$$R(u_1,u_2)=\begin{pmatrix}0 & a^2\mp1 & 0\\ 0 & 0 & a^2\mp1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ R(u_1,u_3)=\begin{pmatrix}-a^2\pm1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a^2\mp1\end{pmatrix},$$

$$R(u_2,u_3)=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -a^2\pm1 & 0 & 0\\ 0 & -a^2\pm1 & 0\end{pmatrix}.$$

Тензор кручения $T(u_1,u_2)=2au_1$, $T(u_1,u_3)=2au_2$, $T(u_2,u_3)=2au_3$. Алгебра голономии совпадает с трехмерным неприводимым представлением sl(2, R) при $a^2 \neq \pm 1$ и коммутативна в противном случае.

Аналогично рассматриваются остальные случаи.

Полученный результат позволяет в дальнейшем провести классификацию всех линейных связностей на трехмерных пространствах, методика также может быть использована для других размерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Nomizu, K. Invariant affine connections on homogeneous spaces / K. Nomizu. // Amer. Journ. Math – 1954. – Vol. 76., № 1. – P. 33–65.

УДК 62-50

И.К. Асмыкович, доц., канд. физ-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

О РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И НОРМАЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ ДЕСКРИПТОРНЫХ СИСТЕМ

При разработке математических моделей экономических систем и технологических процессов на производстве, а также систем автоматического управления такими процессами необходимо учитывать как дифференциальные, так и алгебраические связи в виде уравнений материального баланса в экономике, либо законов Киргофа в электротехнике, либо фондообразующих и нефондообразующих отраслей в экономической системе государства. Кроме того, часто необходимо принимать во внимание и эффекты последействия. Адекватной математической моделью таких процессов являются дескрипторные динамические системы с отклоняющимся аргументом. Такие системы называют либо вырожденными, либо сингулярными [3], либо системами неразрешенными относительно производной, либо системами с обобщенным пространством состояний, либо алгебро-дифференциальными [2] либо дескрипторными [1,2], причем последнее название превалирует.

Пусть объект управления описывается обыкновенной дескрипторной системой

$$\begin{aligned} &H\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ &Hx(0) = Hx_0 \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) - n$- вектор, $u(t)$-r-мерный вектор управления, который предполагается достаточно гладким, H, A, B - постоянные матрицы соответствующих размеров.

К настоящему времени наиболее подробно изучены регулярные системы вида (1), т.е. системы с регулярным пучком матриц $[\lambda H - A]$. Как известно [1], это означает, что матрица H квадратная и выполняется условие регулярности

$$\det[\lambda H - A] \neq 0 \quad \text{для} \quad \text{некоторого} \quad \lambda \tag{2}$$

При выполнении условия (2) система (1) имеет единственное решение при достаточно гладких управлениях $u(t)$.

При изучении задач управления линейными дескрипторными системами по принципу обратной связи практический интерес представляет собой вопрос о существовании линейного регулятора, обеспечиваюшего регулярность вырожденной системе.

Определение 1. Система (1) с квадратной матрицей H называется регуляризируемой пропорциональной обратной связью, если существует матрица Q, такая что система (1) замкнутая регулятором

$$u(t) = Qx(t) + Gv(t) \tag{3}$$

является регулярной.

Ясно, что если матрица H в дескрипторной системе (1) при производной невырождена, то система регулярна и может быть сведена к обыкновенной системе путем умножения на обратную матрицу.

Определение 2. Система (1) с квадратной матрицей H называется нормализуемой, если существует обратная связь по производной, т.е. матрица F, такая что матрица $[H - BF]$ - невырождена.

Для нормализуемых дескрипторных систем можно использовать все результаты по качественной теории управления обыкновенными линейными системами.

Так как проблема нормализации сводится к решению линейного матричного уравнения

$$H - BF = P, \quad \det P \neq 0 \tag{4}$$

то воспользуемся техникой решения матричных уравнений, разработанной под руководством В.Н. Букова [4], которая называется методом канонизации .

Суть этого метода заключается в разработке специальных конструкций, которые авторы называют правые и левые делители нуля, а также канонизаторы прямоугольных матриц, позволяющие дать полную параметризацию решений различных типов матричных уравнений. В частности, все множество решений правостороннего матричного уравнения $XA = B$ с прямоугольными матрицами соответствующих размеров при выполнениии условия разрешимости $B\overline{A}^R = 0$ определяется формулой с минимальной параметризацией

$$\{X\}_\eta = B\overline{A} + \eta\overline{A}^L,$$

где η - матрица соответствующего размера с произвольными элементами [4]. Такие методы решения могут быть достаточно корректно запрограммированы с помощью пакета MATLAB и использованы для синтеза реальных систем управления.

Пример Рассмотрим дискретную дескрипторную систему:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t). \tag{5}$$

Для нее уравнение (4) имеет вид

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

Запишем его в виде левостороннего матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F, \text{ т.е. } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} F$$

Одним из решений этого уравнения будет матрица $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Для этого уравнения левый делитель нуля $\ddot{A}^L = \lfloor -1 \quad 1 \quad 0 \rfloor$ и условие разрешимости выполняется. Все множество решений матричного уравнения запишется через канонизатор матрицы и правый делитель нуля в виде $\{F\}_\eta = \overline{A}B + \overline{A}^R\eta$, а так как левый делитель матрицы при неизвестных для данного уравнения равен нулю, то его решение будет единственным. Нормализованная система имеет вид

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} u(t).$$

Следует отметить, что методика канонизации матриц может быть применена к решению задач на управление по типу обратной связи для систем с отклоняющимся аргументом как регулярных, так и дескрипторных. Но здесь возникают большие сложности, связанные с тем, что элементы переходных матриц для таких систем представляют собой не отношение полиномов, а отношения квазиполиномов, что существенно усложняет их анализ и синтез.

Для многовходных и многовыходных дескрипторных систем удобнее при исследовании нулевой динамики использовать вторую эквивалентную форму и ее модификацию из [4]. т. е.

$$S = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & A_{13} & A_{14} \\ 0 & I_2 & 0 & 0 \\ A_{31} & 0 & 0 & 0 \\ A_{41} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \ddot{B} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \\ I_3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Асмыкович, И.К. Изучение нулевой динамики дескрипторных систем / И.К Асмыкович. // Автоматический контроль и автоматизация производственных процессов» : материалы Межд. научно-технической конф / 17-18 мая. 2012 г. Минск, БГТУ, 2012 С. 247-251
2. Асмыкович, И.К. Синтез линейных регуляторов в дескрипторных системах с чистым запаздыванием / И.К. Асмыкович // Прикладная информатика и компьютерное моделирование: материалы Второй Всероссийской научно-практической конференции, 9 – 12 сентября 2014 года: в 3 т. Т. 2 Уфа, УГАЭС,2014, с.6 – 8.
3. Mehrmann, Volker Descriptor systems: A general mathematical framework for modelling, simulation and control / Mehrmann Volker, Stykel Tatjana. *Automatisierungstechnik. 2006. 54, N 8, с. 405-415.*
4. *Буков, В.Н.* Вложение систем. Аналитический подход к анализу и синтезу матричных систем. – Калуга: Издательство научной литературы Н.Ф. Бочкаревой, 2006. – 720 с.
5. Марченко В.М. О структуре дескрипторных систем // Труды БГТУ. Серия VI. Физ.-мат. науки и информатика.- 2004, в.12, с.3-6.