, т. е. мы имеем пограничный слой. Причина трудности решений задач с пограничным слоем заключается в неустойчивости численного процесса [2]. Для решения названных выше задач предлагается метод дифференциальной ортогональной прогонки с введением в зонах пограничных слоев регулирующих коэффициентов.

Рассмотрим двухточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной вида:

$$\begin{cases} \varepsilon y''(x) + a(x)y'(x) - b(x)y(x) = f(x), \; 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad a(x) > 0, \quad b(x) > 0. \end{cases}, \qquad (1)$$

$$\begin{cases} -\varepsilon y''(x) + b(x)y(x) = f(x), \; 0 < x < 1, \\ y(0) = A, \quad y(1) = B, \quad b(x) > 0, \quad \varepsilon > 0, \end{cases} \qquad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр при старшей производной. Задача вида (1) имеет один пограничный слой, а задача вида (2) – два пограничных слоя [2].

Представим обыкновенные дифференциальные уравнения (1)-(2) в виде системы о. д. у. вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + f_1(x), \quad 0 < x < 1, \\ y_2' = a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + f_2(x) \end{cases} \tag{3}$$

с граничными условиями:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(a) + \beta_1 y_2(a) = \gamma_1, \quad \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 1, \\ \alpha_2 y_1(b) + \beta_2 y_2(b) = \gamma_{2,} \quad \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 1, \end{cases} \tag{4}$$

где $a_{ik}(x)$, $(i,k=1,2)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$ – функции, непрерывные на отрезке $[a,b]$, α_i, β_i, γ_i – заданные постоянные. Предположим, что существует и, причем, единственное искомое решение задачи (3), (4). Обозначим это решение через $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

В виде системы уравнений (3) можно представить любое линейное о. д. у., причем коэффициенты $a_{ik}(x)$ в этом случае будут зависеть от $\varepsilon > 0$, т.е. $a_{ik}(x) \equiv a_{ik}(x,\varepsilon)$. В свою очередь, граничные условия вида (4) представлены в общем виде, что позволяет рассматривать более широкий класс задач.

Введем вспомогательную функцию $\Theta(x)$ и новые неизвестные функции [3]:

$$\begin{cases} u = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\sin\Theta(x) + m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\cos\Theta(x), \\ v = m_1(x,\varepsilon)y_1(x)\cos\Theta(x) - m_2(x,\varepsilon)y_2(x)\sin\Theta(x), \end{cases} \tag{5}$$

где $\varepsilon > 0$, $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$ функции, в известной мере моделирующие профили пограничных слоев. В зонах пограничных слоев их выбор должен быть строго согласован с поведением функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$. Регулирующие множители $m_1(x,\varepsilon) > 0$ и $m_2(x,\varepsilon) > 0$ нужно выбирать таким образом, чтобы произведения $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$ были в необходимой мере стабилизированы. Выражения для искомого решения и его производной получаются из последних соотношений.

$$\begin{cases} m_1(x,\varepsilon)y_1(x) = \sin\Theta(x)u(x) + \cos\Theta(x)v(x), \\ m_2(x,\varepsilon)y_2(x) = \cos\Theta(x)u(x) - \sin\Theta(x)v(x), \end{cases} \tag{6}$$

В некоторых случаях можно полагать $m_1(x,\varepsilon) \equiv 1$. В зонах пограничных слоев, вблизи точки $x = 0$ наблюдается быстрый рост решения и особенно градиента решения, т.е. его производной. Для нейтрализации этого роста введем регулирующий множитель для задачи (1) в виде:

$$m_2(x,\varepsilon) = -2\varepsilon\left(cth\frac{\sqrt{a^2(x) + 4b(x)\varepsilon}}{2\varepsilon}\right)^{-1}.$$

Для задачи вида (2) регулирующий множитель будет иметь вид:

$$m_2(x,\varepsilon) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b(x)} th\sqrt{\frac{b(x)}{\varepsilon}}} \quad .$$

Полученные множители регулируют поведение функции $y(x)$ и его производной $y'(x)$ вблизи зон пограничных слоев.

Имеет место тождество:

$$u^2(x)+v^2(x)\equiv(m_1(x,\varepsilon)y_1(x))^2+(m_2(x,\varepsilon)y_2(x))^2.$$

Оно показывает, что порядок роста функций $u(x)$ и $v(x)$ одинаков с порядком роста функций $m_1(x,\varepsilon)y_1(x)$ и $m_2(x,\varepsilon)y_2(x)$.

Приведенный алгоритм метода дифференциальной ортогональной прогонки дает возможность применять единый подход к решению граничных задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом одним и двумя пограничными слоями.

В качестве наглядной демонстрации свойств и практической реализации приведенного в данной работе метода предлагается решение двух задач с малым параметром при старшей производной и с возникающими при этом пограничными слоями [4].

Пример 1. Решить граничную задачу с двумя пограничными слоями вида

$$\varepsilon y''(x)-y(x)=\cos^2\pi x+2\varepsilon\pi^2\cos 2\pi x$$

с граничными условиями: $y(0)=0,\ y(1)=0$, $\varepsilon=\dfrac{1}{400}$.

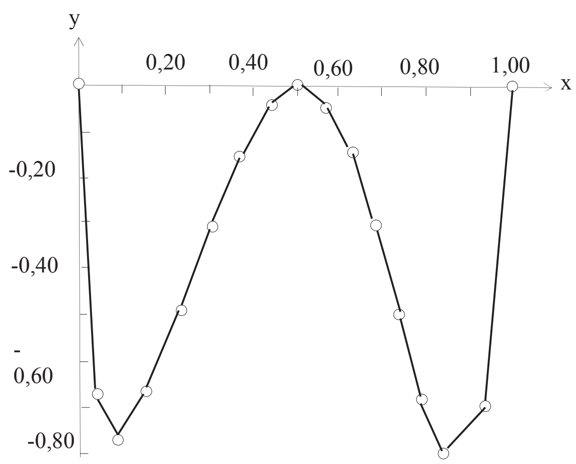

Рисунок 1 – Графическая иллюстрация решения задачи 1

Пример 2. Решить граничную задачу с одним пограничным слоем вида

$$\varepsilon y''(x)+2xy'(x)+(1+x^2)y(x)=0$$

с граничными условиями: $y(-1)=2,\ y(1)=1,\ \varepsilon=\dfrac{1}{5}$.

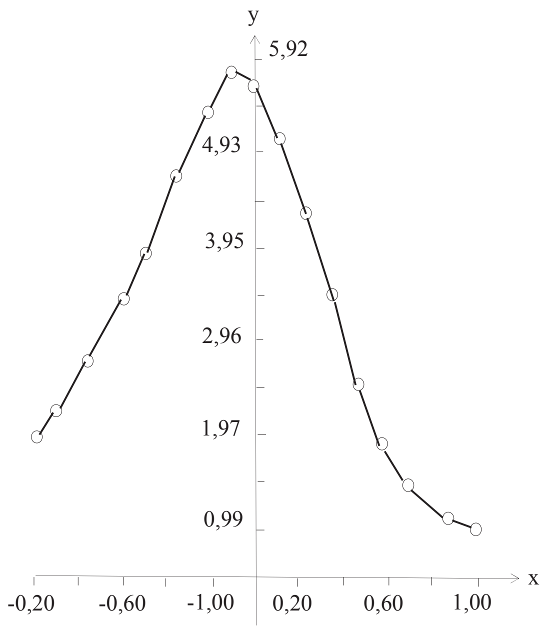

Рисунок 2 – Графическая иллюстрация решения задачи 2.

Предложенные двухточечные граничные задачи были выполнены в приложении MSEXCEL.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя / М. Наука. 1974.

2. Холл Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений /пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 312

3. Соловьева И. Ф. Решение граничных задач с пограничным слоем // Труды БГТУ. Сер. №6 (153), физ.-мат. науки и информ. – 2012. - С. 21–23.

4. Дулан Э., Миллер Дж., Шилдерс У. Равномерные численные методы решения задач с пограничным слоем /пер. с англ. М., 1983. - С. 200.

УДК 517.977.1

В.М. Марченко, проф., д-р физ.-мат. наук;
О.Н. Пыжкова, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ДОСТИЖИМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ ДИСКРЕТНО-НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

В докладе рассматриваются гибридные дискретно-непрерывные системы [1], в которые управление входит только в дискретную составляющую, что в совокупности можно квалифицировать как непрерывные системы, управляемые дискретным регулятором.