УДК 519.626.2

Л.И. Лавринович
(БГУ, г. Минск)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОБ УПРАВЛЕНИИ ЛИНЕЙНОЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМОЙ С МИНИМАЛЬНЫМИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИМИ ЗАТРАТАМИ

Численное решение задач оптимального управления предполагает неоднократное интегрирование прямой и сопряженной систем. В сингулярно возмущенных задачах эти системы являются жесткими и, как следствие, при вычислениях возникают серьезные трудности, выражающиеся в недопустимо большом времени счета и неизбежном накоплении вычислительных ошибок. Поэтому возрастает роль асимптотических методов, тем более, что при их применении происходит декомпозиция исходной задачи оптимального управления на задачи меньшей размерности.

Настоящий доклад посвящен построению асимптотических приближений в виде программы и обратной связи к решению задачи оптимизации переходного процесса в линейной сингулярно возмущенной системе. Эта задача состоит в нахождении допустимого управления с минимальными энергетическими затратами. Суть предлагаемых алгоритмов состоит в асимптотическом разложении по целым степеням малого параметра начальных значений сопряженных переменных (множителей Лагранжа) – конечномерных элементов, по которым легко восстанавливаются решение задачи. Следует отметить, что сингулярно возмущенным линейно-квадратичным задачам оптимального управления посвящено значительное число, однако в них не накладывались ограничения на правый конец траекторий.

В классе r-мерных управляющих воздействий $u(t)$, $t \in T = [t_*, t^*]$, с кусочно-непрерывными компонентами рассматривается следующая задача оптимального управления:

$$\begin{aligned} &\dot{y} = A_1(t)y + A_2(t)z + B_1(t)u,\ y(t_*) = y_*, \\ &\mu\dot{z} = A_3(t)y + A_4(t)z + B_2(t)u,\ z(t_*) = z_*, \end{aligned} \tag{1}$$

$$y\left(t^*\right) = 0,\ z\left(t^*\right) = 0, \tag{2}$$

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u\,dt \to \min, \tag{3}$$

где μ - малый положительный параметр, t_*, t^* - заданные моменты времени $\left(t_* < t^*\right)$, y - n-вектор медленных переменных, z – m-вектор быстрых переменных, $P(t)$ - положительно-определенная симметрическая матрица для всех $t \in T$.

О п р е д е л е н и е 1. *Управление* $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, *с кусочно-непрерывными компонентами назовем (программным) асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка (*$N = 0, 1, 2, \ldots$*), если оно переводит динамическую систему в состояние* $O\left(\mu^{N+1}\right)$ *и отклоняется по критерию качества (3) от оптимального управления на величину того же порядка малости.*

О п р е д е л е н и е 2. *Вектор-функцию* $u^{(N)}(y, z, t, \mu)$ *назовем асимптотически субоптимальной обратной связью N-го порядка, если для любого начального состояния* (y_*, z_*, t_*), $t_* < t^*$, *имеет место* $u^{(N)}(y_*, z_*, t_*, \mu) = u^{(N)}(t_*, \mu)$, *где* $u^{(N)}(t, \mu)$, $t \in T$, *– асимптотически субоптимальное управление N-го порядка в задаче (1) – (3).*

Предположение 1. *Матрица* $A_4(t)$, $t \in T$, *устойчивая, т.е. действительные части всех ее собственных значений отрицательны.*

Предположение 2. *Элементы всех матриц, формирующих задачу, бесконечно дифференцируемы.*

Вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений начинаются с решения двух задач оптимального управления, называемых соответственно первой и второй базовыми. Первая базовая задача имеет вид

$$\begin{gathered} \dot{y} = A_0(t)y + B_0(t)u,\ y(t_*) = y_*,\ y(t^*) = 0, \\ J_1(u) = \frac{1}{2}\int_{t_*}^{t^*} u^{\mathrm{T}} P(t) u\, dt \to \min, \end{gathered} \tag{4}$$

где $A_0(t) = A_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)A_3(t)$, $B_0(t) = B_1(t) - A_2(t)A_4^{-1}(t)B_2(t)$. (5)

Предположение 3. *Динамическая система в задаче* (4) *является вполне управляемой.*

Вторая базовая задача является задачей с бесконечной длительностью процесса

$$\begin{gathered} \frac{dz}{ds} = A_4(t^*)z + B_2(t^*)u,\ z(0) = A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)u^0(t^*), \\ z(-\infty) = 0,\ J_2(u) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} u^{\mathrm{T}} P(t^*) u\, ds \to \min. \end{gathered} \tag{6}$$

Предположение 4. *Выполнено условие управляемости*

$$rank\left(B_2(t^*),\ A_4(t^*)B_2(t^*), \ldots,\ A_4^{m-1}(t^*)B_2(t^*)\right) = m.$$

Теорема *При выполнении предположений 1–4 решению задачи* (1) – (3) *с достаточно малым* μ *соответствует в силу принципа максимума единственный вектор сопряженных переменных* $\left(\psi_1^0(t,\mu),\psi_2^0(t,\mu)\right)$, $t\in T$. *Величины* $\lambda(\mu)=\psi_1^0\left(t^*,\mu\right)$, $\nu(\mu)=\psi_2^0\left(t^*,\mu\right)$, *являющиеся определяющими элементами задачи* (1) – (3), *допускают асимптотические разложения*

$$\lambda(\mu)\sim\lambda_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k\,,\ \nu(\mu)\sim\nu_0+\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\nu_k\,,$$

в которых $\nu_0=\sigma_0-\left(A_2\left(t^*\right)A_4^{-1}\left(t^*\right)\right)^{\mathrm{T}}\lambda_0$, *а* λ_0, σ_0 *–значения сопряженных переменных на правом конце траекторий соответственно в первой и второй базовых задачах.*

Доказательство теоремы является конструктивным и предопределяет дальнейшие вычисления при построении асимптотически субоптимальных управлений.

Асимптотически субоптимальное управление *N*-го порядка $\left(N\geq 1\right)$ имеет вид

$$u^{(N)}(t,\mu)=P^{-1}(t)\Big(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)+$$
$$+B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)\Big),\tag{7}$$

где $\psi_1(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)$, $\psi_2(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)$ – решения сопряженной системы

$$\dot\psi_1=-A_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1-A_3^{\mathrm{T}}(t)\psi_2\,,\ \mu\dot\psi_2=-A_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_1-A_4^{\mathrm{T}}(t)\psi_2\tag{8}$$

с начальными условиями

$$\psi_1\left(t^*\right)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k\lambda_k\,,\ \psi_2\left(t^*\right)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k\nu_k\,.$$

сопряженная система (7) является сингулярно возмущенной и, следовательно, жесткой. Интегрирования жесткой системы можно избежать, заменив в (7) вектор-функции $\psi_i\left(t,\lambda,\nu,\mu\right)$, $i=1,2$, их асимптотическими приближениями

$$\psi_i^{(N)}(t,\lambda,\nu,\mu)=\sum_{k=0}^{N}\mu^k\left(\psi_{ik}\left(t,\lambda,\nu\right)+\Pi_k\psi_i\left(s,\lambda,\nu\right)\right),$$
$$s=\left(t-t^*\right)/\mu\,,\ t\in T\ ,i=1,2\,.$$

Вектор-функция

$$\overline{u}^{(N)}(t,\mu)=P^{-1}(t)\Big(B_1^{\mathrm{T}}(t)\psi_1^{(N)}(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)+$$

$$+B_2^{\mathrm{T}}(t)\psi_2^{(N)}(t,\lambda^{(N)}(\mu),\nu^{(N)}(\mu),\mu)\Big),\ t\in T,$$

наряду с (7) будет асимптотически субоптимальным управлением N-го порядка в задаче (1) – (3).

В частности асимптотически субоптимальное управление нулевого порядка имеет вид

$$\overline{u}^{(0)}(t,\mu)=u^0(t)+u^*\Big(\big(t-t^*\big)/\mu\Big),\ t\in T, \tag{9}$$

где $u^0(t)$, $t\in T$, $u^*(s)$, $s\le 0$, – решения соответственно первой и второй базовых задач. Заметим, что управление (9) не зависит от начального состояния z_* вектора быстрых переменных и при малых μ будет существенно отличатся от решения $u^0(t)$, $t\in T$, первой базовой задачи лишь в пограничном слое, т.е. в некоторой левосторонней окрестности точки t^*.

Вектор-функция

$$u^{(0)}(y,z,t,\mu)=-P^{-1}(t)\Big(B_0^{\mathrm{T}}(t)F_0^{\mathrm{T}}(t)+$$

$$+B_2^{\mathrm{T}}(t)G^{\mathrm{T}}\Big(\big(t-t^*\big)/\mu\Big)C_0\Big)C_1^{-1}(t)F_0(t)y$$

представляет собой асимптотически субоптимальную обратную связь нулевого порядка в исходной задаче. Здесь $F_0(t)$, $t\in T$, – $(n\times n)$-матричная функция, являющаяся решением начальной задачи

$$\dot{F}_0=-F_0A_0(t),\ F_0(t^*)=E_n,$$

$G(s)$, $s\le 0$, $-(m\times m)$-матричная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$\frac{dG}{ds}=-GA_4(t^*),\ G(0)=E_m,$$

$$C_1=\int_{t_*}^{t^*}\Phi_0(t)P^{-1}(t)\Phi_0^{\mathrm{T}}(t)\,dt,\ C_0=C_3^{-1}A_4^{-1}(t^*)B_2(t^*)P^{-1}(t^*)B_0^{\mathrm{T}}(t^*),$$

$$C_3=\int_{-\infty}^{0}\Big(\Pi\Phi(s)P^{-1}(t^*)\Pi\Phi^{\mathrm{T}}(s)\Big)ds,\ \Pi\Phi(s)=G(s)B_2(t^*).$$

Отметим, что построенная обратная связь не зависит от текущей позиции вектора быстрых переменных z.

УДК 517.977

А. А. Якименко, доц., канд. физ.-мат. наук
(БГТУ, г. Минск)

МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ ДВУМЕРНОЙ СИСТЕМОЙ ЗАПАЗДЫВАЮЩЕГО ТИПА

Рассмотрим двумерную линейную стационарную систему с запаздывающим аргументом с одним входом и двумя соизмеримыми запаздываниями вида

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2h) \\ x_2(t-2h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \qquad (1)$$

где $h > 0$ – постоянное запаздывание. Предполагается, что выполнено условие $c_{12} \neq 0$. В этом случае равенство нулю элемента c_{11} не ограничивает общность системы (1).

Характеристический квазиполином системы (1) имеет вид

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{4-2i} \alpha_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h},$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$ – числа, зависящие от коэффициентов системы (1), $\alpha_{20} = 1$. Задача модального управления состоит в том, чтобы для любых наперед заданных чисел β_{ij}, где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, \ldots, 4-2i$, $\beta_{20} = 1$, найти такой линейный регулятор, что система (1), замкнутая этим регулятором, имеет характеристический квазиполином вида

$$\sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{4-2i} \beta_{ij} \lambda^i e^{-j\lambda h}.$$

Регулятор будем искать в форме

$$u(t) = q'_{00} x(t) + \sum_{i=0}^{L} \sum_{j=1}^{N} q'_{ij} x^{(i)}(t - jh) + \int_{-h}^{0} q'(s) x(t+s)\, ds, \qquad (2)$$

где $q_{ij} \in \mathbb{R}^2$, штрих $(\cdot)'$ означает транспонирование, L, $N \in \mathbb{N}$, $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) \end{bmatrix}'$, $x^{(i)}(\cdot) \equiv \dfrac{d^i x(\cdot)}{dt^i}$, $x^{(0)}(\cdot) \equiv x(\cdot)$.

Имеет место следующая

Теорема. Для того, чтобы система (1) в случае $c_{12} \neq 0,\ b_{11} \neq 0$ была модально управляема регулятором вида (2), необходимо и достаточно, чтобы было выполнено условие

$$\delta(\xi_i) \neq 0,\ i = 1,\ 2,$$

где $\delta(\xi_i) = a_{11} + b_{11} e^{-\xi_i h} - \xi_i,\ i = 1,\ 2.$ При этом регулятор, решающий задачу модального управления имеет вид:

$$u(x_1,\ x_2) = \begin{bmatrix} -a_{21} & -a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_{21} & -b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-h) \\ x_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -c_{21} & -c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t-2h) \\ x_2(t-2h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1(\cdot) & q_2(\cdot) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c_{12}}{b_{11}} m \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix},$$

где $q_1(\cdot),\ q_1(\cdot)$ – компоненты регулятора, решающего задачу модального управления для следующей системы нейтрального типа:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \frac{b_{11}b_{12} - a_{11}c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t-h) \\ y_2(t-h) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{c_{12}}{b_{11}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t-h) \\ \dot{y}_2(t-h) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1(t).$$

Эти компоненты были получены в работе [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Якименко, А. А. Управление динамическими системами с запаздывающим аргументом нейтрального типа воздействием линейной обратной связи: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / А. А. Якименко. – Минск, 2008. – 113 с.

УДК 532.517; 621.928

А. М. Волк, доц., канд. техн. наук
(БГТУ, г. Минск)

К РАСЧЕТУ ПЛЕНОЧНОГО ЦЕНТРОБЕЖНОГО РАСПЫЛИТЕЛЯ

Пленочные распылители находят широкое применение в технических устройствах, применяемых для тепломассопереноса, сушки, орошения, нанесения красок [1].

При расчете режимов работы данных устройств важное значение имеет режим движения пленки жидкости.

Рассмотрим стационарное осесимметричное ламинарное движение пленки вязкой жидкости по внутренней стенке вертикального ко-