УДК 62-50

Н.М. Дмитрук, канд. физ.-мат. наук;
А.И. Калинин, проф., д-р. физ.-мат. наук
(БГУ, г. Минск)

ДЕЦЕНТРАЛИЗОВАННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНЫМИ СИСТЕМАМИ СО СЛАБЫМИ ВЗАИМОСВЯЗЯМИ

1. На промежутке времени $T = [t_0, t_f]$ рассмотрим взаимосвязную динамическую систему, в которой поведение i-ой подсистемы, $i \in I = \{1,2,\dots,q\}$, описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \mu_0 \sum_{j\in I} A_{ij}(t)x_j + b_i(t)u_i, \;\; x_i(t_0) = x_{i0}. \qquad (1)$$

Здесь $x_i = x_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$ — состояние i-ой подсистемы в момент t; $u_i = u_i(t) \in \mathbb{R}$ — ограниченное кусочно-непрерывное управляющее воздействие, $|u_i(t)| \leq L_i$; матричные функции $A_i(t), A_{ii}(t) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_i}$, $t \in T$, характеризуют собственную динамику, $b_i(t) \in \mathbb{R}^{n_i}$, $t \in T$, — входное устройство i-ой подсистемы; $A_{ij}(t) \in \mathbb{R}^{n_i \times n_j}$, $t \in T$, описывают влияние на ее поведение остальных подсистем, $j \in I \setminus i$. Считается, что все перечисленные функции принадлежат классу C^K, $K \geq 0$.

Малый положительный параметр μ_0 в (1) выражает слабую динамическую взаимосвязь между подсистемами.

Целями управления группой систем (1), $i \in I$, являются:
1) перевод в момент времени t_f на общее терминальное множество

$$x(t_f) \in S = \{x = (x_k, k \in I) \colon \sum_{k\in I} H_k x_k = g_0\}, \qquad (2)$$

$H_k \in \mathbb{R}^{m \times n_k}$, rank $H_k = m \leq n_k$, $k \in I$, $g_0 \in \mathbb{R}^m$;
2) минимизация общего критерия качества: $\sum_{k\in I} c_k' x_k(t_f)$.

В настоящей работе рассматривается случай, когда централизованное управление системой (1), как описано в [1], невозможно ввиду невозможности использования центрального регулятора для вычислений в реальном времени и наличия запаздывания в канале обмена информацией между подсистемами. Для достижения поставленных целей будем использовать децентрализованное управление [2].

2. При децентрализованном управлении каждая i-ая подсистема имеет локальный регулятор, который в режиме реального времени вырабатывает локальное управляющее воздействие $u_i^*(t)$, $t \in T$, только для своей подсистемы. Для целей управления доступны 1) измерения текущего состояния $x_i^*(\tau)$ подсистемы i, поступающие в дискретные моменты времени $\tau \in T_h = \{t_0 + kh,\ k = \overline{0, N-1}\}$, $h = (t_f - t_0)/N \in I$, $N \in \mathbb{N}$; 2) состояния $x_k^*(\tau - h)$ и значения управления $u_k^*(t|\tau - h)$, $t \in [\tau - h, \tau[$, подсистем $k \in I \setminus i$, полученные в предыдущий момент времени $\tau - h$. Индексом '*' обозначены состояния и управляющие воздействия, реализующиеся в конкретном процессе управления и отличающиеся от переменных модели (1) в силу присутствующих в реальном процессе неопределенностей.

Процедура инициализации алгоритма децентрализованного управления проводятся, как правило, с помощью центрального регулятора, которой до начала процесса строит централизованную программу $u^0(t) = (u_k^0(t), k \in I)$, $t \in T$. На промежутке $[t_0, t_0 + h[$ на вход i-ой подсистемы подается управляющее воздействие $u_i^*(t) = u_i^d(t|t_0) = u_i^0(t)$. После момента $\tau = t_0 + h$ центральный регулятор не используется, управление передается локальным регуляторам.

В текущий момент времени $\tau \in T_h \setminus t_0$ регулятор i-ой подсистемы формирует локальную задачу оптимального управления (см. ниже) и находит ее решение $u_i^d(t|\tau)$, $t \in T(\tau) = [\tau, t_f]$. На вход i-ой подсистемы подается управляющее воздействие

$$u_i^*(t) = u_i^d(t|\tau),\ t \in [\tau, \tau + h[,\ \tau \in T_h,$$

которое называется *реализацией оптимальной децентрализованной обратной связи* в конкретном процессе.

Локальную задачу оптимального управления для i-го регулятора сформируем, следуя работе [2]:

$$P_i(\tau, \mu_0): \qquad J_i^d(\tau) = \min_{u_i} \sum_{k \in I} c_k' x_k(t_f),$$

$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + \mu_0 \sum_{j \in I} A_{ij}(t)x_j + b_i(t)u_i,\ \ x_i(\tau) = x_i^*(\tau), \tag{3}$$

$$\dot{x}_k = A_k(t)x_k + \mu_0 \sum_{j \in I} A_{kj}(t)x_j,\ \ x_k(\tau) = 0,\ \ k \in I \setminus i,$$

$$\sum_{k \in I} H_k x_k(t_f) = g_i^d(\tau, \mu_0),\ |u_i(t)| \le L_i,\ t \in T(\tau),$$

где $g_i^d(\tau, \mu) = \Phi_i(\tau, \mu)x_i^d(\tau|\tau - h) + \int_\tau^{t_f} \Phi_i(t, \mu)b_i(t)u_i^d(t|\tau - h)dt$,

$$\dot{\Phi}_i(t, \mu) = -\Phi_i(t, \mu)A_i(t) - \mu \sum_{j \in I} \Phi_j(t, \mu)A_{ji}(t)\ ,\ \Phi_i(t_f, \mu) = H_i;$$

$x^d(\tau|\tau - h) = (x_k^d(\tau|\tau - h), k \in I)$, — состояние, в которое перейдет система (1), $i \in I$, в момент τ из $x(\tau - h) = x^*(\tau - h)$ под действием управления $u^*(t) = (u_k^*(t), k \in I)$, $t \in [\tau - h\ , \tau[$.

Задача (3) — линейная задача оптимального управления. Она может быть решена стандартными методами, однако при большом количестве подсистем, составляющих большую динамическую систему, такой подход может оказаться неэффективным и трудоемким. В настоящей работе для решения задачи (3) при малых значениях параметра μ_0 предлагается использовать асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем [3]. В результате будет построена асимптотически субоптимальная программа s-го порядка [3] задачи $P_i(\tau, \mu)$, $\mu \to 0$. Положив в асимптотическом решении $\mu = \mu_0$, получим приближенное решение локальной задачи (3).

3. Асимптотически субоптимальную программу s-го порядка построим в два этапа. На первом этапе решим базовую задачу — $P_i(\tau, 0)$. На втором скорректируем решение базовой задачи, построив разложения по степеням μ определяющих элементов решения $P_i(\tau, \mu)$.

При $\mu = 0$ в (3) получим $x_k(t) \equiv 0,\ t \in T(\tau),\ k \in I \setminus i$, поэтому базовая задача имеет вид

$$P_i(\tau,0): \qquad c_i' x_i(t_f) \to \min,$$
$$\dot{x}_i = A_i(t)x_i + b_i(t)u_i,\ \ x_i(\tau) = x_i^*(\tau), \tag{4}$$
$$H_k x_k(t_f) = g_i^d(\tau,0),\ |u_i(t)| \le L_i,\ t \in T(\tau).$$

В (4) размерность оптимизируемой динамической системы значительно меньше, чем в (3). Будем считать, что базовая задача (4) имеет решение $u_i^0(t|\tau),\ t \in T(\tau)$, которое является нормальным. Пусть $x_i^0(t|\tau),\ t \in T(\tau)$, — оптимальная траектория (4); $\psi_i^0(t|\tau),\ t \in T(\tau)$, — сопряженная траектория, решение сопряженного уравнения

$$\dot{\psi}_i = -A_i(t)'\psi_i,\ \psi_i(t_f) = -c_i - H_i'\nu_i^0(\tau),$$

где $\nu_i^0(\tau)$ — оптимальный вектор множителей Лагранжа в задаче (4).

Оптимальная программа $u_i^0(t|\tau),\ t \in T(\tau)$, характеризуется ее определяющими элементами [3]: 1) точками переключения $T_i^0(\tau) = (t_i^p(\tau), p = \overline{1,p^*})$, которые являются нулями коуправления $\Delta^0(t|\tau) = \psi_i^0(t|\tau)'b_i(t),\ t \in T(\tau)$, и 2) вектором множителей Лагранжа $\nu_i^0(\tau)$:

$$u_i^0(t|\tau) = (-1)^p\alpha_i(\tau),\ t \in [t_i^p(\tau), t_i^{p+1}(\tau)[,\ \ p = \overline{0,p^*} \tag{5}$$

где $\alpha_i(\tau) = L_i \operatorname{sign}\Delta^0(\tau|\tau),\ t_i^0(\tau) = \tau,\ t_i^{p^*+1}(\tau) = t_f$.

Пусть теперь $u_i^0(t,\mu|\tau),\ t \in T(\tau)$, — оптимальная программа задачи $P_i(\tau,\mu)$. При определенных предположениях (см. [3]) и достаточно малых μ эта оптимальная программа сохраняет структуру решения (5) базовой задачи. Обозначим: $T_i(\mu|\tau) = (t_i^p(\mu|\tau), p = \overline{1,p^*})$ — точки переключения оптимальной программы $u_i^0(t,\mu|\tau),\ t \in T(\tau)$; $\nu_i(\mu|\tau)$ — соответствующий вектор множителей Лагранжа.

Вектор определяющих элементов $z_i(\mu|\tau) = (T_i(\mu|\tau), \nu_i(\mu|\tau))$ удовлетворяет системе определяющих уравнений

$$R_i(z_i,\mu|\tau) = \begin{pmatrix} \sum_{k\in I} H_k x_k(t_f, T_i, \mu|\tau) - g_i^d(\tau,\mu) \\ \psi_i'(t_i^p, T_i, \nu_i, \mu|\tau) b_i(t_i^p),\ \ p = \overline{1,p^*} \end{pmatrix} = 0, \tag{6}$$

где $z_i = (T_i, \nu_i),\ x_k(t, T_i, \mu|\tau),\ k \in I,\ \psi_i(t, T_i, \nu_i, \mu|\tau),\ t \in T(\tau)$, — прямая и сопряженная траектории в $P_i(\tau,\mu)$, соответствующие программе

$$u_i(t, T_i|\tau) = (-1)^p\alpha_i(\tau),\ t \in [t_i^p, t_i^{p+1}[,\ \ p = \overline{0,p^*}. \tag{7}$$

Для построения асимптотически субоптимальной программы s-го порядка в задаче $P_i(\tau,\mu)$ вычислим коэффициенты $z_i^l(\tau) = (T_i^l(\tau), \nu_i^l(\tau))$, $l = \overline{1,s}$, разложения определяющих элементов по степеням μ: $z_i(\mu|\tau) = \sum_{l=0}^{s} \mu^l z_i^l(\tau) + o(\mu^s)$, где $z_i^0(\tau) = (T_i^0(\tau), \nu_i^0(\tau))$ — определяющие элементы решения базовой задачи (4).

Коэффициенты $z_i^l(\tau),\ l = \overline{1,s}$, находятся последовательно из невырожденных систем линейных алгебраических уравнений

$$I_0(\tau) z_i^1(\tau) = -R_i^1(z_i^0(\tau)|\tau),$$

$$I_0(\tau) z_i^2(\tau) = -\frac{\partial R_i^1(z_i^0(\tau)|\tau)}{\partial z_i} z_i^1(\tau) — z_i^1(\tau)' \frac{\partial^2 R_i^0(z_i^0(\tau)|\tau)}{\partial z_i^2} z_i^1(\tau) - R_i^2(z_i^0(\tau)|\tau),$$

где $I_0(\tau)$ — матрица Якоби; $R_i^l(z_i|\tau)$, $l = \overline{0,s}$, — коэффициенты разложения уравнений (6) по степеням μ;

$$R_i^l\big(z_i^0(\tau)\big|\tau\big) = \begin{pmatrix} \Phi_i^l(\tau)\Delta x_i(\tau) + \int_\tau^{t_f} \Phi_i^l(t) b_i(t)\Delta u_i(t|\tau)dt \\ -[\phi_i^l\big(t_i^p\big)' + \nu_i' \Phi_i^l(t_i^p)] b_i\big(t_i^p\big),\ p = \overline{1,p^*} \end{pmatrix},$$

$\Delta x_i(\tau) = x_i^*(\tau) - x_i^d(\tau|\tau - h), \Delta u_i(t|\tau) = u_i^0(t|\tau) - u_i^d(t|\tau - h).$

Функции $\Phi_i^l(t)$, $\phi_i^l(t)$, $t \in T$, $l = \overline{0,s}$, могут быть найдены до начала процесса управления из систем дифференциальных уравнений

$$\dot\Phi_i^0 = -\Phi_i^0 A_i(t)\,,\ \Phi_i^0\big(t_f\big) = H_i; \quad \dot\phi_i^0 = -A_i'(t)\phi_i^0\,,\ \phi_i^0\big(t_f\big) = c_i;$$

$$\dot\Phi_i^l = -\Phi_i^l A_i(t) - \textstyle\sum_{j\in I} \Phi_j^{l-1}(t) A_{ji}(t)\,,\ \Phi_i^l\big(t_f\big) = 0;$$

$$\dot\phi_i^l = -A_i'(t)\phi_i^l - \textstyle\sum_{j\in I} A_{ji}'(t)\phi_j^{l-1}(t)\,,\ \phi_i^l\big(t_f\big) = 0,\ l = \overline{1,s}.$$

Функция $u_i^s(t,\mu|\tau) = u_i(t, T_i^s(\mu|\tau)|\tau)$, $t \in T(\tau)$, вычисленная по (7), с точками переключения $T_i^s(\mu|\tau) = \sum_{l=0}^s \mu^l T_i^l(\tau)$, — асимптотически субоптимальная программа порядка s в задаче $P_i(\tau,\mu)$.

В качестве приближенного решения задачи (3) возьмем $u_i^d(t|\tau) = u_i^s(t,\mu_0|\tau)$, $t \in T(\tau)$.

Утверждение. При каждом $\tau \in T_h \setminus t_0$ функция $u^d(t|\tau) = (u_k^s(t,\mu_0|\tau), k \in I), t \in T(\tau)$, порождает траекторию системы (1), $i \in I$, удовлетворяющую (2) с точностью $o(\mu_0^s)$.

Работа выполнена при поддержке Белорусского Республиканского Фонда фундаментальных исследований (грант Ф14МС-005).

ЛИТЕРАТУРА

1 Габасов, Р., Кириллова Ф.М. Принципы оптимального управления // Докл. НАН Беларуси. 2004. Т. 48, № 1. С. 15–18.

2 Габасов, Р., Дмитрук, Н.М., Кириллова, Ф.М. Оптимальное децентрализованное управление группой динамических объектов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48, № 4. С. 593–609.

3 Дмитрук, Н.М. Оптимальное управление взаимосвязанными объектами // «Динамика систем и процессы управления: Труды Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского». Изд-во: Ин-т матем. и механики УрО РАН им. Н.Н. Красовского, Екатеринбург. 2015. С.147-154.

Калинин А.И. Асимптотические методы оптимизации возмущенных динамических систем. Мн: УП "Экоперспектива", 2000.