

**ЛИНЕЙНЫЕ СВЯЗНОСТИ НА ТРЕХМЕРНЫХ
СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ**

Пусть M – дифференцируемое многообразие, на котором транзитивно действует группа \bar{G} , (M, \bar{G}) – однородное пространство, $G = \bar{G}_x$ – стабилизатор произвольной точки $x \in M$. Проблема классификации однородных пространств (M, \bar{G}) равносильна классификации (с точностью до эквивалентности) пар групп Ли (\bar{G}, G) , где $G \subset \bar{G}$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ – алгебра Ли группы Ли \bar{G} , а \mathfrak{g} – подалгебра, соответствующая подгруппе G . Инвариантные римановы метрики g на M находятся во взаимно–однозначном соответствии с инвариантными симметрическими невырожденными билинейными формами B на G -модуле $\bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, т.е. каждое риманово однородное пространство (\bar{G}, M, g) , $\text{codim}_{\bar{\mathfrak{g}}}\mathfrak{g} \leq 4$ описывается тройкой $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g}, B)$. Линейной связностью на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ будем называть такое отображение $\Lambda: \bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$, где $V = \bar{\mathfrak{g}}/\mathfrak{g}$, что его ограничение на \mathfrak{g} есть изотропное представление подалгебры, а все отображение является g -инвариантным. Хорошо известно (см., например, [1]), что инвариантные линейные связности на однородном пространстве (M, G) находятся во взаимно однозначном соответствии с линейными связностями на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$. Тензор кручения имеет вид:

$$T(x_V, y_V) = \Lambda(x)y_V - \Lambda(y)x_V - [x, y]_V \text{ для всех } x, y \in \bar{\mathfrak{g}},$$

а тензор кривизны – $R(x_V, y_V) = [\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y])$. Алгеброй голономии связности на паре $(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{g})$ называется подалгебра вида

$$V + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V] + [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), [\Lambda(\bar{\mathfrak{g}}), V]] + \dots, \text{ где}$$

$$V = \{[\Lambda(x), \Lambda(y)] - \Lambda([x, y]) \mid x, y \in \bar{\mathfrak{g}}\}.$$

Симметрическое пространство – это пространство аффинной связности без кручения, тензор кривизны которого сохраняется при параллельном перенесении. Название “симметрическое” связано с одним важным геометрическим свойством таких пространств, которое может быть принято за определение: геодезическая симметрия относительно любой точки есть автоморфизм пространства, т. е. такое преобразование, при котором заданная связность переходит в себя. Риманово симметрическое пространство всегда однородно.

Теорема 1. Локально однородное симметрическое пространство, допускающее риманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}=3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

	Таблица умножения						B	
1.3.1	e_1	0	$-u_2$	u_1	0		$\begin{matrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{matrix}$	$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1$
	u_1	u_2	0	0	0			
	u_2	$-u_1$	0	0	0			
	u_3	0	0	0	0			
1.3.5, 1.3.6	e_1	0	$-u_2$	u_1	0		$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{matrix}$	$a \neq 0$
	u_1	u_2	0	$\pm e_1$	0			
	u_2	$-u_1$	e_1	0	0			
	u_3	0	0	0	0			
3.5.1	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	u_1	$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}$	\pm
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1		
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$		
	u_1	u_3	u_2	0	0	0		
	u_2	0	$-u_1$	u_3	0	0		
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0		
3.5.2	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	u_1	$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$	$a \neq 0$
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1		
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$		
	u_1	u_3	u_2	0	0	e_2		
	u_2	0	$-u_1$	u_3	$-e_2$	0		
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	$-e_3$	0		
3.5.3	e_1	0	e_3	$-e_2$	$-u_3$	u_1	$\begin{matrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{matrix}$	$a \neq 0$
	e_2	$-e_3$	0	e_1	$-u_2$	u_1		
	e_3	e_2	$-e_1$	0	0	$-u_3$		
	u_1	u_3	u_2	0	0	$-e_2$		
	u_2	0	$-u_1$	u_3	e_2	0		
	u_3	$-u_1$	0	$-u_2$	e_3	0		

Здесь e_1, e_2, e_3 – базис \mathfrak{g} , u_1, u_2, u_3 – базис, дополнительный к \mathfrak{g} в $\bar{\mathfrak{g}}$.

Кроме римановой метрики псевдориманову метрику сигнатуры $(2, 1)$ допускают следующие однородные пространства из приведенных в теореме: 1.3.1 при $\varepsilon_1, \varepsilon_2 < 0$, 1.3.5, 1.3.6.

Теорема 2. Локально однородное симметрическое пространство, допускающее только псевдориманову метрику, т.ч. $\text{codim}_{\mathfrak{g}}\mathfrak{g}=3$ и $\mathfrak{g} \neq \{0\}$, эквивалентно одной и только одной из следующих троек:

3.4.1.	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0	$-u_3$	$\begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{matrix}$	\pm
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1	u_2		
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3	0		
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	0	0		
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	0	0	0		
	u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0	0		

3.4.2.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>a</td></tr> <tr><td>0</td><td>$-a$</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	a	0	$-a$	0	a	0	0	$a \neq 0;$
0	0	a															
0	$-a$	0															
a	0	0															
	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0		$-u_3$									
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1		u_2									
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3		0									
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	e_2	$-e_1$										
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	$-e_2$	0	$-e_3$										
	u_3	u_3	$-u_2$	0	e_1	e_3	0										
3.4.3.	e_1	e_2	e_3	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>a</td></tr> <tr><td>0</td><td>$-a$</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	a	0	$-a$	0	a	0	0	$a \neq 0;$
0	0	a															
0	$-a$	0															
a	0	0															
	e_1	0	e_2	$-e_3$	u_1	0		$-u_3$									
	e_2	$-e_2$	0	e_1	0	u_1		u_2									
	e_3	e_3	$-e_1$	0	u_2	u_3		0									
	u_1	$-u_1$	0	$-u_2$	0	$-e_2$	e_1										
	u_2	0	$-u_1$	$-u_3$	e_2	0	e_3										
	u_3	u_3	$-u_2$	0	$-e_1$	$-e_3$	0										
2.21.1.	e_1	e_2	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	\pm	
0	0	1															
0	-1	0															
1	0	0															
	e_1	0	e_2	u_1	0		$-u_3$										
	e_2	$-e_2$	0	0	u_1		u_2										
	u_1	$-u_1$	0	0	0	0											
	u_2	0	$-u_1$	0	0	0											
	u_3	u_3	$-u_2$	0	0	0											
1.8.1.	e_1	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	\pm		
0	0	1															
0	-1	0															
1	0	0															
	e_1	0	0	u_1		u_2											
	u_1	0	0	0	0												
	u_2	$-u_1$	0	0	0												
	u_3	$-u_2$	0	0	0												
1.8.4, 1.8.5.	e_1	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>0</td><td>-1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> </table>	0	0	1	0	-1	0	1	0	0	\pm		
0	0	1															
0	-1	0															
1	0	0															
	e_1	0	0	u_1		u_2											
	u_1	0	0	0	0												
	u_2	$-u_1$	0	0	$\pm e_1$												
	u_3	$-u_2$	0	$\bullet e_1$	0												
1.1.1.	e_1	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>± 1</td></tr> </table>	0	1	0	1	0	0	0	0	± 1			
0	1	0															
1	0	0															
0	0	± 1															
	e_1	0	u_1	$-u_2$		0											
	u_1	$-u_1$	0	0	0												
	u_2	u_2	0	0	0												
	u_3	0	0	0	0												
1.1.5.	e_1	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>a</td><td>0</td></tr> <tr><td>a</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>± 1</td></tr> </table>	0	a	0	a	0	0	0	0	± 1	$a \neq 0;$		
0	a	0															
a	0	0															
0	0	± 1															
	e_1	0	u_1	$-u_2$		0											
	u_1	$-u_1$	0	e_1	0												
	u_2	u_2	$-e_1$	0	0												
	u_3	0	0	0	0												
1.1.6.	e_1	u_1	u_2	u_3	<table border="1"> <tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td></tr> <tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td></tr> <tr><td>0</td><td>0</td><td>a</td></tr> </table>	0	1	0	1	0	0	0	0	a	$a \neq 0;$		
0	1	0															
1	0	0															
0	0	a															
	e_1	0	u_1	$-u_2$		0											
	u_1	$-u_1$	0	u_3	0												
	u_2	u_2	$-u_3$	0	0												
	u_3	0	0	0	0												

Прямыми вычислениями получаем, что, например, в случаях 3.5.2 и 3.5.3 связность имеет вид

$$\Lambda(e_4) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_5) = \begin{pmatrix} -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad \Lambda(e_6) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \end{pmatrix}.$$

Не нарушая общности можно считать, что $a \geq 0$. Тензор кривизны

$$R(u_1, u_2) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \mp 1 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, R(u_1, u_3) = \begin{pmatrix} -a^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \mp 1 \end{pmatrix},$$

$$R(u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a^2 \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 \pm 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $T(u_1, u_2) = 2au_1$, $T(u_1, u_3) = 2au_2$, $T(u_2, u_3) = 2au_3$. Алгебра голономии совпадает с трехмерным неприводимым представлением $sl(2, \mathbb{R})$ при $a^2 \neq \pm 1$ и коммутативна в противном случае.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех линейных связностей на трехмерных пространствах, методика также может быть использована для других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu. // Amer. Journ. Math – 1954. – Vol. 76., № 1. – P. 33–65.

УДК 62-50

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И НОРМАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

При разработке математических моделей экономических систем и технологических процессов на производстве, а также систем автоматического управления такими процессами необходимо учитывать как дифференциальные, так и алгебраические связи в виде уравнений материального баланса в экономике, либо законов Киргофа в электротехнике, либо фондообразующих и нефондообразующих отраслей в экономической системе государства. Кроме того, часто необходимо принимать во внимание и эффекты последствий. Адекватной математической моделью таких процессов являются дескрипторные динамические системы с отклоняющимся аргументом. Такие системы называют либо вырожденными, либо сингулярными [3], либо системами неразрешенными относительно производной, либо системами с обобщенным пространством состояний, либо алгебро-дифференциальными [2] либо дескрипторными [1,2], причем последнее название превалирует.